Colegio San Bernardo
Prof. Sergio Baigorria – E-mail: actividadesBaigorria@gmail.com
2° año bachiller adultos
Turno tarde

Matemática

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Aprender a aprender	Reconocimiento de necesidades personales de aprendizaje. Reconocimiento de los errores como parte del proceso.	Par ordenado. Relación. Función. Dominio. Imagen. Gráfica de una función.

Criterios de evaluación
• Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y ordenada los ejercicios.

Relaciones y funciones

Conjuntos

Un conjunto es una agrupación de personas, animales o cosas considerados como un todo homogéneo, como un grupo, sin distinguir sus partes.

En Matemática, un **conjunto** se define como una colección de elementos con características similares.
Los elementos de un conjunto, pueden ser personas, números, colores, letras, figuras, etc. Se dice que un **elemento** (o miembro) pertenece al conjunto si está incluido de algún modo dentro de él.
Un par de ejemplos:
El conjunto de mis amigos: Juan, Pedro, Luis y Carlos.
El conjunto de clubes de fútbol de los que mis amigos podrían ser hinchas: Boca, River, San Martín y Desamparados.

Un conjunto se considera como un objeto en sí mismo y se le da como nombre una letra imprenta mayúscula (generalmente es la letra inicial de la característica que los agrupa; por ejemplo: A para el conjunto de mis amigos y F para el conjunto de los clubes de fútbol).

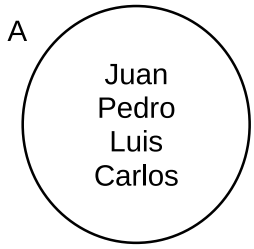
Cómo anotar un conjunto

Estos conjuntos pueden representarse mediante las siguientes notaciones:

Diagramas de Venn:
Se escriben juntos todos los elementos del conjunto, se los encierra y se coloca el nombre del conjunto muy cerca de la curva que encierra.

Por ejemplo:

El conjunto de mis amigos al que llamaremos A:



El conjunto F formado por los clubes de fútbol de los que podrían ser hinchas:

Por extensión:

Se escribe el nombre del conjunto, que es una letra imprenta mayúscula, el signo "igual que" =, y, entre llaves { }, todos los elementos del conjunto separados por puntos y comas ;. Por ejemplo:

El conjunto de mis amigos al que llamaremos A:

$$A = \{Juan;\ Pedro; Luis; Carlos\}$$

El conjunto F formado por los clubes de fútbol de los que podrían ser hinchas:

$$F = \{Boca;\ River;\ San\ Martín; Desamparados\}$$

Por comprensión:

Se escribe el nombre del conjunto (que es una letra imprenta mayúscula), el signo "igual que" =, y, entre llaves { }, "x/x" (que se lee "x tal que x"), y una descripción de qué características distinguen a sus elementos. Por ejemplo:

El conjunto de mis amigos al que llamaremos A:

$$A = \{x/x\ sea\ uno\ de\ mis\ amigos\}$$

El conjunto F formado por los clubes de fútbol de los que podrían ser hinchas:

$$F = \{x/x\ sea\ un\ club\ de\ fútbol\ del\ que\ podrían\ ser\ hinchas\ mis\ amigos\}$$

Ejercicio 1

Dado el conjunto por comprensión S formado por los días de la semana:

$$S = \{x/x\ sea\ un\ día\ de\ la\ semana\}$$

Se pide:

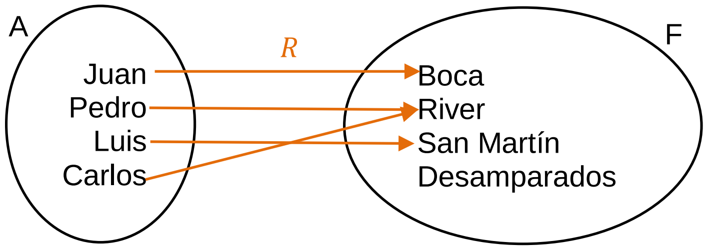
a) Hacer el diagrama de Venn del conjunto S.

b) Escribir por extensión al conjunto S.

Relación

En Matemática, es común relacionar elementos de conjuntos distintos y después hacer análisis de dicha relación.

