



MATEMÁTICA II



COLEGIO SAN JOSÉ

CICLO LECTIVO 2022

5° A ECONOMÍA

5° B QUÍMICA

5° C CONSTRUCCIONES

PROFESOR: VERÓNICA BUSO

CECILIA NOLLÉN

FERNANDO GONZALEZ

ALUMNO:

PROGRAMA ANUAL DE MATEMÁTICA

CURSO: 5° "A", "B" y "C"

PROFESORES: VERÓNICA BUSO-CECILIA NOLLÉN-FERNANDO GONZALEZ

AÑO LECTIVO: 2022

CONTENIDOS:

UNIDAD N° 1: Factoro de polinomios.

Análisis de los casos de factoro de polinomios: factor común, factor común por grupos, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto y cuatrinomio cubo perfecto.

Ejercicios de aplicación. Teorema para calcular las raíces: fórmula resolvente. Factorización por Gauss. Casos combinados. Ejercicios de aplicación.

UNIDAD N° 2: Expresiones algebraicas fraccionarias.

Expresiones racionales. Operaciones: simplificación, suma, resta, multiplicación y división. Operaciones combinadas. Ejercicios.

UNIDAD N° 3: Función exponencial y logarítmica

Función Exponencial: definición, gráfica y análisis.

Función logarítmica: definición, gráfica y análisis. Uso de la calculadora. Propiedades de la logaritmicación. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Ejercicios.

UNIDAD N° 4: Funciones trigonométricas y trigonometría.

Funciones trigonométricas. Función seno, coseno y tangente. Resolución de triángulos rectángulos. Teorema del seno y coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos. Situaciones problemáticas. Identidades trigonométricas. Demostraciones

UNIDAD N° 5: Vectores

Vector: concepto y representación gráfica. Operaciones: suma resta. Angulo entre vectores. Aplicaciones.

UNIDAD N° 5: Matrices

Matriz: definición. Operaciones. Determinantes, propiedades. Sistemas triangulares. Método de matrices triangulares. Método de matrices equivalentes. Aplicaciones al mundo real.

Bibliografía

- Berio, A. Colombo, M.D'alvano, C., Sardela, O. Matemática 5°. (2014)Buenos Aires: Editorial Puerto de Palos.
- Sadovsky, P. ,Melguizo, M. Matemática II.(2014) Editorial Santillana.
- Lógikamente (libros a medida). Editorial Logikamente.

Profesores: Verónica Buso, Cecilia Nollén, y Fernando Gonzalez

Contrato Pedagógico -Año 2022

Para que podamos enseñar y aprender en un ambiente que favorezca nuestro conocimiento es fundamental que, quienes participamos del acto educativo, asumamos algunos compromisos:

RESPECTO COMO VALOR Y VIRTUD, SERÁ TENIDO EN CUENTA COMO CONTENIDO TRANSVERSAL DE ESTE ESPACIO.

COMPROMISO DEL ALUMNO:

- Cumplir adecuadamente con los tiempos establecidos en entrega de los trabajos sin descuidar la presentación de los mismos.
- La ausencia a clase no significa exención del cumplimiento de las tareas asignadas y/o el estudio.
- No es necesaria la aclaración del profesor para estudiar lo visto en la clase anterior, hay que estudiar para todas las clases.
- Se debe evitar el pedido para salir del aula, para garantizar la seguridad de todos los alumnos a cargo del docente.
- El regreso al aula después de los recreos debe ser de inmediato.
- Es importante mantener en el aula el clima de trabajo y de higiene tanto corporal como del espacio físico.
- Concurrir a clase con el material pedido ya que es indispensable para poder avanzar con el conocimiento y aprovechar el tiempo de clase consultando las dudas.
- Proceder con absoluta honestidad: presentar trabajos propios y no los realizados por otras personas.
- No utilizar celulares, MP3, o cualquier otro dispositivo, sin la indicación o la autorización para hacerlo.
- No comer ni beber en clase.
- Traer firmadas las notificaciones en el cuaderno de comunicaciones. A los efectos de generar en el alumno mayor responsabilidad este deberá cuidar los elementos de la institución tales como sillas, bancos, equipos, etc.

COMPROMISO DEL DOCENTE:

- ❖ Explicar todas las dudas planteadas de los alumnos.
- ❖ Respetar a todos los alumnos y saber escuchar sus propuestas e inquietudes.
- ❖ Avisar con una semana de anticipación, por lo menos, la fecha y temas de las evaluaciones escritas.
- ❖ Entregar en un plazo no mayor a 7 días los resultados de las evaluaciones y trabajos prácticos.
- ❖ Mantener el orden, la disciplina y garantizar un clima propicio de trabajo.

COMPROMISO DE LOS PADRES

- Firmar cada nota que le sea enviada.
- Asistir cada vez que se lo llame a la institución para conversar sobre el desempeño del alumno.

.....
Docente

.....
Alumno

.....
Padre, Madre o Tutor

TE PROPONGO, ANTES DE COMENZAR NUESTRA TAREA, QUE LEAS LAS SIGUIENTES FRASES Y RESALTES LAS QUE TE GUSTAN.

Queridos jóvenes, ¿han pensado en los talentos que Dios les ha dado? ¿Han pensado cómo ponerlos al servicio de los demás? ¡No entierren estos talentos!

Papa Francisco

-Muchos de nuestros sueños parecen al principio imposibles, luego pueden parecer improbables, y luego, cuando nos comprometemos firmemente, se vuelven inevitables. –
Christopher Reeve

Cuando el objetivo te parezca difícil, no cambies el objetivo, busca un nuevo camino para llegar a él.

Confucio

Aquellos que dicen que algo no puede hacerse, suelen ser interrumpidos por otros que lo están haciendo.
Joel A. Barker

**-El éxito es la habilidad de ir de fracaso en fracaso sin perder el entusiasmo. –
Winston Churchill**

Es duro fracasar, pero es todavía peor no haber intentado nunca triunfar. –

Theodore Roosevelt

-El genio es resultado de un uno por ciento de inspiración y de un noventa y nueve por ciento de transpiración. –

Thomas Edison

**-Cualquiera que no esté cometiendo errores es que no está intentándolo lo suficiente.
Wess Roberts**

UNIDAD Nº 1: Factoro de polinomios.

¿Qué es factorizar o factoro un polinomio?

Factorizar o factoro significa "transformar en multiplicación". Es el mismo concepto usado para números, por ejemplo factorizar 42 es encontrar los números primos tales que 42 sea producto de esos números, es decir $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Factor es el nombre que reciben los números 2, 3 y 7. De allí el nombre de factorización. No todos los números tienen una factorización, por ejemplo 13 no la admite.

¿Para qué sirve factorizar un polinomio?

Por ejemplo, tener factorizada la fórmula de una función polinómica sirve para encontrar o visualizar los "ceros" o "raíces". Y eso es algo de gran utilidad en varios temas: para analizar la positividad y negatividad de la función, o para encontrar los máximos y/o mínimos. También la factorización de polinomios se puede utilizar para: resolver inecuaciones de grado 2 o mayor, hallar algunos límites, resolver ecuaciones polinómicas fraccionarias, identidades y ecuaciones trigonométricas, etc. Es decir que nos enseñan a factorizar porque en otros temas de Matemática necesitaremos factorizar polinomios para trabajar con multiplicaciones en vez de sumas y restas.

Para aprender a factorizar, comenzaremos con los casos más sencillos. Veremos algunos casos fáciles de identificar:

Caso1: Factor común:

Sacar **factor común** consiste en extraer el monomio que se repite en todos los términos. Este caso lo aplicamos cuando hay coeficientes con factores comunes. Se extrae el máximo común divisor de dichos coeficientes.

De ser posible, tenemos que sacar factor común tanto de los coeficientes como de la parte literal.

Ejemplos: Factorizar los siguientes polinomios extrayendo el mayor factor común

a) $36x^2 - 12x^3 + 18$

$36 = 6 \times 6$, $12 = 6 \times 2$ y $18 = 6 \times 3$ donde 6 es el máximo común divisor de 36, 12 y 18

luego $36x^2 - 12x^3 + 18 = 6.(6x^2 - 2x^3 + 3)$

b) $4x^3 - 7x^5 + 12x^6$

$$4x^3 - 7x^5 + 12x^6 = x^3 \cdot (4 - 7x^2 + 12x^3)$$

En este caso, el factor común solo existe en la parte literal y es x^3 . No existe factor común entre 4, 7 y 12.

c) $18x^3 + 15x + 12x^6$

$$18x^3 + 15x + 12x^6 = 3x \cdot (6x^2 + 5 + 12x^5)$$

En este caso hay factor común entre los coeficientes y la parte literal.

d) $15x^3 + 8$

En este caso la factorización no se puede hacer, no existe factor común de ningún tipo.

Ejercicios: Factorizar encontrando los factores comunes, si existen. (Los pares se harán en el aula, impares se realizarán como repaso en casa)

1) $6x - 12 =$

3) $14m^2 + 7m =$

5) $4m^2 - 20m =$

7) $b^4 - b^3 =$

9) $20x - 12x^6 + 4x^4 =$

11) $3a + 6a^5 - 9a^3 =$

13) $6x^4 - 30x^3 + 2x^2 =$

15) $18b + 24 =$

17) $10p^2 + 14p^3 - 18p^4 - 16p^5 =$

19) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{8}{9}x =$

2) $24a - 12a^2 =$

4) $8a^3 + 6a^2 =$

6) $x^6 + 2x^5 + 3x^3 =$

8) $14a - 21a^3 + 35 =$

10) $81a^3 - 27a =$

12) $10x^2 - 15x^4 + 25x =$

14) $21x + 16 =$

16) $2x^2 + 6x + 8x^3 - 12x^4 =$

18) $10m^3 + 25m^4 - 6m^6 + 5 =$

20) $9x^2 - 3x + x^3 =$

Caso 2: Factor común por grupo: Se llama factor común en grupo o por agrupación de términos, al caso de factoro cuando los términos de un polinomio pueden reunirse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo.

