Unidad Nº 3 : Geometría

Breve Reseña:

En el antiguo Egipto y Babilonia, la geometría surgió como ciencia práctica relacionada con la agricultura.

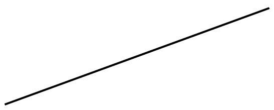
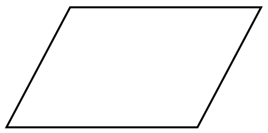
Fue en Grecia, sin embargo, donde se convirtió en una ciencia abstracta, alcanzando su máximo esplendor en la escuela de Platón. Se destacaron Thales de Mileto(639-545 AC) , uno de los 7 sabios de Grecia; Pitágoras(580-446AC)famoso el teorema que lleva hoy su nombre y Euclides, autor del libro “Elementos de la geometría” escrito alrededor de 3000 años antes de Cristo. Aunque Euclides desarrolló con atención la geometría plana o de dos dimensiones, otros matemáticos griegos desarrollaron la geometría especial o de tres dimensiones.

Si bien la geometría en sus inicios aparece para solucionar problemas concretos, de medición de tierra, construcción de viviendas, diseños urbanos, etc., nos permite apreciar infinidad de formas que se encuentran en el mundo que nos rodea.

En efecto, la geometría se encuentra en todas partes y el hombre la observa, la aprende, la admira y la comprende en todo el universo.

En el espacio que nos rodea descubrimos un lenguaje geométrico ilimitado a través del cual podemos representarlo.

<u>Representación del punto, recta y plano</u>

punto	.
recta	
plano	

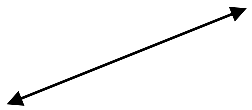
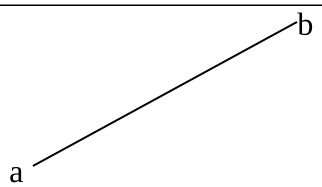
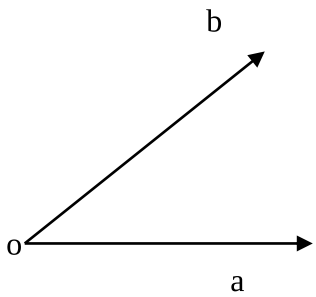
El estudio de la geometría se inicia estableciendo ciertas relaciones que se consideran verdaderas propiedades tan claras y evidentes que no necesitan ser demostradas. Estas proposiciones se llaman axiomas.

Ejemplos:

1. Existen infinitos puntos , infinitas rectas , e infinitos planos
2. Por un punto pasan infinitas rectas.
3. Por una recta pasan infinitos planos .
4. Dos puntos determinan una recta a la cual pertenecen.
5. Dos puntos que pertenecen a un plano determinan una recta incluida en el plano y lo divide en dos semiplanos

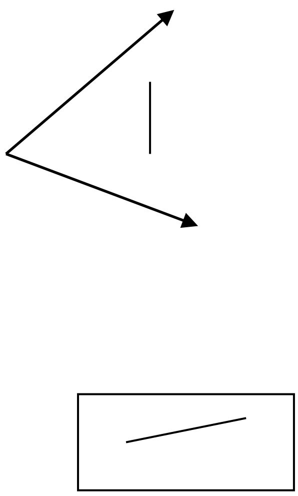
Otras propiedades y relaciones deben ser demostradas. Estas proposiciones se llaman teoremas.

Semirrecta segmento, ángulo

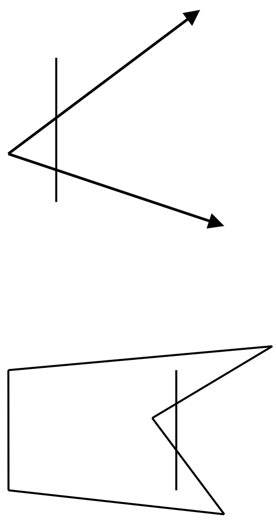
Semirrecta		El punto o divide a la recta en dos semirrectas ob: semirrecta de origen o que pasa por b. oa : semirrecta de origen o que pasa por a
Segmento		Los puntos comunes a la semirrectas ab y ba determinan el segmento ab
Ángulo		O : vértice del boa ob y oa lados del boa