Por ejemplo, si ya tengo al conjunto A formado por mis amigos y al conjunto F formado por clubes de fútbol, podría relacionar a cada uno de mis amigos con el club de fútbol del cual son hinchas. En un diagrama de Venn, dibujo ambos conjuntos, uno al lado del otro y, con una flecha establezco la relación "…es hincha del club…". Llamaré con la letra R a esta relación entre amigos y clubes:



Observa que el diagrama de Venn muestra que Juan es hincha de Boca, Pedro y Carlos son hinchas de River, y Luis es hincha de San Martín.

Las líneas en realidad son flechas, tienen una dirección, ya que la relación es "$\ldots es\ hincha\ del\ club \ldots$":

$$Juan\ “es\ hincha\ del\ club”\ Boca$$

No podría ser

$$\cancel{Boca\ “es\ hincha\ del\ club”\ Juan}$$

pues no tendría sentido.

Así quedó representada la relación R mediante un diagrama de Venn. ¿Y cómo lo anoto por extensión? Necesitamos aprender qué es un par ordenado:

Par ordenado

Un **par ordenado** son dos elementos dados en un cierto orden.

Se anota

$$(a; b)$$

Donde a es el primer componente y b es el segundo componente.

Como ambos elementos tienen un orden determinado, no es lo mismo $(a; b)$ que $(b; a)$. O sea:

$$(a; b) \neq (b; a)$$

Ahora sí, representemos la relación R con notación por extensión:

Primero, defino, por extensión, a los conjuntos que voy a relacionar:

$A = \{Juan;\ Pedro; Luis; Carlos\}$

$F = \{Boca;\ River;\ San\ Martín; Desamparados\}$

La relación R "$\ldots es\ hincha\ del\ club \ldots$" se anota por extensión mediante pares ordenados en los que el primer componente es uno de mis amigos y el segundo componente es un club de fútbol del cual es hincha:

$$R = \{(Juan; Boca); (Pedro; River); (Luis; San\ Martín); (Carlos; River)\}$$

Estos pares ordenados muestran que Juan es hincha de Boca, Pedro y Carlos son hinchas de River, y Luis es hincha de San Martín.

Los pares ordenados tienen un orden ya que la relación es "$\ldots es\ hincha\ del\ club \ldots$". Por ejemplo, el par ordenado $(Juan;\ Boca)$ representa que $Juan\ “es\ hincha\ del\ club”\ Boca$.

No podría ser $(Boca;\ Juan)$ pues habría representado que $Boca\ “es\ hincha\ del\ club”\ Juan$ y eso no tiene sentido. Obviamente, los elementos de los pares ordenados deben respetar su orden:

$$(Juan; Boca) \neq (Boca; Juan)$$

Producto cartesiano

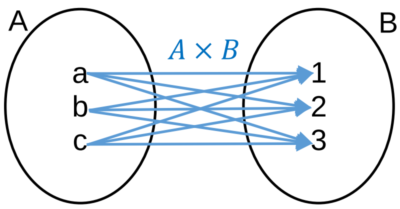
El **producto cartesiano** $A \times B$ de dos conjuntos A y B es una operación que da como resultado a otro conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse de manera que:

- el primer elemento del par ordenado pertenezca al primer conjunto A y
- el segundo elemento pertenezca al segundo conjunto B.

Por ejemplo, por extensión:

$$A = \{a; b; c\}$$
$$B = \{1; 2; 3\}$$
$$A \times B = \{(a;1)\,;(a;2)\,;(a;3)\,;(b;1)\,;(b;2)\,;(b;3)\,;(c;1)\,;(c;2)\,;(c;3)\}$$

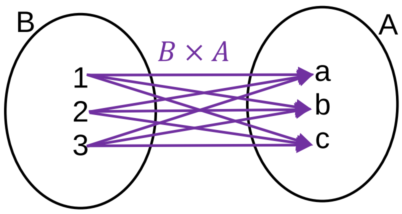
En un diagrama de Venn:



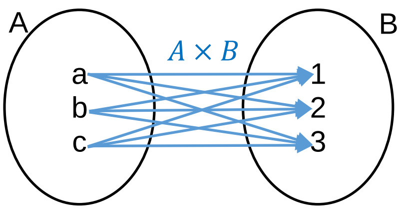
Observa el producto cartesiano $B \times A$:

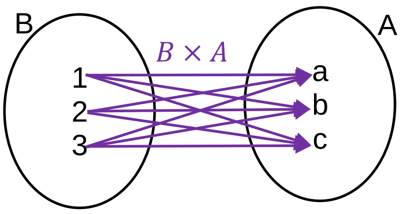
$$B \times A = \{(1;a)\,;(1;b)\,;(1;c)\,;(2;a)\,;(2;b)\,;(2;c)\,;(3;a)\,;(3;b)\,;(3;c)\}$$

En un diagrama de Venn:



Si comparas $A \times B$ con $B \times A$ en los diagramas de Venn:





Y por extensión:

$$A \times B = \{(a;1)\,;(a;2)\,;(a;3)\,;(b;1)\,;(b;2)\,;(b;3)\,;(c;1)\,;(c;2)\,;(c;3)\}$$
$$B \times A = \{(1;a)\,;(1;b)\,;(1;c)\,;(2;a)\,;(2;b)\,;(2;c)\,;(3;a)\,;(3;b)\,;(3;c)\}$$

Puedes ver que:

$$A \times B \neq B \times A$$

Ejercicio 2

Dados los conjuntos:

$$M = \{x; y; z\}$$
$$P = \{2; 3; 5\}$$

Obtener y expresar por diagrama de Venn y por extensión a los productos cartesianos:

$$M \times P =$$

y

$$P \times M =$$

Ejes cartesianos y representación de puntos en el plano

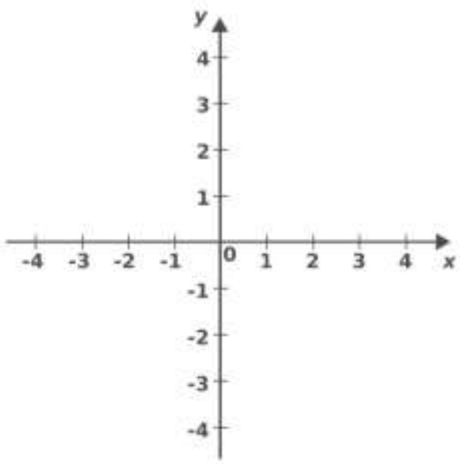
Los **ejes cartesianos** son un par de rectas perpendiculares que nos permiten identificar los distintos puntos del plano. Identificaremos un punto P cualquiera mediante un par de números a y b, y escribiremos $P=(a;b)$.

Ya estudiamos que a $(a; b)$ se lo llama par ordenado, primer componente a a y segundo componente a b.

Esta imagen de la derecha es una representación gráfica de unos ejes cartesianos.
Observamos que tenemos dos rectas reales que se cruzan en el punto 0 de ambas.
Los distintos ejes tienen nombres propios:

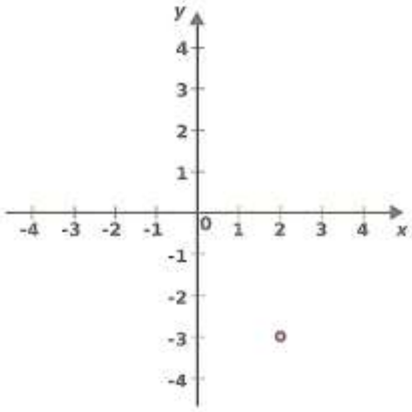
- El eje horizontal es el **eje de abscisas**.
- El eje vertical es el **eje de ordenadas**.

El punto donde se cortan los dos ejes se llama **origen** (a veces sencillamente O), y tiene por coordenadas $O=(0;0)$.
Una vez vista la notación habitual, ya estamos en condiciones de localizar puntos.