Ejemplo. $12x^2 + 8 + 9x^4 + 6x^2$

Lo que primero tenemos que ver es si podemos encontrar un factor común entre los 4 términos, en este ejemplo no existe. Luego intentamos buscar un factor común agrupando los términos.

$$(12x^2 + 8) + (9x^4 + 6x^2) = \quad \text{se agrupan términos que tienen un factor común}$$

$$4.(3x^2 + 2) + 3x^2.(3x^2 + 2) = \quad \text{se saca el factor común de cada grupo}$$

Vemos que $(3x^2 + 2)$ se repite en los dos términos, es decir es un factor común. Luego aplicando el caso 1), resulta:

$$4.(3x^2 + 2) + 3x^2.(3x^2 + 2) = (3x^2 + 2).(4 + 3x^2) \quad \text{y así}$$

$$12x^2 + 8 + 9x^5 + 6x^2 = (3x^2 + 2).(4 + 3x^2)$$

Observación: Este caso lo podemos aplicar solo si la cantidad de términos es par mayor que 3. Además podemos asociar 2, 3, 4, etc términos

Factorizar: encontrando los factores comunes por grupo, si existen. (Los pares se harán en el aula, impares se realizarán como repaso en casa)

$$1) a^2 + 5 + a^2x + 5x = \quad 2) ab + 3a + 2b + 6 = \quad 3) ab - 2a - 5b + 10 =$$

$$4) 2ab + 2a - b - 1 = \quad 5) am - bm + an - bn = \quad 6) 3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$$

$$7) 3x^2 - 3bx + xy - by = \quad 8) 6ab + 4a - 15b - 10 = \quad 9) 3a - b^2 + 2b^2x - 6ax =$$

$$10) a^3 + a^2 + a + 1 = \quad 11) ac - a - bc + b + c^2 - c = \quad 12) 4x^3 - 4x^2 + x - 1$$

$$13) 12xy - 4y^2 - 6x + 2y$$

$$14) 4a + 4b + xa + xb =$$

$$15) 18x - 12 - 3xy + 2y + 15xz - 10z =$$

$$16) 27x^3y^2z - 18xyz^2 + 9x^2y^3z =$$

$$17) \frac{2}{3}am - \frac{8}{3}am - \frac{4}{5}bm + \frac{16}{5}bn =$$

$$18) 4a - 7x^2a + ya + 4z - 7x^2z + yz =$$

$$19) 24x^3y^2m^4 + 36x^4y^3m - 8x^2yz^3$$

$$20) 4x^2a + 3y + 12ax + yx =$$

Caso 3: Trinomio cuadrado perfecto: Se llama trinomio cuadrado perfecto al trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. Es decir un polinomio con la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$.

Ejemplo $36x^2 + 12x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto, en efecto:

$$36x^2 + 12x + 1 = 6^2 + 2.6.1 + (1)^2$$

Luego,

recordando los productos notables resulta $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$.

En el trinomio cuadrado perfecto los términos cuadrados son siempre positivos, en cambio el término del doble producto puede ser negativo; en este caso debe ser negativo uno de los términos del binomio cuyo cuadrado es el trinomio dado.

Por ejemplo $x^4 - 12x^2 + 36 = (x^2 - 6)^2$

Observación: no es suficiente con tener tres términos y dos que sean cuadrados. Es posible que el otro término no sea de la forma $2.a.b$

Ejemplo : En el polinomio $36x^2 + 5x + 1$, $a = 6x$ y $b = 1$ pero

$2ab = 2 \cdot 6x \cdot 1 = 12x \neq 5x$, por lo tanto no podemos usar este caso para factorizar este polinomio.

Ejercicio: Factorizar los siguientes polinomios usando, de ser posible, el caso 3. Prestar atención, pues no siempre los términos cuadrados son los de los extremos, el polinomio puede no estar ordenado. (Los pares se harán en el aula, impares se realizarán como repaso en casa)

- | | | |
|--|---|---|
| 1) $x^2 + 6x + 9 =$ | 2) $x^2 + 2x + 1 =$ | 3) $4x^2 + 9 + 12x =$ |
| 4) $x^2 - 10x + 25 =$ | 5) $x + x^2 + \frac{1}{4} =$ | 6) $\frac{1}{4} + 2x + 4x^2$ |
| 7) $\frac{16}{9} + \frac{8}{3}x + x^2$ | 8) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{9}$ | 9) $\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x^3 + x^6$ |
| 10) $9 + 48m + 64m^2$ | 11) $x^2 - 10x + 25$ | 12) $9x^2 - 30x + 25$ |
| 13) $81x^2 - 32x + 4$ | 14) $x^6 + 10x^3 + 25$ | 15) $81z^2 - 180z + 100$ |
| 16) $36y^2 - 42y + 16$ | 17) $400x^{10} + 40x^5 + 1 =$ | 18) $y^4 + 2y^2 + 1 =$ |
| 19) $121 + 198x^6 + 81x^{12}$ | 20) $1 - 2a + a^2$ | |

Caso 4: Cuatrinomio cubo perfecto

Se llama cuatrinomio cubo perfecto al polinomio de cuatro términos, que presenta la siguiente estructura:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

Ejemplo: $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ es un cuatrinomio cubo perfecto, en efecto:

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3$$

y recordando los productos notables, resulta $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)^3$.

Ejercicios: Factorizar usando, de ser posible, el caso 4. (Recordar que no siempre los polinomios están ordenados, es decir, los cubos pueden no estar en los extremos)

1) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$

2) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 =$

3) $64.m^6 + 96.m^4 .n + 48.m^2.n^2 + 8.n^3 =$

4) $x^3 + 3/2 x^2 + 3/4 x + 1/8 =$

5) $64x^3 + 144x^2 + 108x + 27 =$

6) $a^3b^3 + 3a^2b^2x + 3abx^2 + x^3 =$

7) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 =$

8) $-x^3 - 75x - 15x^2 -$ 9)

$0,125 - 0,75.x + 1,5.x^2 - x^3 =$

10) $3/4 x^4 - 1/8 x^6 + 1 - 3/2 x^2$ 11)

$x^3/27 - x^2/3 + x - 1 =$

12) $x^3 + 27 + 9x^2 + 27x$

Caso 5: Diferencia de cuadrados

La diferencia de cuadrados es igual a la suma multiplicada por la diferencia (resta) de las bases de esos cuadrados.

Se basa en la siguiente fórmula $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Ejemplos

$$4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$$

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$$

Ejercicios: Factorizar usando el caso 5

1) $x^2 - 9 =$

2) $x^4 - 1 =$

3) $1 - 4m^2 =$

4) $-1 + x^2 =$

5) $36x^2 - 9 =$

6) $x^2 - 0,16 =$

7) $x^6 - 4 =$

8) $100 y^8 - 49 =$

9) $\frac{9}{25}a^2 - \frac{49}{36} =$

10) $0,01 - 64x^8 =$

11) $0.04 - x^6$

12) $36x^4 - 16 =$

CASOS COMBINADOS: Por lo general, al factorizar polinomios, luego de aplicar uno de los cinco casos aprendidos, es posible seguir factorizando, aplicando otro o el mismo caso.

Ejemplo: $6x^2 - 54$

Primero sacamos factor común 6, resultando $6.(x^2 - 9)$. Vemos que tenemos una diferencia de cuadrados, así resulta $6x^2 - 54 = 6. (x - 3) \cdot (x + 3)$.

Para factorizar un polinomio, se sugiere seguir los siguientes pasos:

1º) Sacar FACTOR COMÚN, si hay.

2º) Si no hay factor común (o ya se aplicó), contar la cantidad de términos del polinomio. Si tiene:

◆ 2 términos, podría ser DIFERENCIA DE CUADRADOS

◆ 3 términos, podría ser TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

◆ 4 términos, podría ser CUATRINOMIO CUBO PERFECTO o FACTOR COMÚN POR GRUPOS.

Ejercicio: Factorizar los siguientes polinomios, con **todos** los casos posibles:

1) $2x^2 - 18$

2) $3x^2 + 30x + 75$

3) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

4) $x^4 - 81$

5) $x^4 - 2x^2 + 1$

6) $3x^2 + 3x + 3/4$

7) $10x^3 - 4x + 15x^2 - 6$

8) $5x^2 - 10x + 5$

9) $x^4 - 2x^3 + x^2$

10) $x^4 + x^3 - x^2 - x$

11) $4x^2 + 2x + 0,25$

12) $x^6 - x^3 + 0,25$

13) $1 - \frac{1}{4}x^6$

14) $2x^2 - 8x + 8$

15) $7x^3 + 3x^2 + 28x + 12$

16) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

17) $3x^2 - 12$

18) $4x^2 - 24x + 72$

29) $-18x + 8x^5$

20) $x^8 - \frac{1}{9}$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Existen algunos trinomios que no se pueden resolver como un trinomio cuadrado perfecto. Por ejemplo en el polinomio $x^2 - 5x + 4$ falla el término central. Veremos otro caso de factorización que aplicaremos para los trinomios de grado 2, una vez que hemos descartado que sea un trinomio cuadrado perfecto.

Caso 6: Fórmula resolvente o de Bhaskara:

Sea el polinomio $ax^2 + bx + c$ siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Para una ecuación cuadrática con coeficientes reales, existen dos soluciones (no siempre reales), que pueden ser iguales, llamadas raíces.

Fórmula general para la obtención de raíces: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se usa \pm para indicar las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego de encontrar x_1 y x_2 , raíces del polinomio $ax^2 + bx + c$, resulta

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Observación: según sea el valor numérico de $b^2 - 4ac$ existirán raíces reales o no:

* si $b^2 - 4ac > 0$ existen 2 raíces reales ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

* si $b^2 - 4ac < 0$ existen 2 raíces pero no son reales ($x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$)

* si $b^2 - 4ac = 0$ existe 2 raíces reales y son iguales ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$)

Ejemplo: Volvamos con el polinomio $x^2 - 5x + 4$ el cual no es un trinomio cuadrado perfecto. En este caso

$$a = 1, b = -5, c = 4$$

Reemplazando estos valores en la fórmula, tenemos

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\text{Luego } x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Resultando $x^2 - 5x + 4 = 1 \cdot (x - 4) \cdot (x - 1)$.

Veamos un ejemplo donde muestra que no siempre existen las soluciones x_1 y x_2 .

Ejemplo: factorizar el polinomio $x^2 - 2x + 2$.

Descartamos que sea un trinomio cuadrado perfecto, por no tener 2 términos cuadráticos. Luego aplicamos la fórmula resolvente con $a = 1, b = -2, c = 2$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Ahora como $\sqrt{-4}$ no es un número real, en este caso diremos que x_1 y x_2 no existen. (Son complejas, campo numérico que se estudiara en 6º año).

Si se presenta este caso, diremos que el polinomio no tiene factorización en \mathbb{R} .

Ejemplo: factorizar el polinomio $4x^2 + 4x + 1$

$$x_1, x_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

Luego $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ y así $4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Cuando las dos raíces son iguales, como en este caso, nuestro polinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

Ejercicio: Aplicar la fórmula resolvente a los siguientes polinomios y dar la escritura factorizada del polinomio (si existen las raíces)

- | | | | |
|-----------------------|--------------------------------|------------------------------|----|
| a) $x^2 - 9x + 8 = 0$ | b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ | c) $x^2 - 6x + 10 = 0$ | d) |
| $m^2 - 2m - 5/4 = 0$ | e) $-1/4 x^2 - 5/4x + 3/2 = 0$ | f) $1/2 a^2 + 1/6 a - 4 = 0$ | g) |
| $2x^2 + 4x - 6 = 0$ | h) $x^2 - 6x + 9 = 0$ | | |

Observe que en los siguientes ejemplos, los coeficientes b o c son cero. Para estos casos, también se puede aplicar la fórmula, pero es más rápido si en i) se despeja x y en j) sacamos factor común x y recordamos que *si el producto de dos números es cero, entonces alguno de ellos es cero*.