Figuras cóncavas y convexas

Convexas



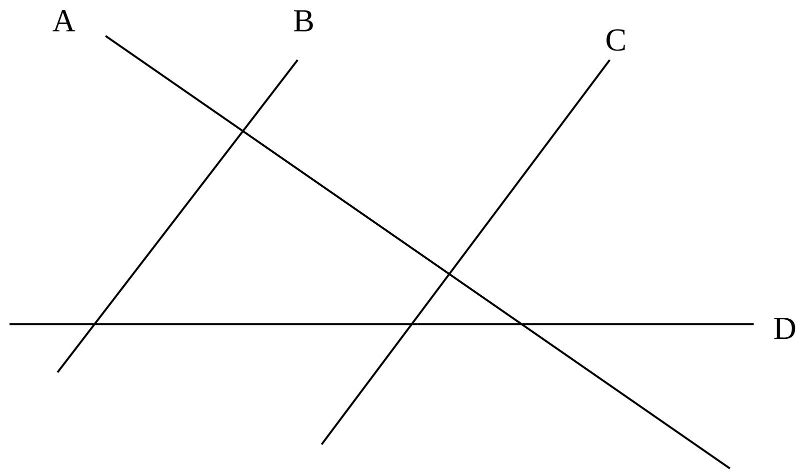
Cóncavas

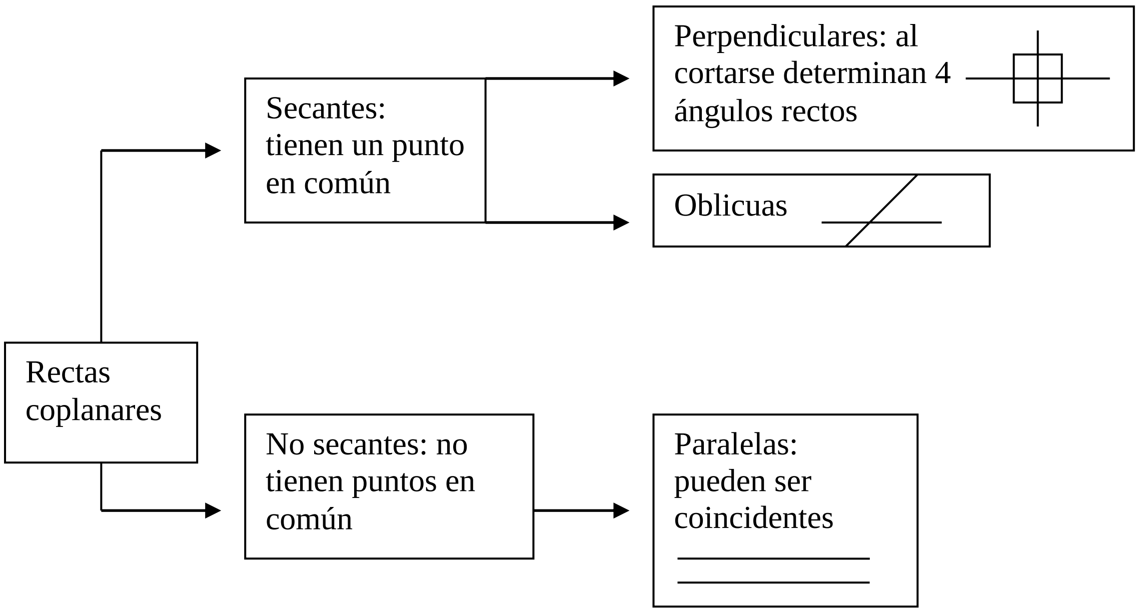


Una figura es convexa si todo segmento determinado por 2 puntos cualesquiera que pertenezcan a la figura queda dentro de la misma. De lo contrario es cóncava

Posiciones de las rectas en el plano

Las rectas A B C y D son coplanares porque están incluidas en un mismo plano, en caso contrario son no coplanares o alabeadas





Completar con paralelas // , perpendicular $\perp$ y oblicua ∕ .

a) B …….. C d) C ………… D

b) A ……... B e) B ………….. D

c) A ……… C f) D ………….. A

ACTIVIDADES

1) Grafiquen rectas paralelas y perpendiculares (el/la profesor/a les indicará los pasos a seguir en cada caso)

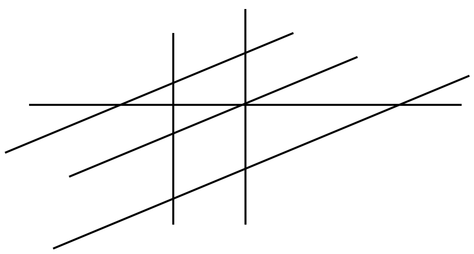
2) Grafiquen la siguiente situación y completen la tabla:

M // N ; N $\angle$ P ; P $\perp$ Q ; Q // R

	M	N	P	Q	R
M					
N					
P					
Q					
R					

3) Completen con la relación que corresponda:

a)



a) $\left.\begin{matrix} A \perp C \\ B \perp C \end{matrix}\right\} \rightarrow A........B$

b) $\left.\begin{matrix} A \angle D \\ D // E \end{matrix}\right\} \rightarrow A........E$

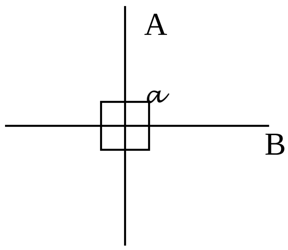
c) $\left.\begin{matrix} D // E \\ E // F \end{matrix}\right\} \rightarrow D........F$

d) $\left.\begin{matrix} A // B \\ B \perp C \end{matrix}\right\} \rightarrow A.......C$

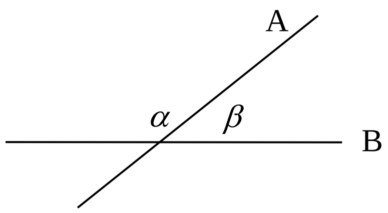
4) Completen la tabla y grafiquen según los datos dados:

	A	B	C	D
A		$\perp$		
B				
C		//		$\angle$
D				

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS CONVEXOS

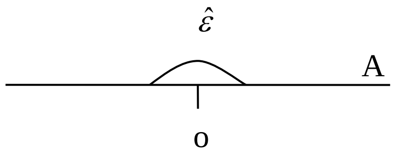


$$A \perp B \rightarrow \hat{\alpha} = 1\,\mathrm{Re}\,cto$$
$$\hat{\alpha} = 90^{\circ}$$



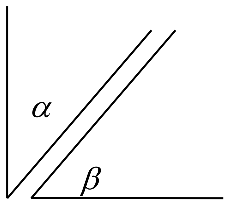
$$A \angle B \rightarrow \alpha \rangle 1\,\mathrm{Re}\,cto$$
$$\hat{\alpha} : obtuso$$

$$A \angle B \rightarrow \beta \langle 1\,\mathrm{Re}\,cto$$
$$\hat{\beta} : agudo$$



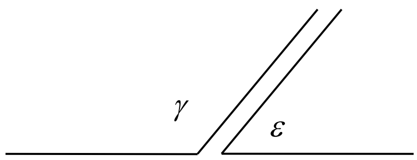
$$\hat{\varepsilon} = 2\,\mathrm{Re}\,ctos$$
$$\hat{\varepsilon} : llano$$

Ángulos complementarios



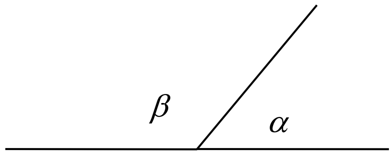
$$\alpha + \beta = 1 recto$$

Ángulos suplementarios



$$\gamma + \varepsilon = 2 rectos$$

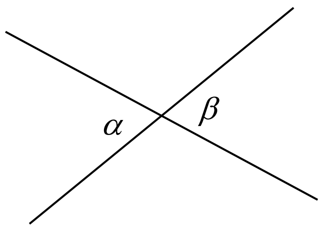
Ángulos adyacentes



$$\alpha + \beta = 180^{\circ}$$

Los ángulos adyacentes son los que tienen un lado en común y los otros dos son semirrectas opuestas.
Los ángulos adyacentes son complementarios.

Ángulos opuestos por el vértice



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son opuestos por el vértice.
Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

UNIDADES SEXAGECIMALES

El origen del sistema sexagesimal de numeración es el que agrupa de 60 en 60.
Unidades de amplitud: 1º(grado) = 60´ y 1´ = 60”
Para medir ángulos usamos el sistema sexagesimal, cuyo grado se obtiene dividiendo un círculo completo en 360. De allí que un giro completo = 360º.

Adición	Sustracción	Multiplicación	División
25º 33´ 42´´ + 38º 45´ 53´´ 63º 78´ 95´´ 1´← 60´´ 79´ 35´´ 1º 60´ 64º 19´ $\boxed{\textbf{64º 19´ 35´´}}$	74 ↗ 71 ~~14~~ ~~72º~~ ~~15´~~ 60´´ 13º 48´ 36´´ 58º 26´ 24´´ $\boxed{\textbf{58º 26´ 24´´}}$	38º 25´ 32´´ x 3 114º 75´ 96´´ 1´ -60´´ 114º 76´ 36´´ 1º -60´ 115º 16´ 36´´ $\boxed{\textbf{115º 16´ 36´´}}$	106º 51´ 5´´ | 5 06º + 21º 22´13´´ 1º→ 60´ 111´ + 11´ 1´→60´´ 65´´ 15 0 $\boxed{\textbf{21º 22´13´´}}$

Ejercitación básica

1) Calcule:

a) 25º 23´ + 34º 25´ 18” =	b) 22º 33´ 35” – 14º 40´ 12” =

c) 125º 42´18” + 35º 30´ 24” – 12º 20´40”	d) 90º - 24º 31´ 16´´=
e) 24º 25´ 12´´ x 2 =	f) 43º 31´ 12´´ : 3 =
g) 71° 22´ 12” + 65° 58´ 48” =	h) 121° 52´ 20” - 59° 59´ 24” =
i) 90° 52´ 12” + 60° 28´ 22” =	j) 164° 30´ 20” - 59° 29´ 24” =

2) Cada uno de los siguientes ángulos ha sido dividido en partes iguales, <u>completen las siguientes oraciones:</u>

a) la quinta parte de 48º 15´ 10´´ es: ………………………

b) la mitad de 165º es: ………………

c) la tercera parte de 39º 25´ 21´´ es: ……………………

d) la sexta parte de 642º es ……………………..

3) Halle la amplitud de un ángulo sabiendo que:

a) es el doble de un ángulo recto.

b) es 1 llano menos 36º

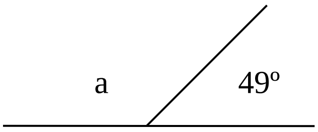
c) es el doble de 25º más un llano

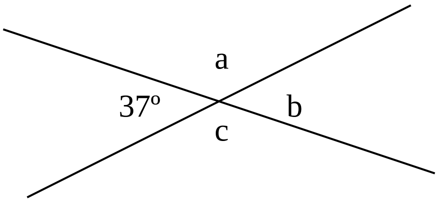
d) es la mitad de 122º menos el doble de 30º.