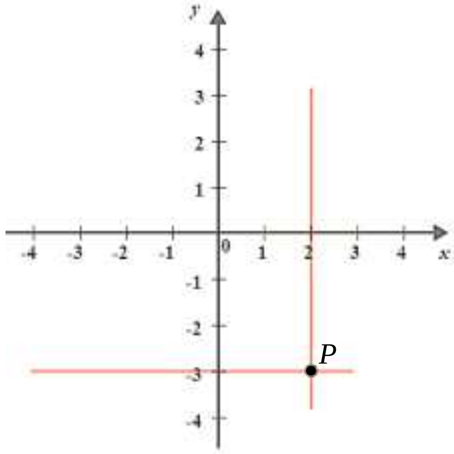


Una definición de qué se considera **coordenadas de un punto** podría ser:
Las **coordenadas a y b de un punto P** del plano, $P=(a,b)$, son los puntos de intersección de las paralelas a los ejes de coordenadas trazadas desde el punto P con los ejes de coordenadas. La primera coordenada a es la intersección con el eje horizontal x o de abscisas, y la segunda coordenada b es la intersección con el eje vertical y o de ordenadas.

Veamos un ejemplo visual:
De entrada, por situación inicial tenemos el punto y los ejes de coordenadas:

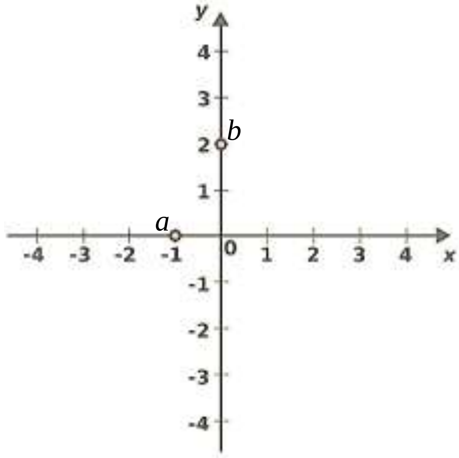


Si trazamos paralelas desde el punto P, tenemos:

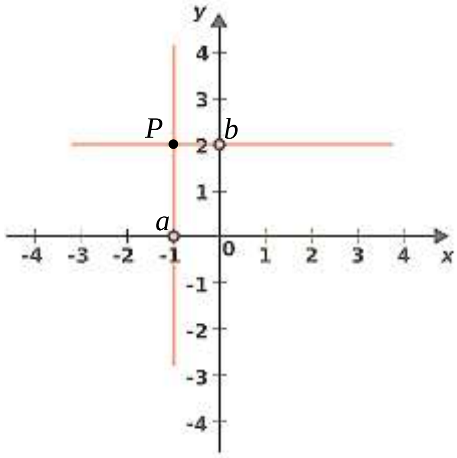


Y por tanto ya podemos decir que P=(2;−3). Recuerda que la primer componente es la coordenada $\boldsymbol{x}$ y la segunda componentes es la coordenada $\boldsymbol{y}$ del punto.

El proceso de representar puntos es exactamente el mismo, pero a la inversa.
Supongamos que queremos representar el punto P=(−1;2) en unos ejes cartesianos, el procedimiento a seguir es el siguiente:
Marcamos en el eje de abscisas el punto −1 y en el eje de ordenadas el punto 2:

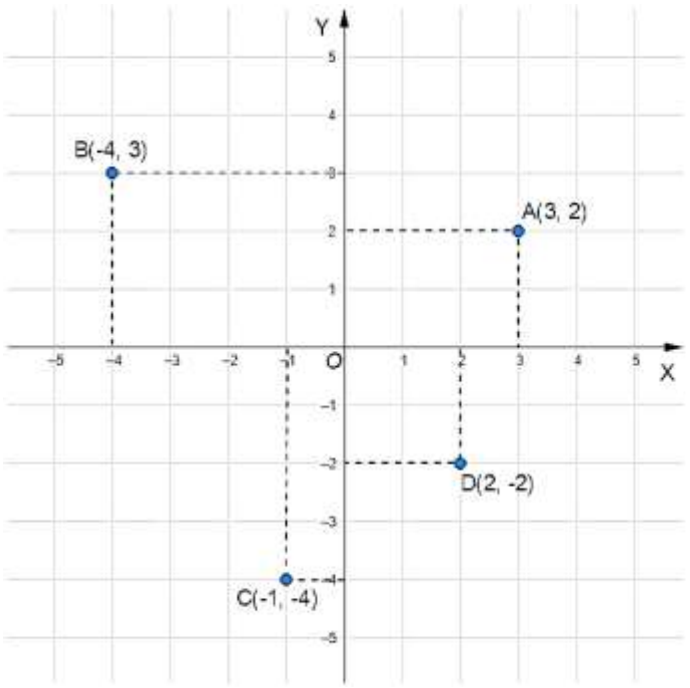


Trazamos paralelas a los ejes de ordenadas y abscisas por los puntos a y b respectivamente:



La intersección de dichas paralelas es el punto P=(−1;2)

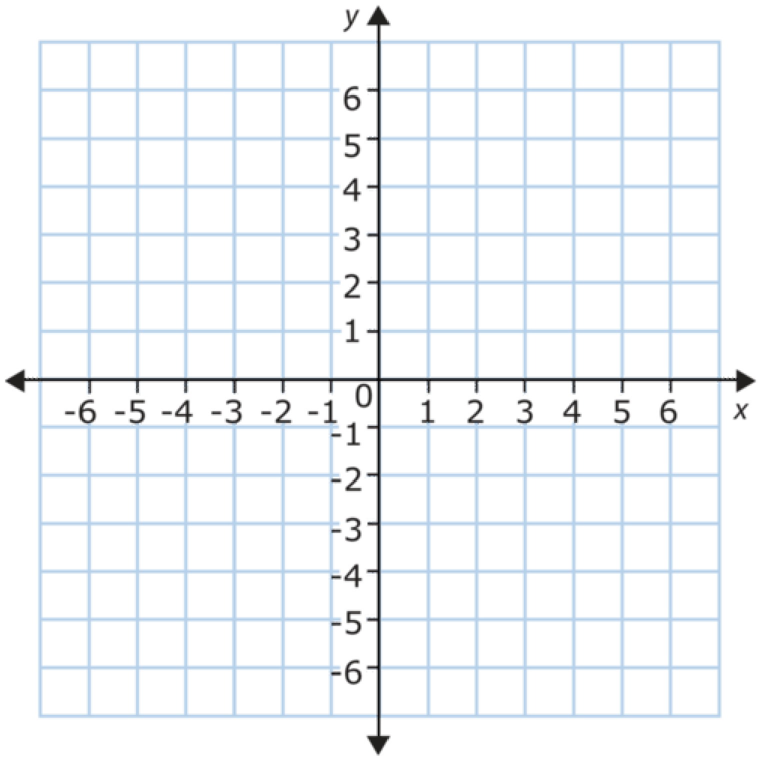
Veamos otros ejemplos. Analízalos cuidadosamente:



Ejercicio 3

Representa los siguientes puntos en el sistema de ejes cartesianos:

a=(3;2)	b=(-1;4)	c=(5;-2)	d=(-3;-5)
e=(0;4)	f=(-5;-3)	g=(-5;0)	



Relaciones

En la vida cotidiana es frecuente que se presenten **relaciones** entre diferentes magnitudes, donde una de ellas depende de otra; por ejemplo:

- el costo de un viaje en remís depende de la distancia recorrida,
- el importe del combustible depende de la cantidad de litros que se carga,
- los puntos al finalizar un campeonato de fútbol dependen de la cantidad de partidos ganados y empatados,

etc.

Ejemplo:
Supongamoss que contrato un servicio de telefonía móvil que me cobra \$1 por cada minuto que hable por teléfono más \$1 por brindarme mensualmente el servicio.

$$\underline{\text{Monto facturado}} = \$1 \times \underline{\text{minutos que llamé en el mes}} + \$1$$

$$f = \$1 \bullet m + \$1$$

Puedo llamar la cantidad de minutos m que yo quiera o necesite, así que la cantidad puede <u>variar</u> libremente, de forma <u>independiente</u>.

El monto facturado f también puede <u>variar</u>, pero no libremente. Su valor <u>depende</u> de la cantidad de minutos completos que llamé en el mes.

A m se le llama **variable independiente** y a la f se le llama **variable dependiente**.

En Matemática, la **variable independiente** suele anotarse con la letra $\boldsymbol{x}$, y a la **variable dependiente** suele anotarse con la letra $\boldsymbol{y}$.
Entonces la expresión anterior queda:

$$y = 1 \cdot x + 1$$

Esta expresión define cómo se ***relaciona*** la cantidad de minutos que llamé por celular (x) con el monto que me facturarán (y).