- i) $x^2 - 10 = 0$ j) $4x^2 - 20x = 0$

Caso 7: Factorización usando el método de Gauss

Factorizar el polinomio $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

Luego de haber intentado primero todos los demás casos (por ser más sencillos y menos "trabajosos" que Gauss) y no poder factorizar, el último recurso es este método.

En este curso solo resolveremos este método con el coeficiente principal igual a 1. Pero se puede resolver para otros valores distintos de 1.

- a) identificamos el término independiente del polinomio: 10
- b) buscamos sus divisores y los consideramos positivos y negativos:
 $\text{div}(10) = \{ \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10 \}$
- c) usando Ruffini, vemos cuál de estos 8 números es raíz del polinomio

intentamos con +1

1	-2	-13	-10	
1	1	-1	-14	
1	-1	-14	-24	→ como el resto no es 0, descartamos +1

intentamos con -1

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -13 & -10 \\
 -1 & & -1 & 3 & 10 \\
 \hline
 & 1 & -3 & -10 & 0
 \end{array} \rightarrow \text{luego } \mathbf{-1 \text{ es raíz del polinomio}}$$

Seguimos intentando con el mismo valor -1, pero no con los valores originales de los coeficientes, sino con los obtenidos en el último Ruffini (1, -3 y -10):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -3 & -10 \\
 -1 & & -1 & 4 \\
 \hline
 & 1 & -4 & -6
 \end{array} \rightarrow \text{luego } -1 \text{ no es raíz doble del polinomio}$$

Intentamos con el siguiente divisor, con +2

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -3 & -10 \\
 2 & & 2 & -2 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -12
 \end{array} \quad \text{luego } 2 \text{ no es raíz doble del polinomio}$$

Probamos con -2

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -3 & -10 \\
 -2 & & -2 & 10 \\
 \hline
 & 1 & -5 & 0
 \end{array} \quad \text{luego } \mathbf{-2 \text{ es raíz del polinomio}} \quad \text{raíz doble.}$$

Se

Probaremos con +5

$$\begin{array}{r|rr}
 & 1 & -5 \\
 5 & & 5 \\
 \hline
 & 1 & 0
 \end{array} \quad \text{luego } \mathbf{+5 \text{ es raíz del polinomio}}$$

Luego la factorización de $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ es $(x - (-1)).(x - (-2)).(x - 5)$

Es decir

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 1.(x + 1).(x + 2).(x - 5)$$

Ayudas para elegir los números correctos para hacer Ruffini

- Si todos los coeficientes son positivos, solo probar con los divisores negativos.

- Si la suma de los coeficientes es 0, entonces 1 es raíz.

Ejercicio: Resolver usando el método de Gauss, los siguientes polinomios:

1) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

2) $x^3 - 6x^2 + 32$

3) $x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 31x - 30$

Ahora que hemos aprendido todos los casos, podemos completar el resumen visto

Para factorizar un polinomio, se sugiere seguir los siguientes pasos:

1º) Sacar FACTOR COMÚN, si hay.

2º) Si no hay factor común (o ya se aplicó), contar la cantidad de términos del polinomio. Si tiene:

- ◆ 2 términos, podría ser DIFERENCIA DE CUADRADOS
- ◆ 3 términos podría ser TRINOMIO CUADRADO PERFECTO,
- ◆ 3 términos y de grado 2, aplicar fórmula resolvente
- ◆ 4 términos, podría ser CUATRINOMIO CUBO PERFECTO o FACTOR COMÚN POR GRUPOS.

3º) Si todos los demás casos fallaron o ya se aplicaron, aplicar método de Gauss.

Algunas observaciones sobre la factorización:

- El método de Gauss se puede aplicar para todos los polinomios.
- Si el polinomio a factorizar es de grado n , este polinomio tiene como máximo n raíces.
- Existen polinomios que no tiene ninguna raíz real, es decir ningún caso se puede aplicar.

Ejercicios: Factorizar con todos los casos posibles

1) $3x^2 - x - 60$

2) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$

3) $27x^4 - 12$

4) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

5) $3x^2 + 60x + 300$

6) $4x^2 - 20x + 25$

7) $2x^3 + 10x^2 + 12x$

8) $2x^3 - 12x^2 + 24x - 16$

9) $x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{2}{5}$

10) $5x^2 + 5x - 10$

11) $2y^2 - 20yx + 50y$

12) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

13) $2x^2 - 9x - 5 =$

14) $18x^4 - 50$

15) $81y^4 - 16z^8 =$

16) $8x^2 + 40x + 48 =$

17) $4x^2 + 72x + 324$

18) $x^4 + x^2 + 0,25 =$

19) $x^2 - \frac{14}{5}x - \frac{3}{5}$

20) $3x^3 + 18x^2 + 36x + 24$

21) $3x^6 - 27x^4 - 3x^2 + 27 =$

22) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 54x - 81 =$

23) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

24) $24x^3 + 36x^2 + 18x + 3 =$

25) $5x^4 - \frac{5}{16} =$

UNIDAD N° 2: Expresiones algebraicas fraccionarias.

Llamaremos *expresiones algebraicas racionales* a las de la forma $\frac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios de variable x , además $B(x) \neq 0$.

Por ejemplo, $\frac{7}{x-2}$ es una expresión algebraica racional porque el numerador $A(x) = 7$ es un polinomio y el denominador $B(x) = x - 2$ también es un polinomio.

También es una expresión algebraica racional $\frac{x^3 - 2x + \sqrt{3}}{x^2 + 7x}$.

La expresión $x^2 - 9$ es también racional porque $x^2 - 9$ es un polinomio y 1, su denominador, también lo es.

Simplificación de expresiones racionales

Recordamos que, dado el racional $\frac{2}{3}$ podemos hallar otros equivalentes con él: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = \dots$

donde $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ con $n \neq 0$.

Análogamente para la expresión racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ pueden hallarse expresiones racionales

equivalentes: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \cdot N(x)}{B(x) \cdot N(x)}$ siendo $N(x)$ cualquier polinomio no nulo.

En \mathbb{Q} muchas veces se nos presenta el problema de encontrar la fracción equivalente más simple que una dada. Por ejemplo, $\frac{77}{132} = \frac{7 \cdot 11}{2^2 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{7}{12}$

También es posible simplificar expresiones algebraicas racionales *cuando existen factores comunes al numerador y al denominador*, de lo contrario la expresión racional es **irreducible**.

Consideremos $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$.

Si se factoriza su numerador y su denominador:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

Entonces $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)} = \frac{1}{x + 3}$ si $x \neq 1$ y $x \neq -1$

Las dos expresiones racionales, $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-x-3}$ y $\frac{1}{x+3}$ son equivalentes para $x \neq 1$ y $x \neq -1$.

La expresión final es equivalente a la dada para todo valor de x que no anule el factor cancelado porque ello equivaldría a dividir por cero.

Otros ejemplos:

$$\frac{3x^3-12x}{x^2-4x+4} = \frac{3x(x^2-4)}{(x-2)^2} = \frac{3x(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{3x(x+2)}{x-2} = 3x \quad \text{si } x \neq 2$$

$$\frac{x^2+5}{x^4-25} = \frac{x^2+5}{(x^2+5)(x^2-5)} = \frac{1}{x^2-5} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ejercicio: Simplificar, indicando para qué valores de x la expresión resultante es equivalente a la dada.

$$1) \frac{2x-6}{x^2-6x+9} = \quad 2) \frac{x^2+x}{x+1} = \quad 3) \frac{x^3-49x}{x^3-14x^2+49x} = \quad 4) \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} =$$

$$5) \frac{x^3-x^2}{x^3+x^2-2x} = \quad 5) \frac{x^2-6x+9}{x^3-9x^2+27x-27} = \quad 7) \frac{x^5-16x}{x^2-2x} = \quad 8) \frac{x^2+7x+10}{x^2-25} =$$

Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

Para operar con expresiones racionales, aplicamos las mismas propiedades y técnicas que para operar con fracciones numéricas.

Adición y Sustracción

Recordamos que para sumar $\frac{3}{14} + \frac{1}{21}$ necesitamos hallar fracciones equivalentes a los

$$\text{sumandos, de igual denominador: } \frac{3}{14} + \frac{1}{21} = \frac{3}{2 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{42}$$

Para sumar (o restar) expresiones racionales de distinto denominador, debemos sumar (o restar) expresiones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Para hallarlo, factorizamos los denominadores y luego multiplicamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con el que figura (mínimo común múltiplo).

Ejemplo:
$$\frac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \frac{x}{x^2 + 3x - 4} =$$

1- Factorizamos los denominadores

$$= \frac{2}{3(x^2 - 2x + 1)} + \frac{x}{(x-1)(x+4)} = \frac{2}{3(x-1)^2} + \frac{x}{(x-1)(x+4)} =$$

2- Buscamos expresiones equivalentes con igual denominador:

$$= \frac{2(x+4)}{3(x-1)^2(x+4)} + \frac{x \cdot 3(x-1)}{3(x-1)^2(x+4)} =$$

3- Operamos en el numerador y sumamos:

$$= \frac{2x+8+3x^2-3x}{3(x-1)^2(x+4)} = \frac{3x^2-x+8}{3(x-1)^2(x+4)}$$

4- El numerador no tiene raíces reales, por lo tanto la expresión obtenida es irreducible.