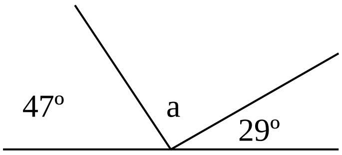
e) es igual a su complemento.

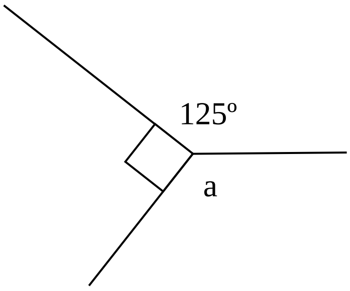
f) es el doble de su complemento.

4) Calcule la amplitud de los ángulos indicados







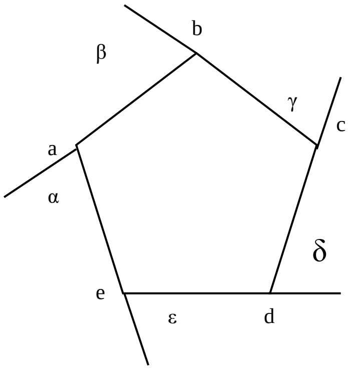


5) Completen la tabla

a	Complementario de a	Suplementario de a	Opuesto por el vértice con a
42º			
	15º 5´		
		112º 28´	
			35º 20´

<u>Polígonos Convexos</u>

Un polígono es una figura cuyos lados son segmentos



Elementos del Polígono:
Vértices: a,b,c,d,e

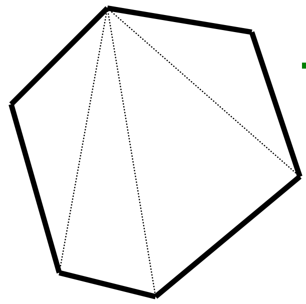
Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ y $\overline{ea}$
Ángulos interiores : $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}$.
Los ángulos exteriores son los adyacentes de los interiores.: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\chi}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon}$

Cantidad de lados	Nombre

3	triángulo
4	cuadrilátero
5	Pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

Suma de los ángulos interiores (SAI)

Teoría:



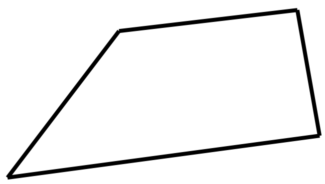
Un polígono se divide en n-2 triángulos. La suma de sus ángulos interiores es igual a la suma de los ángulos interiores de los n-2 triángulos. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, entonces:

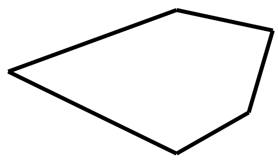
Suma de ángulos interiores es igual a **180º . (n-2)**

La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es siempre 360º.

Ejercitación

1) Medir los ángulos interiores y exteriores de los siguientes polígonos y verificar las propiedades.





2) Calcule la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos:

HEXÁGONO:

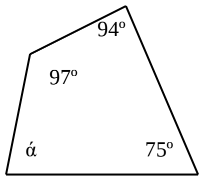
UNDECÁGONO:

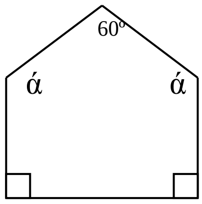
OCTÓGONO:

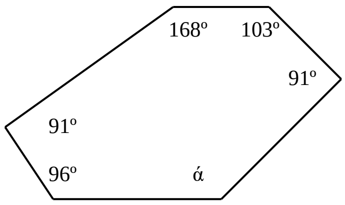
PENTADECÁGONO:

ENEAGONO:

3) Calcular la amplitud del ángulo ά







TRIÁNGULOS: construcciones y suma de ángulos interiores.

Según sus lados:

- Escaleno: tres lados distintos
- Isósceles: dos lados de igual longitud.
- Equilátero: tres lados de igual longitud.

Según sus ángulos:

- Acutángulo: sus tres ángulos agudos.
- Rectángulo: un ángulo recto.
- Obtusángulo: un ángulo obtuso.

Construcción:

- Dados los 3 lados
- Dados 2 lados y el ángulo comprendido

Ejercitación:

1- Dibuja cada triángulo con regla y compás. Luego clasifícalos según sus lados y según sus ángulos.

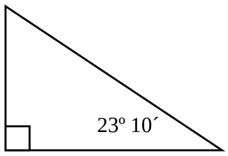
a) con 3 lados de 3,5 cm.
b) Con un lado de 8 cm y con otros dos lados de 5 cm.
c) Con un lado de 4,5 cm y sus dos lados adyacentes de 55º.

