



# Matrices.

Apuntes de Matemática – 6to. Año B - Química.

# MATRICES...



---

---

Cuando se lee tablas de posiciones de los equipos de fútbol, los horarios de los trenes, de colectivos en las estaciones o cuando se trabaja con una planilla de cálculo, se utiliza Matrices...

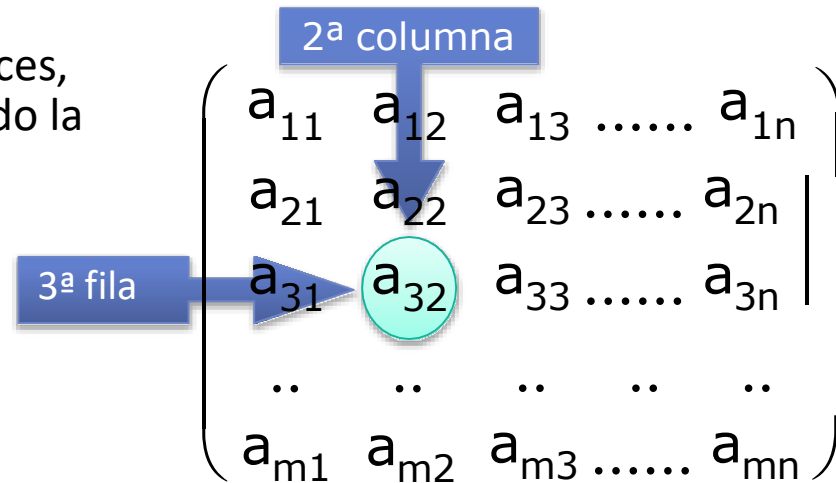
Las matrices se utilizan en la resolución de sistemas de ecuaciones aplicados a la geometría, estadística, economía, informática, física, entre otras ciencias...

# MATRICES...

Se llama **matriz** a una disposición rectangular de números reales, a los cuales se les denomina **elementos** de la matriz.

Cada elemento tiene dos subíndices, el primero indica la fila y el segundo la columna.

El orden es el número de filas y columnas que tiene la matriz, se representa por  $m \times n$ .



Dimensión de la matriz  $m \times n$

Dos **matrices son iguales** cuando tienen la **misma dimensión** y los **elementos** que ocupan la misma posición en ambas son **iguales**.

# MATRICES...

Ejemplo de matriz: Lucas, Dante y Elena han ido a una tienda y han comprado lo siguiente:

Lucas compró dos bocadillos, tres refrescos y un pastel, Dante se llevó un bocadillo, un refresco y un pastel; y Elena compró un bocadillo y un refresco.

Estos datos se pueden agrupar en una matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo se puede observar una matriz cuya dimensión es 3 (filas) x 3 (columnas) y como el número de filas y columnas coincide, se dice que es una **matriz cuadrada** y en este caso de orden 3.

$a_{12} = 3$  se lee «elemento de la fila 1 columna 2 es 3»

# ALGUNAS DEFINICIONES...

**Matriz fila:** es una matriz constituida por una sola fila;

$$A = (1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9)$$

**Matriz columna:** es una matriz constituida por una sola columna;

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 12 & 10 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ -1 & 10 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

**Matriz transpuesta:** Dada una matriz  $A$ , se llama matriz transpuesta de  $A$  a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas;

**Matriz cuadrada:** es una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas. Los elementos que se encuentran en la misma fila y columna están en la **diagonal principal**;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria

Diagonal principal

# ALGUNAS DEFINICIONES...

**Matriz nula:** todos los elementos que componen a la matriz son nulos;

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 3 \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3 \times 2$$

**Matriz diagonal:** es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos;

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Matriz escalar:** es una matriz diagonal donde todos los elementos de ella son iguales;

**Matriz identidad:** es una matriz escalar, cuya diagonal principal es 1;

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Matriz triangular superior:** es una matriz donde todos los elementos por debajo de la diagonal son ceros;

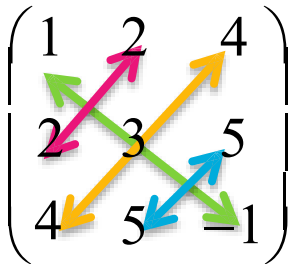
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Matriz triangular inferior:** es una matriz donde todos los elementos por encima de la diagonal son ceros;

# ALGUNAS DEFINICIONES...

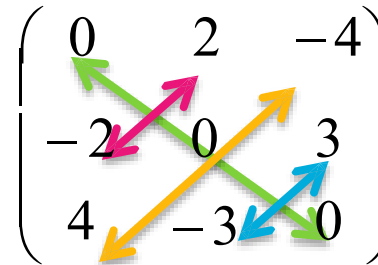
**Matriz simétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta;

$$A = A^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
A 3x3 matrix with elements 1, 2, 4 in the first row; 2, 3, 5 in the second row; and 4, 5, -1 in the third row. Colored arrows connect elements symmetrically across the main diagonal: a pink arrow from (1,2) to (2,2), a yellow arrow from (1,3) to (3,3), a green arrow from (2,1) to (1,1), a blue arrow from (3,2) to (2,2), and a light blue arrow from (3,1) to (1,1).