Ejercicio: Calcular:

1)
$$\frac{2}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+6x+9} - \frac{1}{3-x} =$$

2)
$$\frac{x-10}{x^2+3x-10} - \frac{2x+4}{x^2-4} =$$

3)
$$\frac{x+5}{x^2-25} + \frac{x+2}{2x^2-6x-20} - \frac{21}{2x+2} =$$

4)
$$\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{(x+1)^2} =$$

Multiplicación

Para multiplicar dos expresiones racionales $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$, procedemos así:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$$

Ejemplos:

1)
$$\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{3x}{x+1} = \frac{(2x+1)3x}{(x-3)(x+1)} = \frac{6x^2+3x}{x^2-2x-3}$$

Prestar atención en el siguiente ejemplo, donde se deben factorizar los polinomios y simplificar

2)

$$\frac{-x^2+4x}{x^2-9} \cdot \frac{5x+15}{x^3-4x^2} = \frac{(-x^2+4x)(5x+15)}{(x^2-9)(x^3-4x^2)} = \frac{-x(x-4)5(x+3)}{(x+3)(x-3)x^2(x-4)} = \frac{-5}{x(x-3)} \quad \text{si } x \neq 4 \text{ y } x \neq -3$$

Ejercicio: Resolver:

$$a) \frac{x^2 - 4x + 4}{2x} \cdot \frac{6x - 12}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

$$b) (x^3 + 1) \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

División

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales $\frac{A(x)}{B(x)}$ y $\frac{C(x)}{D(x)}$ operamos igual que en el

conjunto Q: $\frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{D(x)}{C(x)} = \frac{A(x) \cdot D(x)}{B(x) \cdot C(x)}$ con $C(x) \neq 0$

Ejemplo: $\frac{x-1}{3-x} : \frac{2x}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{(3-x)2x} = \frac{x^2 + x - 2}{6x - 2x^2}$

Ejercicios:

1- Sean $P(x) = \frac{2x+4}{x^2-9}$ y $T(x) = \frac{x+3}{x^2-x-6}$

Calcular:

1) $P(x) \cdot T(x)$

2) $P(x) : T(x)$

3) $T(x) : P(x)$

2- Resolver:

1) $\frac{x^2-4}{x^2-9} : \frac{x^4-16}{x+3}$

2) $\frac{5x+10}{x^2-1} : \frac{3x+6}{x+1}$

3) $\left(\frac{x+4}{x^2-1} \cdot \frac{-x+1}{x^2+1}\right) : \frac{-x^2-3x+4}{x^4-1}$

3- Efectuar los siguientes ejercicios combinados:

a) $\left(\frac{x-2}{x^2+4} + \frac{x+2}{x^2-x-6}\right) \cdot \frac{x^2-9}{4x-10}$

b) $\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}\right) : \frac{4}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} : \frac{4}{x^2-4}$

d) $(x^3 - x) : \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

e) $\left(\frac{1}{x} - 2\right) : \left(\frac{x+1}{x^2}\right) - \left(\frac{3x}{x+1}\right) =$

f) $(x^2 + 2x - 3 + x(x+3)) : \left(\frac{x+3}{(x+4)^2} : \frac{4}{x+4}\right) =$

g) $\left(\frac{x^2+7x+6}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right) : \left(\frac{x^2+6x+5}{x^2-1}\right) =$

h) $\left(\frac{x}{x-3} + \frac{2}{x^2-6x+9}\right) : \left(\frac{x-2}{x-3}\right) =$

EJERCICIOS DE REPASO PARA EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

1- Simplificar

a) $\frac{x^2+9-6x}{x^2-9}$

b) $\frac{12x^2-3}{x^2+\frac{1}{2}x}$

c) $\frac{x^2-x+6}{2x^2-8}$

d) $\frac{-x^2-14x-49}{2x^2+12x-14}$

e) $\frac{2x-2x^2}{x^3-2x^2+x}$

2- Realizar las siguientes operaciones, simplificando los resultados cuando sea posible:

$$a) \frac{-x^2}{x^2+1} + \frac{x^4+1}{x^4-1}$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{x+1}{x^3+x^2} + \frac{x^2+2x+1}{x(x+1)^2}$$

$$c) \frac{x^2-x-6}{x^3+x} : \frac{-x-2}{x^4-1}$$

$$d) \frac{2x+6}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-7} + \frac{x}{x+7} : \frac{x-7}{5}$$

$$e) \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} - \frac{1}{x^2-9}$$

$$f) \left[\frac{2x^2+1}{3x^2} - \frac{2x+1}{4x^2-1} \cdot \frac{(2x-1)^2}{3x} \right] : \frac{x^2+2x+1}{9x^3}$$

$$g) \left(x + \frac{x}{x-1} \right) : \left(x - \frac{x}{x-1} \right)$$

$$h) \frac{x^2-9}{2x+4} \cdot \frac{x+2}{x^2-4x+3} \cdot (x+1)$$

$$i) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x+1}{x^2+x} \cdot \frac{x^4-1}{x^2-1}$$

$$j) \frac{\frac{x^2-4}{x^4-16}}{x^2+4x+4} \cdot (x+2)$$

3- Resuelve las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, simplificando cuando corresponda:

$$a) \frac{x-2}{4} + \frac{3x+2}{6} =$$

$$b) \frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab} =$$

$$c) \frac{a-2b}{15a} + \frac{b-a}{20b} =$$

$$d) \frac{2a-3}{3a} + \frac{3x+2}{10x} + \frac{x-a}{5ax} =$$

$$e) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} =$$

$$f) \frac{m+3}{m-3} + \frac{m+2}{m-2} =$$

$$g) \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} =$$

$$h) \frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n} =$$

$$i) \frac{2a+3}{4a} - \frac{a-2}{8a} =$$

$$j) \frac{4a^2}{5b^3} \cdot \frac{6a}{8b} \cdot \frac{15b^2}{2a^4} =$$

$$k) \frac{5x+25}{14} \cdot \frac{7x+7}{10x+50} =$$

$$l) \frac{m+n}{mn-n^2} \cdot \frac{n^2}{m^2-n^2} =$$

UNIDAD N° 3: Funciones exponenciales y logarítmicas.

FUMNCIÓN EXPONENCIAL

Se denomina función **exponencial** a toda función de la forma:

$$f(x) = k \cdot a^{x-b} + c \quad \text{donde } a > 0; a \neq 1$$

Usando geo gebra, graficar las siguientes funciones exponenciales y extraer conclusiones

✓ **Funciones de la forma $f(x)=a^x$**

Ejemplos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } f(x)=2^x \\ \text{b) } f(x)=3^x \\ \text{c) } f(x)=5^x \end{array} \right\} 0 < a < 1 \dots\dots\dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d) } f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \\ \text{e) } f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x \\ \text{f) } f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x \end{array} \right\} a > 1 \dots\dots\dots$$

✓ **Funciones de la forma $f(x)= k \cdot a^x$** donde $k \in \mathfrak{R} - \{0\}$

Ejemplos:

- a) $f(x)=2^x$ $k=....$
- b) $f(x)=2 \cdot 2^x$ $k=....$
- c) $f(x)=3 \cdot 2^x$ $k=....$
- d) $f(x)=-2^x$ $k=....$
- e) $f(x)=-2 \cdot 2^x$ $k=....$
- f) $f(x)=-3 \cdot 2^x$ $k=....$

k modifica el valor de.....

✓ **Funciones de la forma $f(x)=a^{x-b}$**

Ejemplos:

- a) $f(x)=2^x$ $b=....$
- b) $f(x)=2^{x+1}$ $b=....$
- c) $f(x)=2^{x+3}$ $b=....$
- d) $f(x)=2^{x-1}$ $b=....$
- e) $f(x)=2^{x-3}$ $b=....$

b indica el corrimiento en el eje.....

✓ Funciones de la forma $f(x)=a^x + c$ donde $c \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

a) $f(x)=2^x$ $c=....$

b) $f(x)=2^x + 1$ $c=....$

c) $f(x)=2^x - 1$ $c=....$

d) $f(x)=2^x + 2$ $c=....$

e) $f(x)=2^x - 3$ $c=....$

c indica el corrimiento en el eje.....

Ejercicios:

1) Marcar con una X las funciones que son exponenciales. Justifique.

a) $f(x) = -3^x$

b) $f(x) = (-2)^x$

c) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

d) $f(x) = \frac{1}{5^x}$

e) $f(x) = 1^x$

2) Unir con una flecha cada función con la asíntota horizontal correspondiente.

1) $f(x) = 4^{x+3}$

a) $y=-4$

2) $f(x) = 2^x - 4$

b) $y=-3$

3) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

c) $y=0$

4) $f(x) = -3-2^{x-3}$

d) $y=1$

5) $f(x) = 2^x - 4$

e) $y=4$

6) $f(x) = 5 \cdot 2^x + 4$

f) $y=3$

3) Completen la tabla de valores y grafiquen cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=2^x$

b) $f(x)=2^x + 2$

c) $f(x)=2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

d) $f(x) = -2^x$

e) $f(x) = (-3)^x$

f) $f(x)=2^x - 2$

g) $f(x)=3^{x-2}$

h) $f(x)=-2 \cdot 2^{x-1}$

LOGARITMO

Definición: La logaritmicación es una operación entre dos números reales a y b , llamados base y argumento respectivamente, que se define como:

$$\text{Log}_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \text{ donde } a > 0 ; a \neq 1 \text{ y } b > 0$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8 \quad \text{b) } \log_2 \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4} \quad \text{c) } \log_3 9 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Observación:

Existen dos logaritmos cuya notación es especial: el decimal o de base 10, que se simboliza $\log_{10} b = \log b$ y el logaritmo natural o de base "e" $\cong 2,71$ que se simboliza $\log_e b = \ln b$

Propiedades

- 1) $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- 2) $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$
- 3) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ siendo $x > 0 ; y > 0$
- 4) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ siendo $x > 0 ; y > 0$
- 5) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Observación:

Para calcular logaritmos en los cuales el argumento no es potencia de la base, se debe recurrir a un **cambio de base**, utilizando logaritmos con bases convenientes o logaritmos decimales, los cuales pueden resolverse con la calculadora científica.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \text{por ejemplo } \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

Ejercicios

1) Calcular los logaritmos usando la definición

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $\log_4 64 =$ | |
| b) $\log_2 32 =$ | f) $\log_4 2 =$ |
| c) $\log_3 \frac{1}{3} =$ | g) $\log_{81} 3 =$ |
| d) $\log_5 \frac{1}{25} =$ | h) $\log_{\frac{1}{2}} 128 =$ |
| e) $\log 0,001 =$ | i) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} =$ |

2) Resuelve aplicando propiedades

- a) $\log_2 (8\sqrt{2}) =$
- b) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}} =$
- c) $\log_4 \sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{2}} =$

$$d) \log_{10} \left(\frac{1}{100} \sqrt{0.1} \right)^2 =$$

2) Calcular aplicando propiedades, sabiendo que $\log 2 = 0.3$ y $\log 3 = 0.48$

a) $\log 6 =$

b) $\log 9 =$

c) $\log \frac{1}{8} =$

d) $\log 20 =$

3) Sabiendo que $\log A = 2$, $\log B = 3$ y $\log C = 4$. Calcular

a) $\log(A + B)^2 =$

b) $\log \sqrt{\frac{B}{C^3}} =$

c) $x = \log \left(\frac{B^3}{\sqrt{A}} \cdot C \right) =$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se define **función logarítmica** de base “a”, a la función inversa de la función exponencial de base “a”. Es decir:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \quad \text{siendo } x > 0; a > 0; a \neq 1$$

Usando Geo Gebra, graficar las siguientes funciones determinando el dominio y la asíntota vertical.