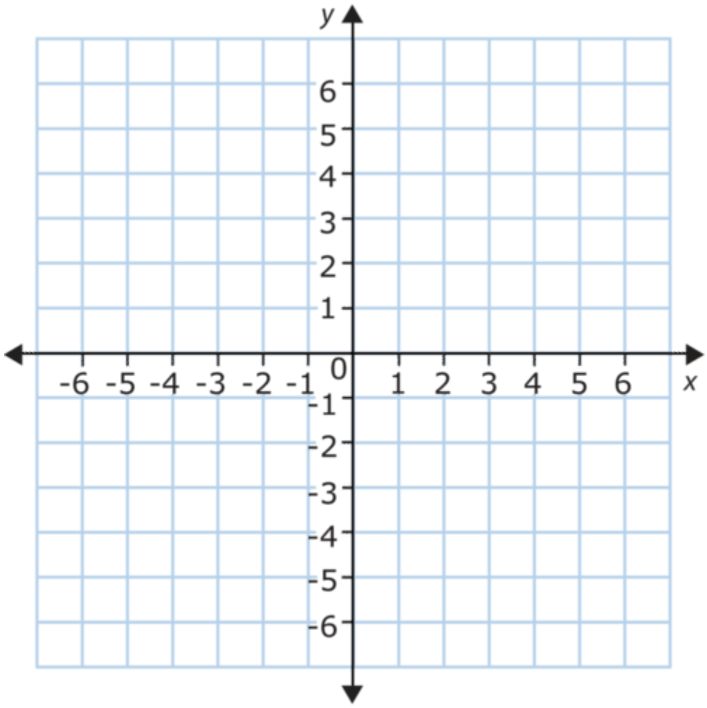
Ejercicio 4

a) Completa:
x representa los .... llamada **variable** ....
y representa el .... llamada **variable** ....

b) También completa la tabla con los resultados de $\boldsymbol{y}$ escribiendo pares ordenados. Recuerda que $\boldsymbol{y}$ se calcula haciendo $y = 1 \cdot x + 1$.

Minutos enteros que llamé	Monto de facturación	
x [minutos]	y [$]	$(x ; y)$
0	1	(0 ; 1)
1	…………	(1 ; 2)
2	…………	(2 ; 3)
3	…………	(3 ; …)
4	…………	(4 ; …)
5	…………	(5 ; …)

c) Representa los pares ordenados de la tabla como puntos en un sistema de ejes cartesianos ubicando sobre el eje $\boldsymbol{x}$ la cantidad de minutos enteros que llamé y sobre el eje $\boldsymbol{y}$ el monto que me facturarán.



Al terminar, une los puntos con una regla.

d) En el ejemplo que hemos desarrollado, ¿puede ser x = -1? ¿Por qué?

……

……

……

……

Ejercicio 5

Grafica las siguientes expresiones en ejes cartesianos:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = 3x - 2$

Al tipo de expresiones que acabas de graficar se las llama función lineal. Lo "lineal" se refiere a que, cuando las representas en un sistema de ejes cartesianos, te queda una línea recta dibujada. Pero ¿qué es una función?

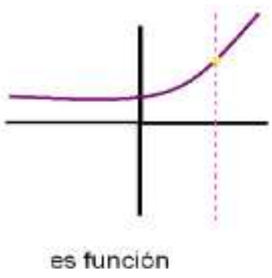
Función

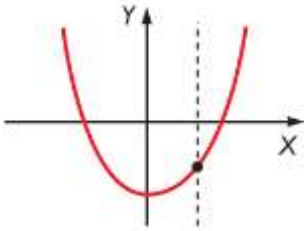
Una **función** es una relación entre dos variables, de manera que cada una depende de la otra.

El conjunto de valores que puede tomar la variable independiente es el **dominio** de la función. Para el ejemplo que vimos sobre el servicio de telefonía móvil, el dominio está formado por los números entre 0 (cuando no llamo en todo el mes) hasta el 43200 (que es la cantidad de minutos que tiene el mes).
El conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente es la **imagen** de la función. Para el mismo ejemplo, el dominio está formado por los números entre 1 (monto mínimo que me pueden facturar) y 43201.

