Colegio Secundario E.T.P. SAN JOSÉ

Espacio Curricular: Matemática
Curso: 6° **División: B**
Docente: Pablo Ontiveros

Guía N° 4: hasta 8/03

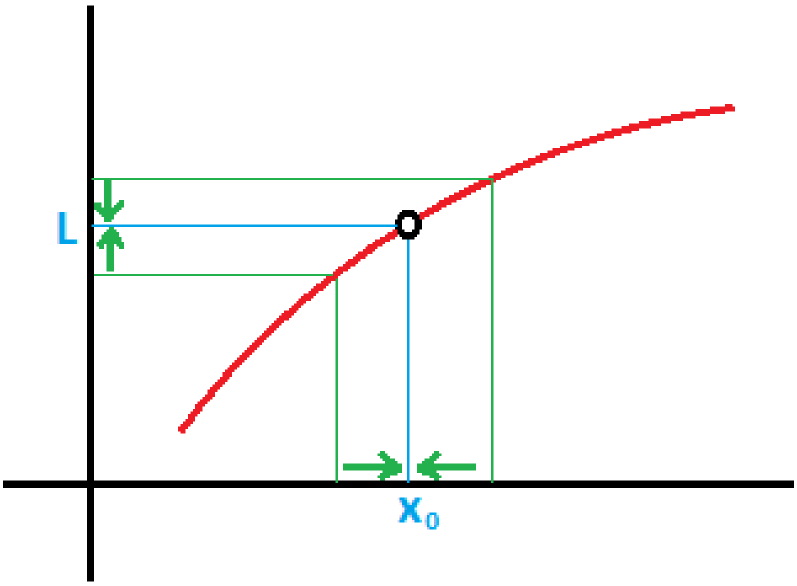
<u>Aclaraciones Iniciales:</u>

En esta guía vamos a continuar el eje sobre “Límite de funciones” que comenzamos a trabajar en la guía N° 3 (sobre funciones) por ello te recomendamos que antes de comenzar con dicha guía, repases los contenidos expresados en la guía anterior.

Antes de comenzar, te dejo dos video tutoriales a modo de soporte del tema:

https://www.youtube.com/watch?v=QEoHDt-7JS0 – Introducción al límite de una función. Límites matemáticos de funciones, ejercicios y ejemplos.

https://www.youtube.com/watch?v=_QG5OjqoSVw – Concepto de límites laterales y ejercitación



GUÍA Nº 4

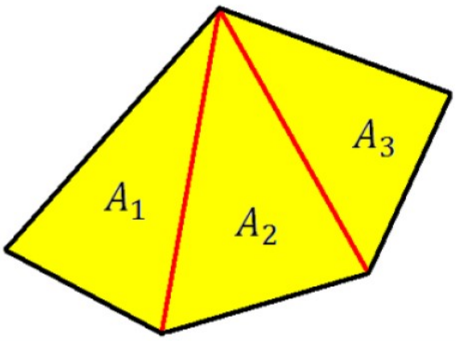
A veces algo no se puede calcular directamente... ¡pero **puedes** saber cuál debe de ser el resultado si te vas acercando más y más!

Introducción a límites

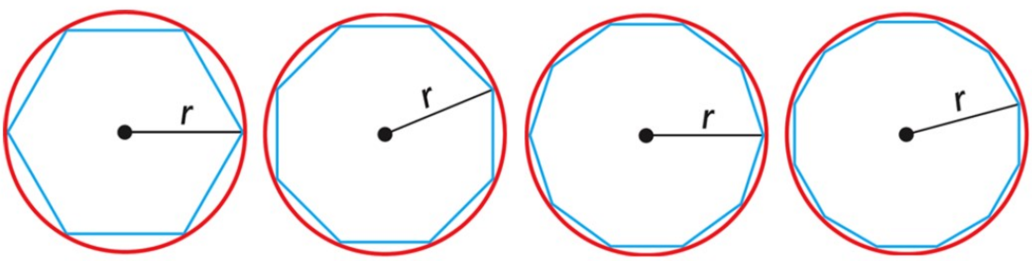
En el lenguaje ordinario la palabra límite tiene un carácter estático y significa término, extremo o frontera.

En Matemáticas, el concepto de límite es un concepto dinámico y tiene que ver con la idea de acercarse lo más posible a un valor (finito o infinito).

Consideremos el siguiente ejemplo. Para hallar el área de una figura poligonal simplemente se divide en triángulos y se suman sus áreas ($A = A_1 + A_2 + A_3$).

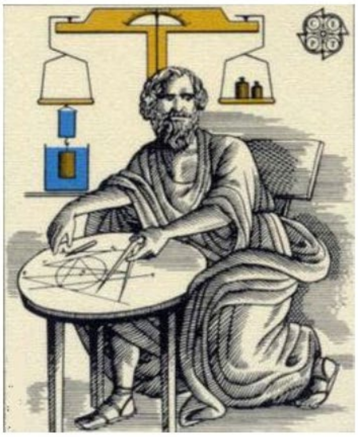


Es mucho más difícil hallar el área de una región con lados curvos como el círculo. Una manera debido a Arquímedes es aproximar el área inscribiendo polígonos en la región (Método de exhausción).