a) $y = \log_2 x$

f) $y = \log_2 (x+2)$

b) $y = \log_3 x$

g) $y = \log_2 (x+3)$

c) $y = \log_{1/2} x$

h) $y = \log_2 (x-2)$

d) $y = \log_{1/3} x$

i) $y = \log_2 (x-3)$

e) $y = \ln x$

j) $y = \log_2 x+2$

EJERCICIOS:

1) Une con una flecha cada función con su respectivo dominio

a) $f(x) = \log_3 x + 3$

$D_f = (-1; \infty)$

b) $f(x) = \log_3 (-x + 3)$

$D_f = (3; \infty)$

c) $f(x) = \log_3 (x - 3)$

$D_f = (-\infty; 3)$

d) $f(x) = \ln(3x - 3)$

$D_f = (1/3; \infty)$

e) $f(x) = \log 3x$

$D_f = (1; \infty)$

f) $f(x) = \log(3x + 3)$

$D_f = (0; \infty)$

2) Completen las tablas, hallen el dominio y grafiquen.

a) $f(x) = \log_2 x + 1$

X	y=log ₂ x+1
1/4	
1/2	
1	
2	
4	
8	

b) $f(x) = \log_3(x - 2)$

X	y=log ₃ (x-2)
19/9	
7/3	
3	
5	
11	
29	

Ecuaciones Exponenciales

Una ecuación es exponencial cuando la incógnita de la misma, forma parte de algún exponente. Para resolver una ecuación exponencial se deba aplicar la definición de logaritmo. Por ejemplo:

a) $2^x = 16$

B) $2^x = 15$

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = 27$

a) $2^x + 2^{x+2} = 40$

Para resolver ecuaciones exponenciales más complejas se deben aplicar además las propiedades de la potenciación y logaritmación.

Ejercicios:

1) Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $5^{-x} = 125$

b) $4^x = 1/16$

c) $7^{x-1} = 1$

2) Hallen las raíces de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = 3 \cdot 2^{x+3} - 12$$

$$b) f(x) = -4^{x+1} + 8$$

$$c) f(x) = 3^x + 3^{x+1} - 36$$

3) Resuelva las siguientes ecuaciones.

$$a) 121 \cdot 11^{x-2} = 3 \cdot 11^x - 22$$

$$b) 3 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 3^x = \frac{25}{9}$$

$$c) 7^{-1} \cdot 7^{2-x} - \frac{3}{7^x} = 196$$

$$d) \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 5 \cdot 2^{-x} = -128$$

Ecuaciones Logarítmicas

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita está afectada por la logaritmicación. Para resolver ciertas ecuaciones logarítmicas se debe aplicar la definición de dicha operación. Luego de obtenido los valores, se deben verificar, descartando aquellos que no cumplan con las condiciones de logaritmo.

Ejemplos:

$$a) \log_2(x-1) = 0$$

$$b) \log_4 x + 2 = 3$$

$$c) \log_3(x+4) + \log_3(x-4) = 2$$

$$d) 2\log_2 x^2 - 2\log_2(-x) = 4$$

Observen que en los ejemplos c) y d) se deben aplicar las propiedades de la logaritmicación y verificar si los valores encontrados verifican la ecuación.

Ejercicios:

1) Resuelvan las siguientes ecuaciones logarítmicas

$$a) \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -1$$

$$b) \log_3(x+5) = 0$$

$$c) \log_{\frac{5}{2}}\left(x - \frac{3}{4}\right) = 2$$

2) Resuelvan las siguientes ecuaciones aplicando propiedades cuando sea posible.

$$a) 2\log_2 x^2 - 2\log_2(-x) = 4$$

$$b) 2\log_4(x-1) + \log_4(x-1) = 6$$

$$c) \log x^4 - 2\log x + \log_{\frac{1}{3}} 9 = 0$$

$$d) 3\log_4(x+4) - \log_4(x+4) = 2$$

UNIDAD Nº 4: Funciones trigonométricas y trigonometría

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos". En términos generales, la trigonometría es el estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno; tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.

Sistemas de medición angular

Se utilizan varias unidades para medir los ángulos, la más empleada es la **sexagesimal**, aunque los topógrafos usan la **centesimal** y por los matemáticos el **radian**.

Sexagesimal

Aproximadamente en el año 1000 a.C. los babilonios extienden a los círculos celestes la división del día en 360 partes, y cada una de estas partes le llaman grado sexagesimal y a la cuarta parte le corresponden 90 grados sexagesimales, que se nota por 90° .

Ahora bien como los babilonios utilizan el sistema de numeración de base 60, dividen el grado en 60 partes iguales y a cada una de estas partes la denomina minuto y se nota por 1'. Cada minuto lo subdividen en 60 segundos y cada una de estas subdivisiones lo notó por 1".

Así pues tenemos que un ángulo recto mide 90° , $1^\circ = 60'$ y $1' = 60''$.

Centesimal

La medida de ángulos centesimal se adoptó con el sistema métrico decimal. El ángulo completo 360° en el sistema sexagesimal se divide en 400 partes iguales y un ángulo recto en 100, se notan por 100^g. Y le llama gradian.

A su vez cada grado centesimal (gradian) se divide en 100 partes iguales que son los minutos, se nota por 1^m y cada minuto se subdivide en 100 segundos que lo notaremos por 1^s. Las operaciones son análogas a las sexagesimales pero más fáciles al usar un sistema de base 100.

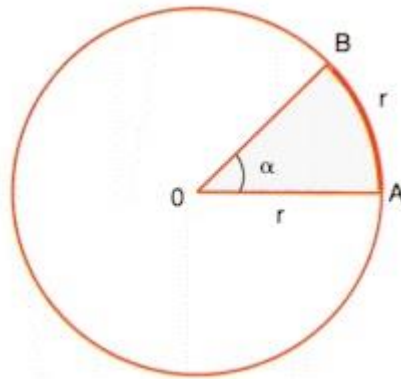
Radianes

Este sistema tiene como unidad de medida el RADIÁN, que es el ángulo que encierra entre sus lados un arco de circunferencia con centro en su vértice, de longitud igual al radio de

la misma. Teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es: $\ell = \pi \cdot 2r$ (donde r es el radio de la circunferencia). La medida de una circunferencia en radianes es:

$360^\circ = 2\pi$ radianes. Por lo tanto esta es la medida de un ángulo de un giro.

Dada una circunferencia de centro O y radio r , se denomina radian al ángulo central cuyo arco coincide con el radio.



Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, la medida en radianes de un ángulo completo será $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Por lo que podemos escribir: $360^\circ = 400^g = 2\pi$

Esta equivalencia nos permite pasar de un sistema de medida a otro.

Equivalencias entre los distintos sistemas

Sistema sexagesimal	Sistema Centesimal	Sistema Circular
90°	100^g	$\pi/2$
180°	200^g	π
360°	400^g	2π

Ejercicios:

1-Expresar en radianes las medidas de los ángulos, si es posible, utilizando fracciones de π

30°

45°

60°

120°

270°

2-Expresar en grados sexagesimal los siguientes ángulos medidos en radianes

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{3}{4}\pi$

4π

$\frac{1}{9}\pi$

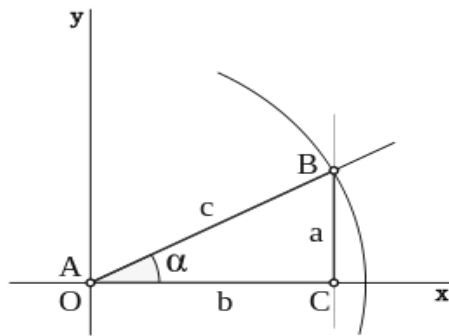
$\frac{7}{2}\pi$

3- ¿Cuántos grados mide, aproximadamente, un ángulo de 1 radian?

4-En un triángulo, dos de los ángulos miden $\frac{\pi}{2}$ radianes y $\frac{\pi}{3}$ radianes. ¿Cuál es la medida sexagesimal del tercer ángulo?

Razones trigonométricas

Sea el triángulo rectángulo ABC y el sector angular α , correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.



El seno del ángulo α (abreviado por $\sin \alpha$) es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

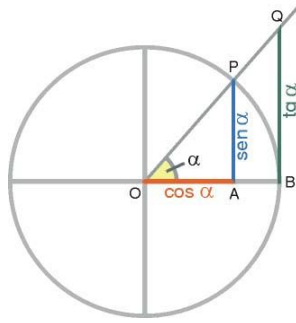
El coseno del ángulo α (abreviado como $\cos \alpha$) es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$$

La tangente del ángulo α (abreviado como $\tan \alpha$ o $tg \alpha$) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente,

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

Si consideramos la circunferencia unitaria, es decir, cuyo radio es 1, las razones anteriores, quedan representadas por los siguientes segmentos:



Razones trigonométricas inversas

Cosecante del ángulo α (abreviado como $csc \alpha$ o $cosec \alpha$) es la razón inversa de seno,

$$cosec \alpha = \frac{1}{sen \alpha} = \frac{c}{a}$$

Secante del ángulo α (abreviado como $sec \alpha$) es la razón inversa de coseno,

$$sec \alpha = \frac{1}{cos \alpha} = \frac{c}{b}$$

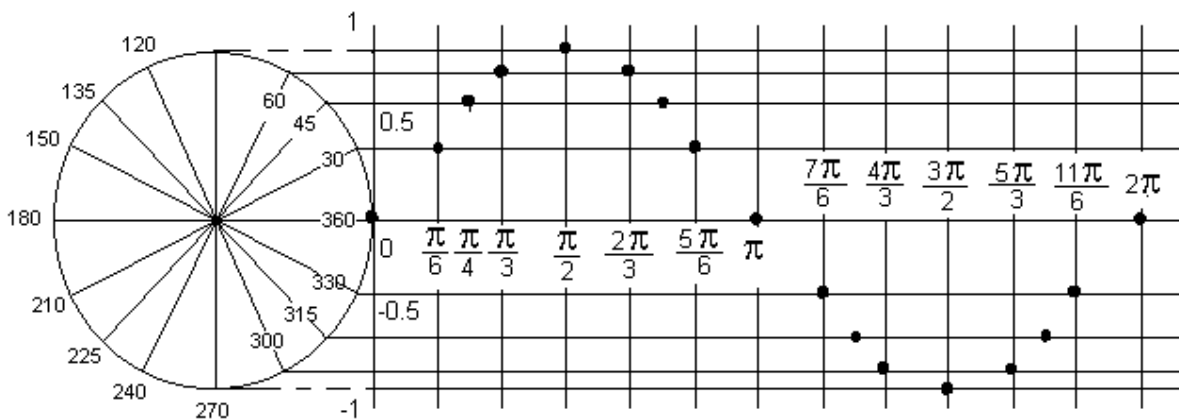
Cotangente del ángulo α (abreviado como $cot \alpha$ o $ctg \alpha$) es la razón inversa de la tangente,