¿Cómo me doy cuenta si una gráfica en ejes cartesianos es una <u>función</u>?
Hay una forma de ver si una relación es función o no, con sólo mirar su gráfico:
Una relación es una **función**, siempre que no hayan rectas verticales tocando o cortando a la relación graficada en más de un punto.
O sino:
Si una relación graficada no toca o corta a una recta vertical en más de un punto, entonces una relación es una función.

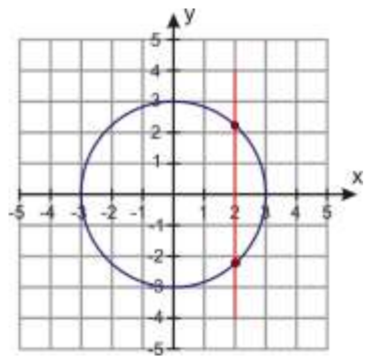
Veamos unos ejemplos:

 a) <u>No</u> es función porque a cada valor de x le corresponden dos valores de y: la recta vertical (punteada) corta a la gráfica (roja) en más de un punto.	 b) Es <u>función</u> porque a cada valor de x le corresnponde un único valor de y: la recta vertical (punteada) toca a la gráfica en un solo punto.



c) Es una función.

Es <u>función</u> porque a cada valor de x le corresnponde un único valor de y: la recta vertical (punteada) toca a la gráfica (roja) en un solo punto.

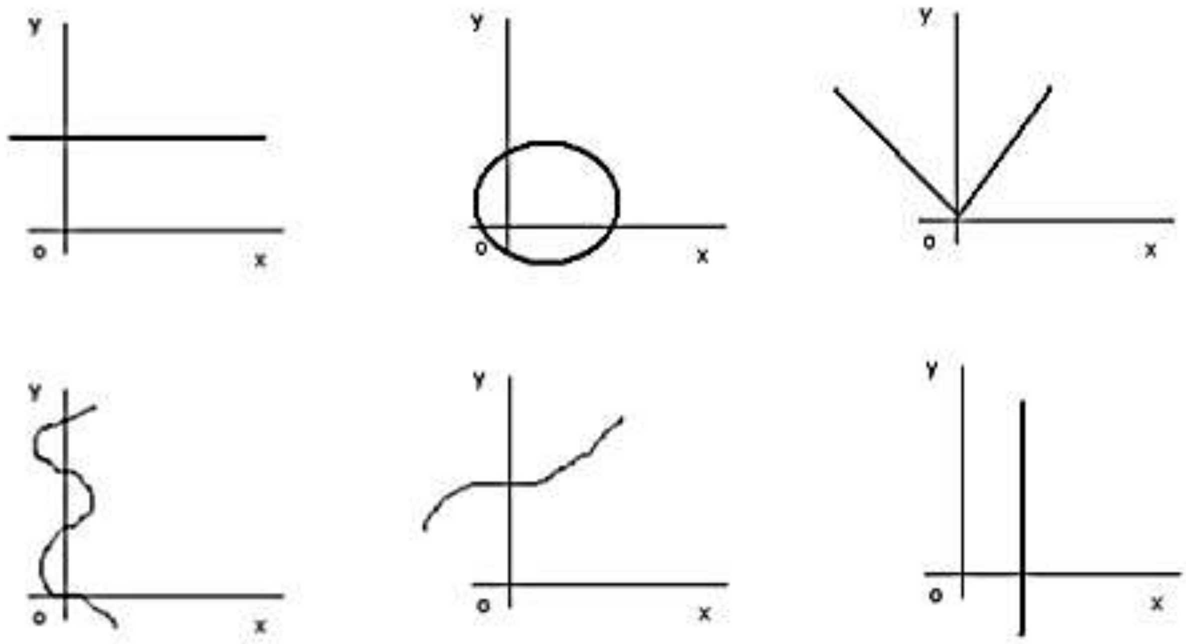


d) No es función

<u>No</u> es función porque a cada valor de x le corresponden dos valores de y: la recta vertical roja corta a la gráfica azul en más de un punto.

Ejercicio 6

Indicar cuál o cuáles de estos gráficos representan funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta.



Cualquier consulta, no dudes en preguntar.

¡Mucha suerte!