**Matriz anti-simétrica:** es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.

$$A = -A^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
A 3x3 matrix with elements 0, 2, -4 in the first row; -2, 0, 3 in the second row; and 4, -3, 0 in the third row. Colored arrows connect elements antisymmetrically across the main diagonal: a pink arrow from (1,2) to (2,1), a yellow arrow from (1,3) to (3,1), a green arrow from (2,3) to (3,2), and a light blue arrow from (3,3) to (3,3).



---

---

# OPERACIONES CON MATRICES.

OPERACIONES CON MATRICES

# SUMA DE MATRICES

Dos matrices A y B con las mismas dimensiones, es decir, con la misma cantidad de filas y de columnas pueden sumarse como se ve a continuación:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & a_{34} + b_{34} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

Sin embargo, las siguientes matrices no se pueden sumar.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

La diferencia de matrices A y B se representa por  $A - B$ , y se define como la suma de A con la opuesta de B:  $A - B = A + (-B)$

Por tanto, para poder sumar dos matrices estas han de tener la misma dimensión

# PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NÚMERO.

Para multiplicar un número real por una matriz, se multiplican cada uno de los elementos de la matriz por dicho número.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Tener presente: Propiedades.**

**Asociativa mixta:  $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$**

**Distributiva 1:  $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$**

**Distributiva 2:  $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$**

**Elemento neutro:  $1 \cdot A = A$**

Observación:  $a, b$  nros. Reales y  $A, B$  matrices.

# PRODUCTO ENTRE MATRICES.

Dadas dos matrices A y B, su producto es otra matriz AxB cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B. De manera más formal, los elementos de AxB son de la forma:

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ ta_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{pmatrix} \\
 \text{A} & \text{B} & & \text{AxB}
 \end{matrix}$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B.

Es más, si A tiene dimensión  $m \times n$  y B dimensión  $n \times p$ , la matriz P será de orden  $m \times p$ ,

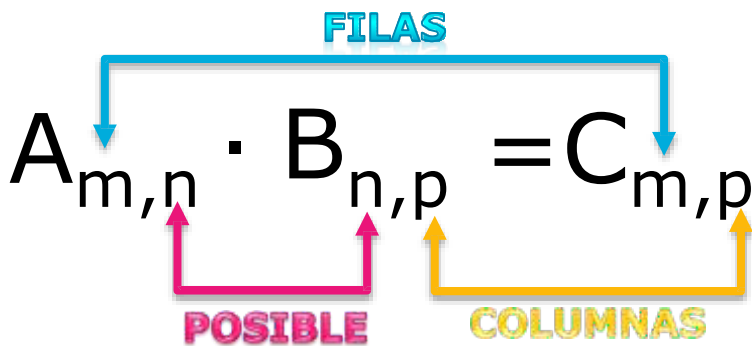
Ejemplo

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

Observación: tener presente que este es un ejemplo donde ambas matrices que componen el producto son de orden 3.

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

# PRODUCTO ENTRE MATRICES.



El producto de matrices es posible cuando coincide el número de columnas de una matriz con el número de filas de la otra matriz.

**Tener presente: Propiedades.**

**Asociativa:**  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

**Distributiva:**  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

**Elemento neutro:**  $A \cdot I = A$  (Donde  $I$  es la matriz identidad del mismo orden que la matriz  $A$ )

**No es conmutativa:**  $A \cdot B \neq B \cdot A$

# PRODUCTO ENTRE MATRICES.

## PRODUCTO. POTENCIA DE UNA MATRIZ:

Si  $A$  es una matriz cuadrada, las **potencias de  $A$** , de exponente natural, se definen como en el caso de los números naturales: el exponente indica el número de veces que se multiplica la matriz por sí misma.

$$\text{Ejemplo: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# EJERCICIOS

1

Dado las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$  calcular:

- 1)  $A + B$
- 2)  $A - B$
- 3)  $B - A$

2

Sea  $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ , calcular

- 1)  $2A$
- 2)  $\frac{1}{2}A$

3

Dado  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $k = 2$  calcular:

- 1)  $AxB$
- 2)  $BxA$
- 3) *Comprobar*  $Ax(B + C) = AxB + AxC$

# EJERCICIOS

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & 2 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver:

1.  $A+B$
2.  $A+B-C$
3.  $AB$
4.  $ABC$
5.  $3AB-ED$

## A. Operaciones básicas con matrices

1. Dadas las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix},$$

a)  $AB$

g)  $(A + C)^2$

h)  $A^2 + 2AC + C^2$