$$cot g \alpha = \frac{1}{tg \alpha} = \frac{b}{a}$$

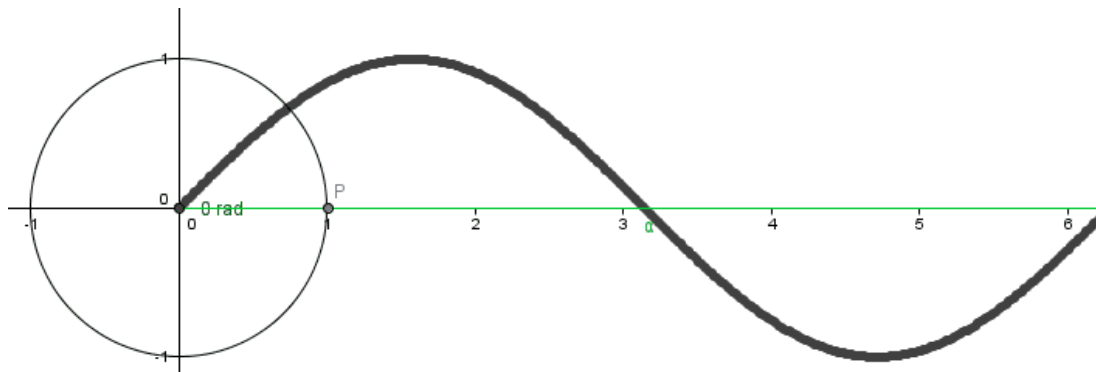
Función seno, coseno y tangente

Función seno

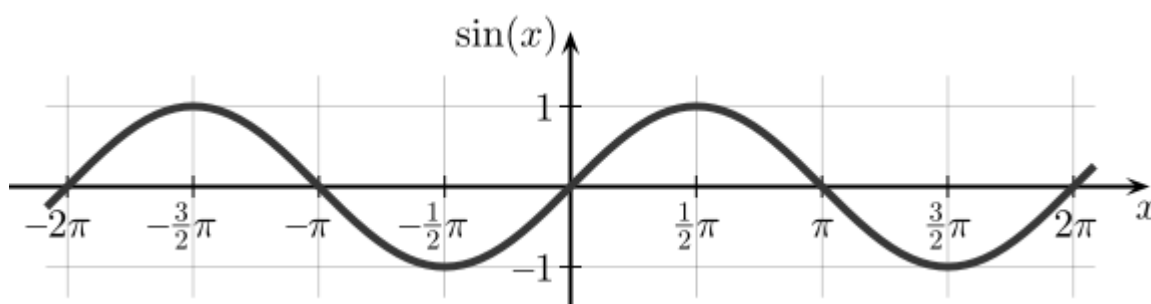
La función seno (como vimos, la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa) tiene por dominio el conjunto de los números reales (IR), al realizar la tabla para graficar, se obtiene los siguientes puntos:



Al unir los puntos queda el gráfico de la función seno



Si se dan valores mayores de 2π o menores que 0, se obtiene:



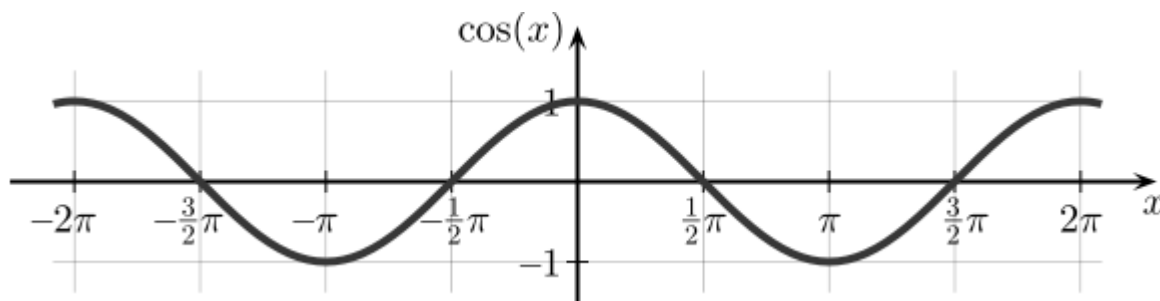
Se puede ver que la función seno es periódica de periodo 2π

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + k2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Además la imagen es $[-1,1]$

Función coseno

La función coseno tiene por dominio el conjunto de los números reales (\mathbb{R}) al realizar la tabla, para graficar, se obtiene:



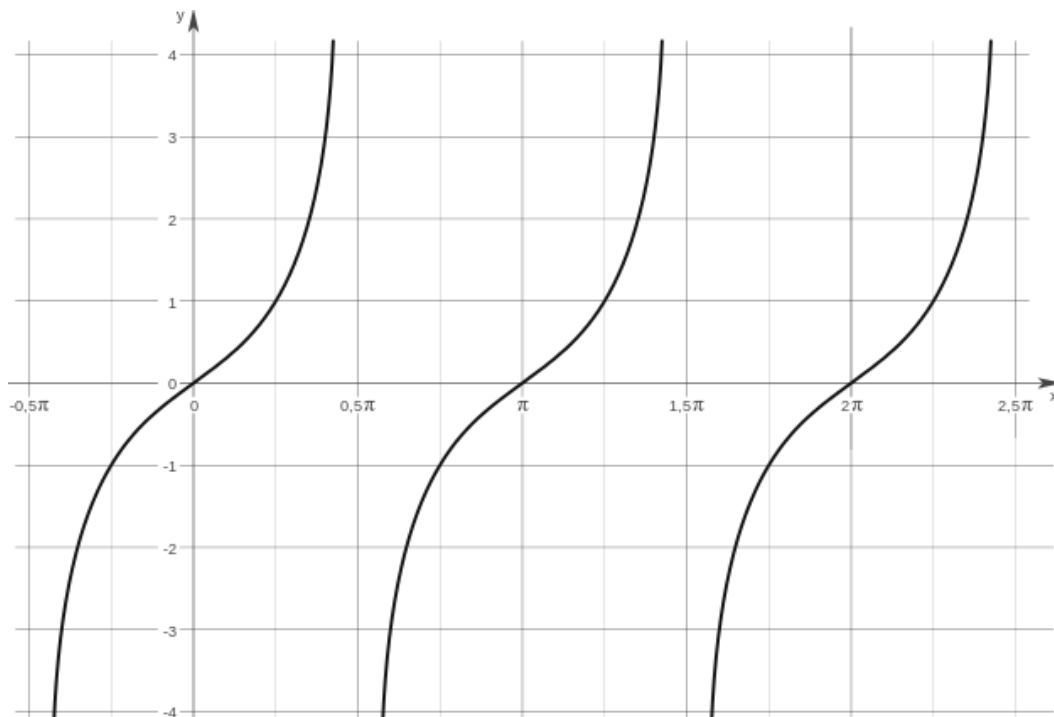
Se puede ver que la función coseno es periódica de periodo 2π

$$\text{cos } \alpha = \text{cos } (\alpha + k2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Además la imagen es $[-1,1]$

Función tangente

La función tangente tiene por dominio el conjunto de los números reales distintos a los múltiplos de $\pi : 2$. Al realizar la tabla, para graficar, se obtiene:



La función tangente es periódica de periodo π y la imagen es \mathbb{R}

Ejercicios: hacer un dibujo de cada situación y usando las relaciones trigonométricas, resolver:

1-Hallar la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 m se ve la parte superior de la antena bajo un ángulo de 30°

2- Un tronco de 6,2 m está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de 55°

a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?

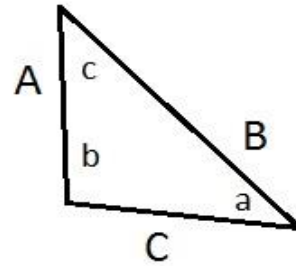
b) Calcula la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

Para resolver todo tipo de triángulo, es decir además de los rectángulos, los acutángulos y los obtusángulos se necesitan de dos herramientas importantes:

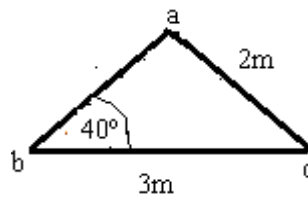
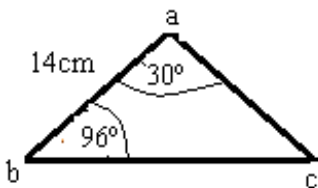
Teorema del seno

En todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

$$\frac{C}{\text{sen}\hat{c}} = \frac{A}{\text{sen}\hat{a}} = \frac{B}{\text{sen}\hat{b}}$$



Ejercicio Hallar los datos desconocidos en los siguientes triángulos



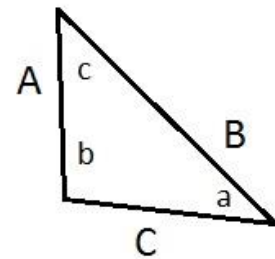
Teorema del coseno

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman, con símbolos:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2.B.C.\text{cos}\hat{a}$$

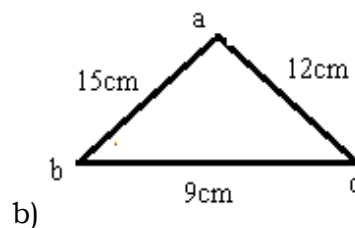
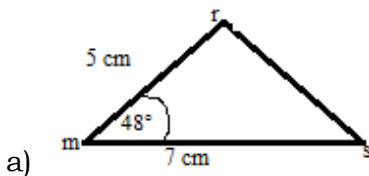
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2.A.B.\text{cos}\hat{c}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2.A.C.\text{cos}\hat{b}$$

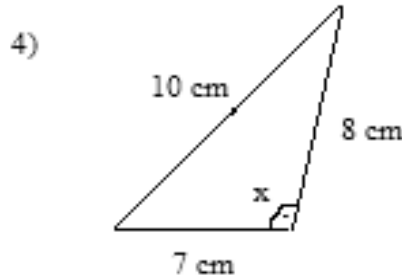
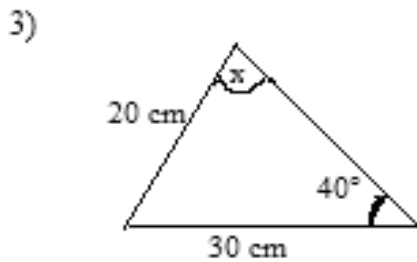
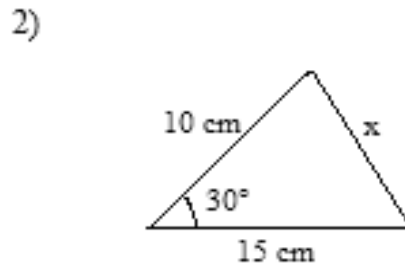
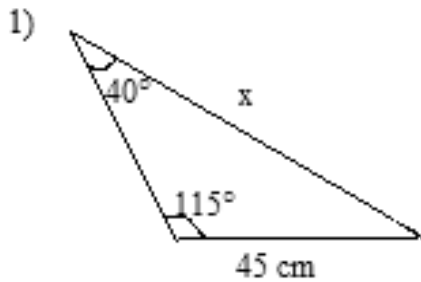