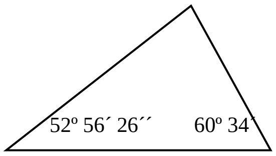
PROPIEDADES de los triángulos

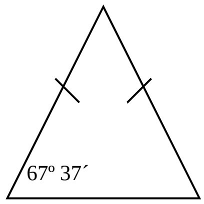
- La suma de los ángulos interiores es 180º.
- Cada lado es menor que la suma de los otros dos.
- El ángulo mayor se opone al lado mayor.
- Los ángulos opuestos a los lados de igual longitud tienen la misma amplitud.

Ejercitación:

2- Sin usar transportador, calcula en cada caso, la amplitud de los ángulos x. Luego clasifica los triángulos según sus ángulos.

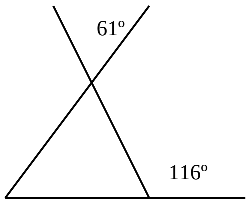


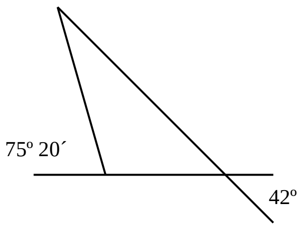




Las dos rayitas indican lados de igual longitud

3- Calcula las amplitudes de los ángulos interiores de cada triángulo sin usar transportador.





¿Podés construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes indicadas?

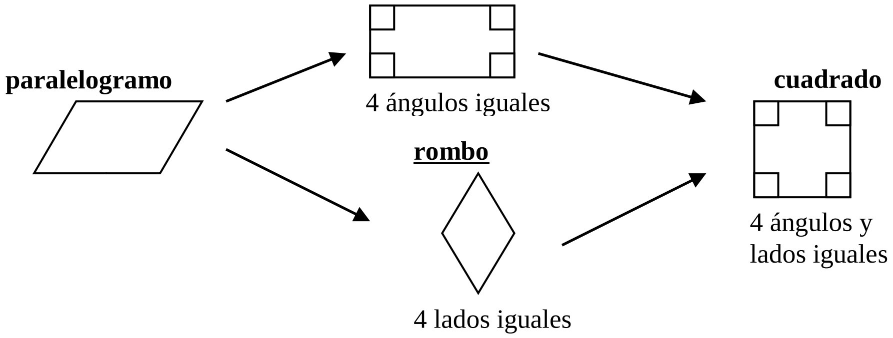
a) 3cm, 3cm, 7cm
b) 6cm, 5cm, 4cm

4- ¿Podés dibujar un triángulo que tenga dos ángulos rectos? ¿Por qué?
b) ¿Qué clase de ángulos tiene un triángulo rectángulo?
c) Un triángulo que tiene sus tres ángulos iguales, ¿cómo son sus ángulos? ¿cuánto miden cada uno?

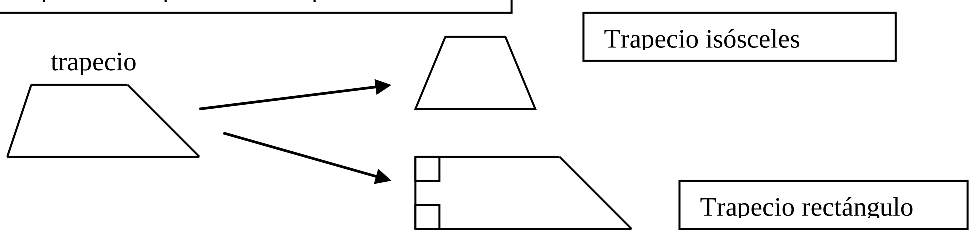
Clasificación de Cuadriláteros

Paralelogramos: dos pares de lados opuestos

rectángulo

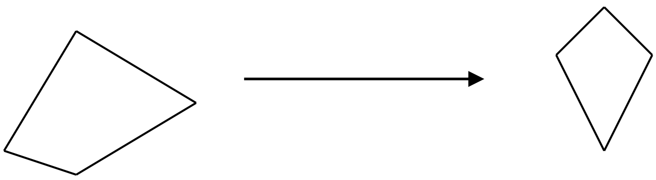


Trapecios : un par de lados opuestos



Trapezoides : ningún par de lados opuestos paralelos

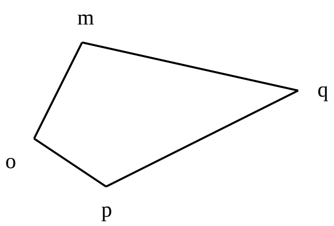
trapezoide



Romboide: dos pares de lados consecutivos iguales

Ejercitación

1) Escribir los datos pedidos de la siguiente figura



a) Lados opuestos

b)Ángulos opuestos

c)Lados consecutivos

2) Completar las siguientes frases

- Un paralelogramo que tiene sus lados iguales es un ………………
- Un trapecio que tiene dos ángulos rectos es un……………
- Los lados paralelos de un trapecio se llaman………………..
- Un rectángulo que tiene sus lados iguales se llama……………
- Un trapecio que tiene sus lados no paralelos iguales se llama………………..

UNIDADES DE LONGITUD

Teoría:

La unidad de longitud es el metro (m).
Los **submúltiplos** de la unidad se obtienen dividiéndola sucesivamente por 10.

$$1dm = \frac{1m}{10} \rightarrow 1dm = 0{,}1m \qquad 1cm = \frac{1m}{100} \rightarrow 1cm = 0{,}01m \qquad 1mm = \frac{1m}{1000} \rightarrow 1mm = 0{,}001m$$

Los **múltiplos** de la unidad se obtienen multiplicándola sucesivamente por 10.

En resumen:

mam – km – hm – dam – m – dm – cm - mm

El *perímetro* de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

1) Unir las mismas unidades

5 cm .	. 500 m
5mm .	. 0,05 m
5 dm .	. 5000 m
0,05 km .	. 0,5 m
0,05 hm .	. 50 m
50 dam .	. 5 m
	. 0,005 m

2) Plantea y resuelve:

a) Si una tira de papel de 0,9 dam se corta en partes iguales de 360 mm cada una, ¿cuántas partes se cortan?

b) Si una persona de pasos de 45 cm, ¿cuántos pasos debe dar para recorren una distancia de 0,162 km?

c) Un cuadrado de 8 dm de lado tiene igual perímetro que un rectángulo cuya base mide 1m. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

d) Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un pentágono regular cuyo lado mide 27 mm. ¿Cuál es la longitud de cada lado del triángulo?

e) Un cuadrado se corta en 9 cuadraditos iguales de 72 cm de perímetro cada uno. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

UNIDADES DE SUPERFICIE

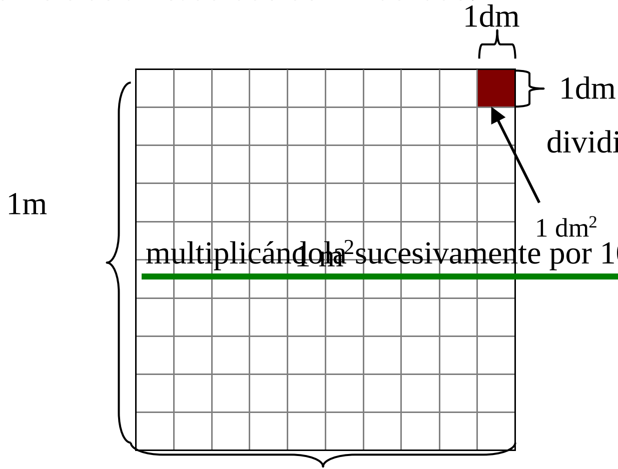
Teoría:

La unidad de superficie es 1 m^2, que es la superficie de un cuadrado de 1m de lado.

$$1m^2 = 100dm^2$$

Los **submúltiplos** de la unidad se obtienen dividiéndola sucesivamente por 100.

Los **múltiplos** de la unidad se obtienen multiplicándola sucesivamente por 100.



En resumen:

Km^2 – hm^2 – dam^2 – m^2 – dm^2 – cm^2 - mm^2

0,000001 - 0,0001 - 0,01 - 1 - 100 - 10000 - 1000000

1m

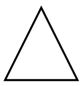
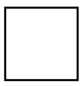
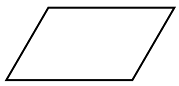
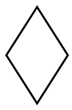
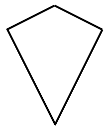
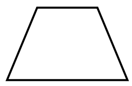
Colocar las unidades que correspondan en cada caso.

a) 0,25 dm^2 = 0,0025 $\square$ c) 3 hm^2 = 30000 $\square$ e) 1,7 m^2 = 17000 $\square$

b) 600 $\square$ = 0,0006 m^2 d) 95 $\square$ = 0,0095 km^2 f) 0,00002 $\square$ = 2000 cm^2

SUPERFICIE DE ALGUNOS POLÍGONOS

Teoría:

Triángulo	Cuadrado	Rectángulo	Paralelogramo	Rombo	Romboide	Trapecio
						
$\frac{B.H}{2}$	L^2	$B.H$	$B.H$	$\frac{D_1.D_2}{2}$	$\frac{D_1.D_2}{2}$	$\frac{(B_1+B_2).H}{2}$

Problemas:

Un rectángulo tiene 24 cm de largo y 18 cm de altura.

a) Calcular su perímetro.

b) Calcular su superficie.

Dar las dimensiones de otro rectángulo que tenga:

a) Igual perímetro pero distinta superficie.

b) Igual superficie pero distinto perímetro.

Plantear y resolver:

a) La superficie de un cuadrado es de 100 cm2. Si el rectángulo de 15 cm de base tiene igual perímetro que el cuadrado, ¿cuál es la superficie del rectángulo?

b) En un terreno rectangular de 120 m de largo y 80 m de ancho se construyen dos calles paralelas a los lados y perpendiculares entre sí, de 10 m de ancho, que se cruzan en el centro del terreno. ¿Qué superficie del terreno ocupan las calles?

c) En un campo de 2,8 km de largo y 1500 m de ancho, cada ha se vende a $20000. ¿Cuál es el valor del campo?

d) Para una habitación de 3,6 m de largo y 4,5 m de ancho se compran cerámicas cuadradas de 30 cm de lado. Si cada caja de 20 cerámicas cuesta $50, ¿cuánto se gastará en comprar las cerámicas para el piso de la habitación?