Ejercicios

1- Hallar los datos desconocidos en los siguientes triángulos



2- Encontrar x en cada caso



Trabajo Práctico:

1. En los siguientes ejercicios: a , b , y c son las medidas de los lados de un triángulo, mientras que α , β , y γ son las medidas de los ángulos opuestos a esos lados, respectivamente. Realizar un dibujo y resolver el triángulo en cada caso:

- | | | |
|-------------------------|--------------------|------------------------|
| a) $A = 10\text{ cm}$. | $a = 38^\circ$ | $b = 35^\circ$ |
| b) $A = 7\text{ m}$. | $B = 6\text{ m}$. | $C = 4\text{ m}$. |
| c) $C = 10\text{ cm}$. | $c = 40^\circ$ | $b = 70^\circ$ |
| d) $A = 12\text{ cm}$. | $B = 16\text{ cm}$ | $c = 43^\circ$ |
| e) $a = 53^\circ$ | $b = 75^\circ$ | $C = 30,5\text{ cm}$. |
| f) $c = 48^\circ$ | $a = 68^\circ$ | $C = 47,2\text{ mm}$. |

2. Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 36° y tienen longitudes de 3 y 8 cm . Determinar la longitud de la diagonal menor.

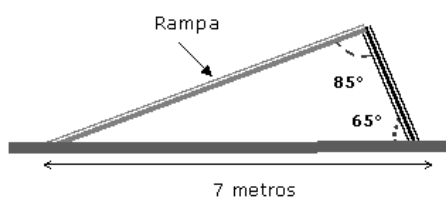
3. Dos trenes parten simultáneamente de una estación en dirección tal que forman un ángulo de 35° . Uno va a 15 km/hr y el otro a 25 km/hr . Determinar a qué distancia se encuentran separados después de dos horas de viaje.

4. Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto (ubicado en la otra margen del río) determina un ángulo de elevación de 17° . Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35° ¿Cuál es la altura del mismo?



5. En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60m, 75m y 50m. ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?

6. Un arquitecto necesita construir una rampa como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuánto mide la rampa?



7. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Carlos hay 25 metros, y entre Carlos y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20° . Calcular la distancia entre Alberto y Camilo.

8. Un alambrado cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60° en el ángulo que forman entre ambos. Calcular cuánto mide el perímetro del alambrado.

9. Un tobogán para niños tiene una longitud de 3 m y un ángulo de elevación de 35° con respecto al piso, la escalera para subir tiene una longitud de 1,80m. ¿Que ángulo de elevación con respecto al piso tiene la escalera?

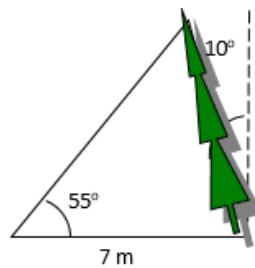
10. Dos autos parten de una estación y siguen por carreteras distintas que forman entre si un ángulo de 80° . Si las velocidades son 60 km/h y 100 km/h, ¿qué distancia los separa después de una hora y media de recorrido?

11. Una persona se encuentra en la ventana de su apartamento que está situada a 8 metros del suelo y observa el edificio de enfrente de la siguiente manera: la parte superior, con un ángulo de elevación de 35° y la parte inferior, con un ángulo de depresión de 43° . Determina la altura del edificio de enfrente.

12. Una persona sostiene dos cometas que están volando. A una de las cometas le ha soltado 1000m de sogas y a la otra 800m. Si el ángulo que forman ambas sogas es aproximadamente de 30° , ¿A qué distancia esta una cometa de la otra?

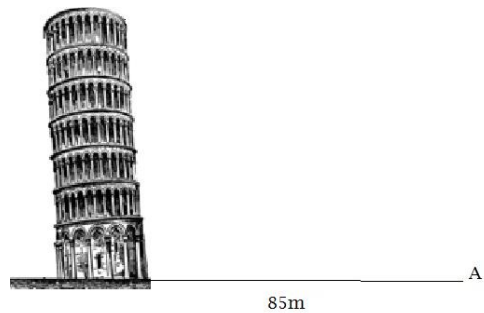
13. Hallar el ángulo entre las direcciones de dos aeroplanos que parten del mismo punto y que al cabo de tres horas se encuentran a una distancia de 520 km, si sus velocidades son de 380km/h y 420 km/, respectivamente.

14. Una tormenta de viento inclino un pino como se muestra en el dibujo. ¿A qué distancia mínima tiene que estar ubicado el auto para no correr riesgos de que el pino caiga encima de él?



15. La Torre de Pisa, fue construida para que permaneciera en posición vertical, pero comenzó a inclinarse apenas fue construida en agosto de 1.173.

La altura de la torre, desde su base, es de 55,83 m. Si una persona desde el punto A, observa la parte superior de la torre con un ángulo de elevación de 32° , ¿Cuántos grados se inclinó la torre?



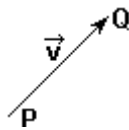
Unidad N° 5: Vectores

Definición: Un vector es un segmento orientado en el espacio. Se caracteriza por tener:

- Una dirección, definida por la recta sobre la que se apoya el segmento.
- Un sentido, definido por una flecha en el extremo del vector.
- Una magnitud o módulo, definido por la longitud del segmento.

Un vector no tiene una ubicación definida; puede trasladarse a cualquier lugar del plano sin modificar ni su módulo, ni su orientación (dirección y sentido). Por esta razón se dice que los vectores son **libres**.

Los vectores se expresan con una letra minúscula o con dos letras mayúsculas, su origen y su extremo respectivos. Por ejemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ indica el vector que tiene origen en el punto **P** y extremo en el punto **Q**.

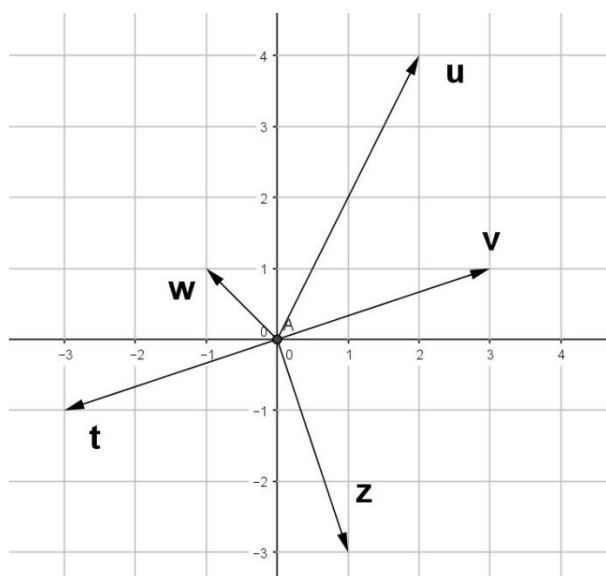


Siempre que sea posible, pondremos una flecha encima para indicar que se trata de un vector.

Los vectores sirven para representar magnitudes geométricas y físicas que tienen módulo, dirección y sentido, como traslaciones, velocidades y fuerzas.

Como lo que caracteriza a un vector es su módulo, su dirección y su sentido, dos vectores son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Dado un sistema de coordenadas, los vectores se pueden representar usando dichas coordenadas:



$$u=(2,4)$$

$$v=(3,1)$$

$$w=(-1,1)$$

SUMA DE DOS VECTORES

a) Si los vectores están dados por componentes

Para sumar dos vectores se realizará la suma componente a componente, por ejemplo, si queremos sumar los vectores \vec{u} y \vec{v} dados anteriormente, resulta

$$\vec{u} + \vec{v} = (2,4) + (3,1) = (2+3,4+1) = (5,5)$$

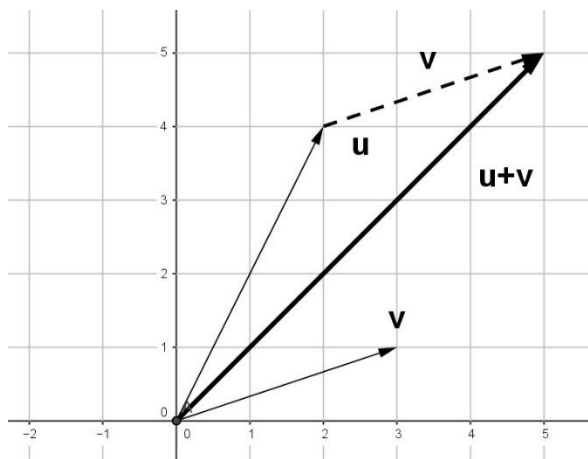
b) Si los vectores \vec{u} y \vec{v} es están dados en forma gráfica, la suma también se realiza gráficamente:

1) ponemos \vec{v} a continuación de \vec{u} , haciendo coincidir el origen de \vec{v} con el extremo de \vec{u}

2) el origen de la suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el origen de \vec{u}

3) el extremo de la suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el extremo de \vec{v}

Es decir, $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector que va desde el origen de \vec{u} hasta el extremo de \vec{v} cuando hemos puesto \vec{v} a continuación de \vec{u} .



Vemos que las coordenadas del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ son (5,5).

Si sumamos un vector con su opuesto obtenemos un vector reducido a un punto (su origen y extremo coinciden); se trata del **vector nulo** o **vector cero** que se expresa $\vec{0}$:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$$

Ejercicios: Realizar las siguientes sumas de vectores $\vec{u} + \vec{v}$ de forma numérica, comprobar el resultado gráficamente:

a) $\vec{v} = (1, 2)$, $\vec{u} = (1, -2)$

b) $\vec{v} = (-1, -2)$, $\vec{u} = (1, 2)$

c) $\vec{v} = (-2, -1)$, $\vec{u} = (-1, 3)$

d) $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{u} = (-2, 1)$

Definición: Se denomina *opuesto de un vector* a un vector con el mismo módulo, misma dirección, pero sentido opuesto. Las coordenadas del vector opuesto son las mismas del vector pero con los signos cambiados.

Resta de vectores:

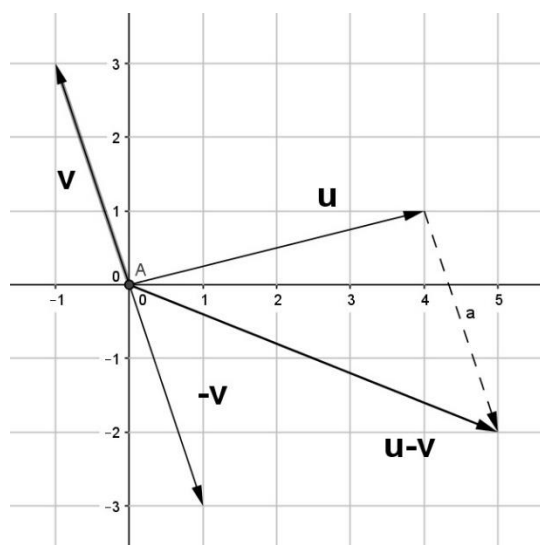
Para restar los vectores \vec{u} y \vec{v} hay que sumar a \vec{u} el opuesto del vector \vec{v} , es decir

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Sean $\vec{u} = (4,1)$ y $\vec{v} = (-1,3)$. Para realizar $\vec{u} - \vec{v}$ teniendo en cuenta sus coordenadas, lo primero es encontrar el opuesto de \vec{v}

$-\vec{v} = -(-1,3) = (1,-3)$ y luego $\vec{u} - \vec{v} = (4,1) + (1,-3) = (5,-2)$

Gráficamente, encontramos primero $-\vec{v}$ y luego hacemos $\vec{u} + (-\vec{v})$

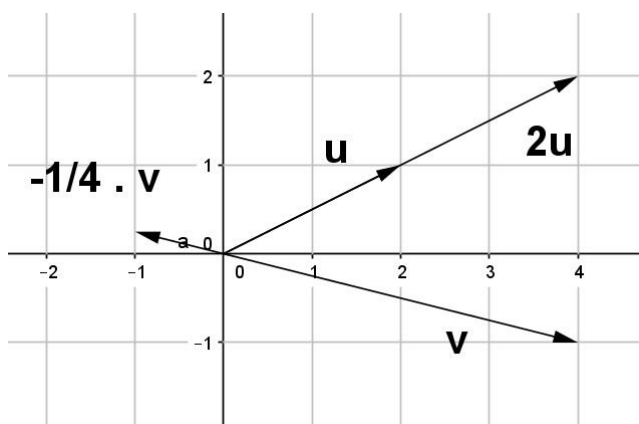


Producto de un vector por un escalar.

El resultado de multiplicar un vector por un número (escalar) es igual al resultado de multiplicar cada una de las coordenadas del vector por el escalar.

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot (2, 3) = (3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = (6, 9).$$

Gráficamente representa “alargar”, el vector \vec{v} , hasta obtener un vector 3 veces más largo. En el caso de multiplicar por un número negativo, gráficamente representa cambiar el sentido al vector y ‘alargarlo’. Si se multiplica al vector por un número entre 0 y 1, lo que se hace es acortar el vector.



Realizar las siguientes operaciones de vectores de forma numérica, comprobar el resultado gráficamente:

$$\vec{v} = (1, 2), \quad \vec{u} = (2, -1), \quad w = (3, -2)$$

1. $\vec{v} - \vec{u} + w$
2. $\vec{v} + \vec{u} - 2.w$
3. $\vec{v} - 3.\vec{u} - 2.w$

Producto escalar de vectores.

Se denomina producto escalar de vectores al número que se obtiene de multiplicar dos vectores componente a componente y sumar los resultados:

$$\vec{v} = (2, 3) \text{ y } \vec{u} = (1, -2) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = (2, 3) \cdot (1, -2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 2 + (-6) = -4$$

Módulo de un vector.

El módulo se representa poniendo al vector entre dos líneas verticales $|\vec{v}|$.

Para calcular el módulo de un vector hay que calcular la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Gráficamente representa la longitud del vector.

$$\text{Por ejemplo: } |\vec{v}| = \sqrt{(2,3) \cdot (2,3)} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Relación entre el producto escalar y el ángulo que forman dos vectores.

La siguiente expresión relaciona el producto escalar con el ángulo α que forman los vectores entre sí:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cos(\alpha)$$

Ejercicio:

Calcular el ángulo entre los siguientes vectores:

a) $\vec{v} = (1, 0)$, $\vec{u} = (0, -2)$

b) $\vec{v} = (1, 0)$, $\vec{u} = (2, 2)$

c) $\vec{v} = (-2, 0)$, $\vec{u} = (3, 3)$

d) $\vec{v} = (2, 1)$, $\vec{u} = (-4, -2)$

En general, si una matriz A tiene m filas y n columnas, diremos que su tamaño o dimensión es m x n (se lee “m por n”), siempre en primer lugar el n° de filas y en segundo lugar el de columnas.

Tipos de matrices

1. Se llama **matriz nula** a la que tiene todos los elementos cero.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de tamaño 2x5.

2. Se llama **matriz fila** a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1 x n. Por ejemplo, $A = (1 \ 0 \ -4 \ 9)$ es una matriz fila de tamaño 1 x 4.

3. Se llama **matriz columna** a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión

será m x 1, como por ejemplo: $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ es una matriz columna de tamaño 3 x 1.

4. Una matriz es **matriz cuadrada** cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2 x 2 o simplemente de orden 2.

Dentro de las matrices cuadradas llamaremos diagonal principal a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$, siendo la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5. Si una matriz tiene ceros en todos sus valores excepto en los de la diagonal, se denomina **matriz unidad o identidad**. Se suelen representar por I_n , donde n es el orden o tamaño de la matriz. Algunas matrices identidad son:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma y diferencia

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices del mismo tamaño, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

$$\text{Por ejemplo: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad \qquad 2 \times 3 \qquad \qquad 2 \times 3$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices:

- a) Conmutativa: $A + B = B + A$
- b) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.
- d) Elemento opuesto de A: La matriz $-A$, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } -A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Producto por un número real

Dada una matriz cualquiera A y un número real k, el producto $k \cdot A$ se realiza multiplicando todos los elementos de A por k, resultando otra matriz de igual tamaño. (Evidentemente la misma regla sirve para dividir una matriz por un número real). Ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- a) Distributiva respecto de la suma de matrices: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- b) Distributiva respecto de la suma de números: $(k + d) \cdot A = k \cdot A + d \cdot A$
- c) Asociativa: $k \cdot (d \cdot A) = (k \cdot d) \cdot A$
- d) Elemento neutro, el número 1: $1 \cdot A = A$

Producto de matrices

Hay que dejar claro ya desde el principio que no todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición: “Para multiplicar dos matrices A y B, en este orden, $A \cdot B$, es condición indispensable que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B” Si no se cumple esta condición, el producto $A \cdot B$ no puede realizarse, de modo que esta es una condición que debemos comprobar previamente a la propia multiplicación. Una vez comprobado que el producto $A \cdot B$ se puede realizar, si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$ (observemos que el n° de columnas de A = n = n° de filas de B), entonces el producto $A \cdot B$ da como resultado una matriz C de tamaño $m \times p$ del siguiente modo:

“El elemento que se encuentra en la fila i y la columna j de la matriz $C = A \cdot B$, se obtiene multiplicando los elementos de la fila i de A por la columna j de B y sumando los resultados”. Veámoslo mediante un ejemplo:

Para multiplicar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2×3 3×3

primero comprobamos que se puede realizar el producto $A \cdot B$, pues el n° de columnas de A es 3 y el n° de filas de B también es 3, y el resultado, según lo dicho sería una matriz de tamaño 2×3 , tiene 2 filas y 3 columnas.

$$A \times B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

El elemento de la fila 1 y columna 1 de A·B (proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A por la columna 1 de B y sumar, es decir:

$$a_{11} = (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = -9 + 0 + 0 = -9$$

El elemento de la fila 1 y columna 2 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 2 de B y sumar:

$$a_{12} = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -3 + 2 + 2 = 1$$

El elemento de la fila 1 y columna 3 de A·B proviene de multiplicar elemento a elemento la fila 1 de A y la columna 3 de B y sumar:

$$a_{13} = (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 3 + 4 + (-2) = 5$$

Así sucesivamente se obtienen (comprueba):

$$A \times B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 5 \\ 5 & 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinantes

Introduciremos a continuación el concepto de determinante asociado a una matriz cuadrada.

Definición: Si es una matriz 2 x 2 se define el determinante de la matriz A, y se expresa como $\det(A)$ o bien $|A|$, como el número:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Ejemplos: El cálculo de los determinantes de orden 2 es bien sencillo, por ejemplo:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = -10 + 6 = -4$$

Para definir determinantes de matrices de orden mayor que 2 es necesario introducir previamente algunos conceptos. Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el *menor complementario* de un elemento de A, a_{ij} , como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento a_{ij} . Se representa por M_{ij}

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, los menores complementarios de cada uno de los

elementos de la primera fila son:

$$\text{Menor complementario de } -2: M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 0 = 14.$$

$$\text{Menor complementario de } 4: M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 9 = 21.$$

$$\text{Menor complementario de } 5: M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21.$$

Y así sucesivamente.

Estrechamente ligado al concepto de menor complementario se encuentra el de adjunto de una matriz. Dada una matriz cuadrada A de orden n, definimos el adjunto de un elemento a_{ij} de A como el número: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ es decir, no es más que el menor complementario correspondiente acompañado de un signo más o menos dependiendo de la fila y la columna en la que se encuentre el elemento en cuestión.

Por ejemplo, para la matriz anterior, los adjuntos de los elementos de la primera fila son:

Adjunto de -2: $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 14 = 14$ (coincide con el menor complementario)

Adjunto de 4: $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 21 = -21$ (menor complementario con signo cambiado)

Adjunto de 5: $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot -21 = -21$ (coincide con el menor complementario).

Ejercicio: Obtener los restantes adjuntos de los elementos de la matriz A. En general puede saberse si el signo del menor complementario y del adjunto coinciden o no utilizando una sencilla regla gráfica, por ejemplo, para matrices

3 x 3 y 4 x 4 basta fijarse en las matrices:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

donde el + significa que el adjunto coincide con el menor complementario y el - indica que tienen signo contrario.

Una vez vistos estos conceptos se puede definir:

Definición: Dada una matriz cuadrada A de tamaño n se define su determinante como la suma del producto de los elementos de una línea cualquiera de la matriz (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos.

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, aplicando la definición, si elegimos la fila tercera

queda:

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(-6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) =$$

$$-141 + 0 - 76 = -217$$

Si hubiésemos elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 2, quedaría:

$$\det(A) = 4 \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) + 0 \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-12 + 9) + 7 \cdot (-4 - 15) + 0 \cdot (-(-6 - 30)) =$$

$$-84 - 133 + 0 = -217$$

Ejercicio:

Calcula, desarrollando por la fila que tú elijas (para facilitar cálculos, se debe elegir la fila que contenga mayor cantidad de ceros) los determinantes de las matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$