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

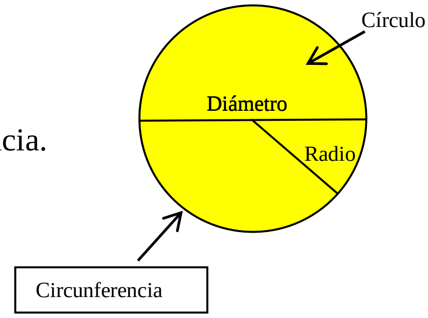
Teoría:

Una **circunferencia** son los puntos del plano que están en la misma distancia (radio) de un ponto fijo (centro).
El ***radio*** (r) es la mitad del ***diámetro*** (d), que es la mayor de las cuerdas de una circunferencia.

Longitud de la circunferencia: $2.\pi.r = \pi.d$

Un **círculo** es la figura delimitada por una circunferencia.

Superficie del círculo: $\pi.r^2 = \dfrac{\pi.d^2}{4}$



Plantear y resolver:

a) Una rueda tiene un diámetro de 50 cm. ¿Cuántos kilómetros recorre si da 5000 vueltas?

b) De un cartón cuadrado de 84 cm de lado se corta el mayor círculo posible. ¿Qué superficie sobra de cartón?

c) Si de un círculo de cartón de 6 cm de diámetro se recorta el mayor rombo posible. ¿Cuál es la superficie de cartón sobrante?

Repasemos

Ejercicio 1: Responde:

a) ¿Qué se utiliza para medir?

b) Escribe un ejemplo de una medida e indica sus partes.

c) ¿Cuál es la unidad de longitud?

d) ¿Qué es una figura plana?

e) ¿Qué es el perímetro?

f) ¿Cuál es la unidad de superficie?

g) ¿Cuáles son las unidades agrarias mas utilizadas?
Escribe las equivalencias con las unidades de superficie.

h) ¿Qué es el área?

Ejercicio 2: Completa con la unidad de medida que corresponda:

Propiedad a medir	Unidad de medida
Ancho de una hoja de cuaderno	
El área de la ciudad de San Juan	
La superficie total del patio de tu casa	
Largo de la cocina de tu casa	
La superficie del teclado de la computadora	

Ejercicio 3: Transforma a la unidad indicada:

a) 23,5 m a mm

b) 54 dam a km

c) 0,7654 hm a dm

d) 8954,6 cm a dam

e) 67543 mm a m

f) 0,00234 dam^2 a cm^2

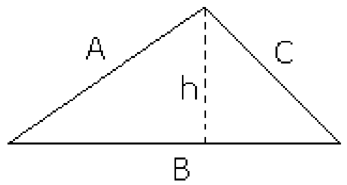
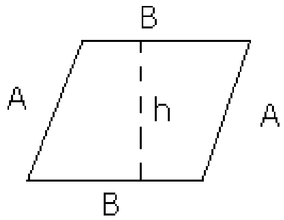
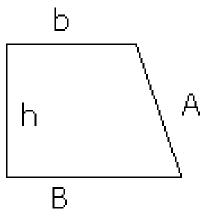
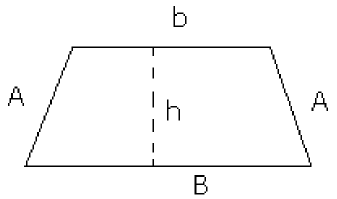
g) 15489 mm^2 a dm^2

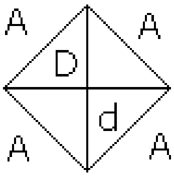
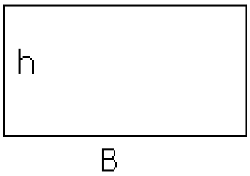
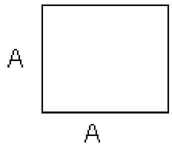
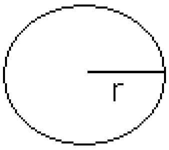
h) 534,65 m^2 a hm^2

i) 256 hm^2 a dam^2

j) 12005 dam^2 a km^2

FÓRMULAS DE PERÍMETROS Y AREAS DE FIGURAS PLANAS

Nombre de la figura	Figura	Perímetro	Área
Triángulo		**P = A + B + C**	$A = \frac{B.h}{2}$
Paralelogramo		**P = 2. A + 2. B**	**A = B. h**
Trapecio (rectángulo)		**P = h + b + A + B**	$A = \frac{(b+B).h}{2}$
Trapecio (isósceles)		**P = 2. A + b + B**	

Rombo		**P = 4. A**	$A = \frac{d.D}{2}$
Rectángulo		**P = 2. h + 2. B**	**A = B. h**
Cuadrado		**P = 4. A**	$A = A^2$
Círculo		**P = 2.** π **. r**	**A =** $\pi . r^2$

Importante: **h**: altura
r: radio $\pi = 3{,}14$

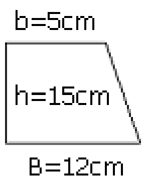
Problemas geométricos

Ejemplo: En un trapecio rectángulo, sus bases miden 5cm y 12 cm. Si la altura mide 15 cm.
¿Cuál es el área?

Antes de comenzar **debes mirar** si:
todos los datos están en la misma unidad.
Si no lo están debes llevarlos a la misma unidad.

1º) Determino datos e incógnitas

Dibujo la figura del problema y escribo en ella los datos y las incógnitas.



A=?

2º) Determino la ecuación con laque vamos a trabajar

Esta ecuación depende de los datos y la incógnita, vamos a trabajar con el área del trapecio

Escribo la fórmula del área $A = \frac{(b + B).h}{2}$

Reemplazo los datos en la fórmula

$$A = \frac{(5cm + 12cm).15cm}{2}$$

3º) Resuelvo la ecuación

$$A = \frac{(17cm).15cm}{2}$$

$$A = \frac{255cm^2}{2}$$

$$\boxed{A = 127{,}5cm^2} \longrightarrow \text{Solución}$$

4º) Verificamos

$$A = \frac{(5 + 12).15}{2}$$

$$127{,}5 = \frac{(5 + 12).15}{2}$$

$$127{,}5 = \frac{(17).15}{2}$$

$$127{,}5 = \frac{255}{2}$$

$$127{,}5 = 127{,}5$$

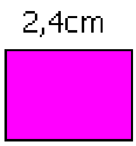
4º) Respondemos: El área del trapecio rectángulo es **$127{,}5cm^2$**

Ejercicio 4: Resuelve paso a paso:

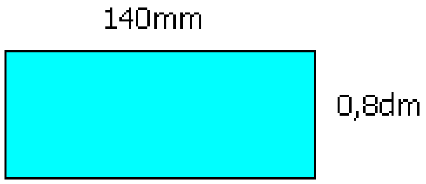
- **a)** Si el lado de un cuadrado mide 5,6 dm. Calcula el perímetro y el área.
- **b)** El área de un rectángulo es 12,75 m^2. Si la base es 5m. ¿cuánto mide la altura?
- **c)** Si el área de un rombo mide 270 m^2. Y una de sus diagonales mide 150 dm ¿Cuánto mide la otra diagonal?
- **d)** Si el radio del círculo mide 5m. Calcula el perímetro y el área.
- **e)** En un triángulo isósceles el perímetro es 11,2m y el lado desigual mide 470 cm. ¿Cuánto miden los otros dos lados?
- **f)** ¿Cuál es el radio de un círculo de 12,56 dm^2 de área?

<u>Ejercicio 5</u>: Observa las siguientes figuras, calcula el perímetro y el área:

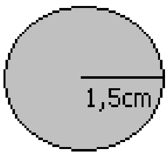
a)



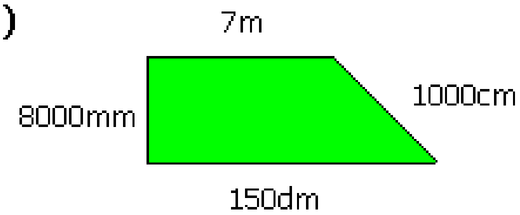
b)



c)



d)



Para resolver los siguientes ejercicios **debes:**

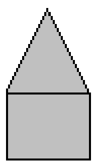
* **<u>observar</u>** muy bien los **<u>gráficos</u>**,

* **<u>ver</u>** las **<u>figuras</u>** implicadas y

* **<u>analizar</u>** los **<u>datos</u>** dados.

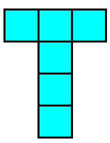
<u>Ejercicio 5</u>: En la figura siguiente, el triángulo es equilátero, y mide 12,4 cm de lado.

Calcula el perímetro de toda la figura.

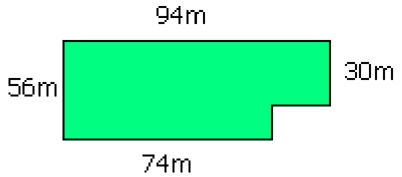


<u>Ejercicio 6</u>: Esta letra está formada por cuadrados iguales de un metro de perímetro.

Calcula el perímetro de la letra T.



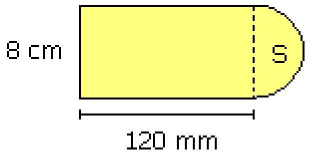
Ejercicio 7: Este es el terreno de la quinta del tío de Maxi:



a) ¿Cuál es el perímetro?
b) ¿Cuál es el área?

Ejercicio 8: Calcula el área de la superficie sombreada sabiendo que:

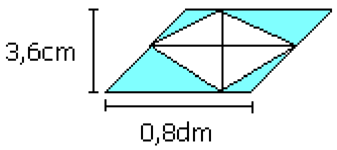
a) La figura S es la mitad de un círculo



b)

- Los lados del rectángulo grande miden 12cm y 10 cm.
- Los cuadraditos son iguales (del mismo tamaño).
- $\overline{PQ} = 9cm$

c) La figura blanca es un rombo



d) La figura grande es un trapecio isósceles.

h = 3,5dm