$n = 6$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 10$ $\quad$ $n = 12$

Si A_n es el área del polígono regular inscrito con n lados, entonces se puede observar que cuando n aumenta, A_n se aproxima cada vez más al área del círculo.



$$\text{área}_{\,\text{círculo}} = \lim_{n\to\infty} A_n$$

En caso de hallar un patrón para las áreas A_n, entonces se podría determinar el límite A de manera exacta.

Arquímedes tuvo esta idea hace más de dos mil años y es la base del concepto de límite de una función desarrollado en el siglo XVII por Newton.

El límite de una función.

Idea de límite de una función.

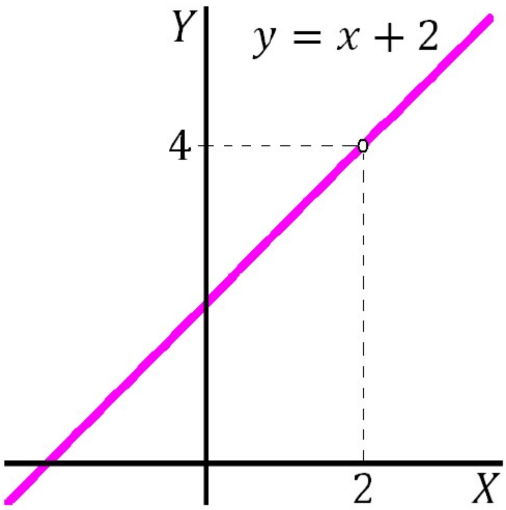
Consideremos la función $f_{(x)} = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Veamos cómo se comporta la función f cuando x esta próximo a 2

La función cuyo dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, la podemos expresar como

$$f_{(x)} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= x + 2$$

$f_{(x)} = x + 2; \quad \forall x \neq 2.$



La siguiente tabla muestra los correspondientes valores de $f_{(x)}$ para varias elecciones de x próximo a 2.

x	…	1,8	1,95	1,99	1,999	**2**	2,001	2,01	2,05	2,1	…
$f_{(x)}$	…	3,8	3,95	3,99	3,999	**4**	4,001	4,01	4,05	4,1	…

Se observa que, a medida que x es un número cercano a 2, $f_{(x)}$ esta muy próximo al número 4. Decimos entonces que “el límite de $\frac{x^2-4}{x-2}$, cuando x esta próximo a 2, es 4” y escribimos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

Definición informal de límite

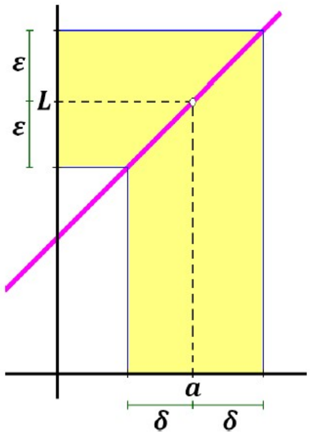
Cuando escribimos “$\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$”, queremos decir que $f_{(x)}$ esta arbitrariamente cerca de L (tan cerca a L como se quiera) conforme x esta arbitrariamente cerca (pero no igual) a a.

Definición formal de límite

Formalmente, utilizando términos lógico-matemáticos. Sea $f\colon \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en el número a mismo. Diremos que

$$\boxed{\lim_{x\to a} f_{(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon x \in \mathrm{D}_f \ \wedge\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ \left|f_{(x)} - L\right| < \varepsilon}$$

Esta definición se denomina frecuentemente épsilon-delta de límite .



Hay tres posibilidades del resultado: $\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$

- Un número real: $L \in \mathbb{R}$
- Un valor infinito: $L = \pm\infty$
- El límite no existe: $\nexists L$

Veamos un ejemplo ..

Considérese la función lineal $y = 2x + 1$.

¿A qué valor se aproxima la función, cuando x se aproxima al valor 3 ?

Por la izquierda		Por la derecha	
x	$y = f(x)$	x	$y = f(x)$
2.5	6	3.5	8
2.8	6.6	3.3	7.6
2.9	6.8	3.1	7.2
2.99	6.98	3.01	7.02

Cuando x tiende a 3, el límite de la función $y = 2x + 1$ es 7, y se escribe

$$\boxed{\lim_{x\to 3} 2x+1 = 7}$$

EJERCICIOS

1) Consideremos la función $f(x) = 3x + 2$
   ¿A que valor se aproxima la función, cuando X se aproxima al valor 3?

2) Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   ¿A qué valor se aproxima la función, cuando X se aproxima al valor 2?

3) Consideremos la función $f(x) = 5x - 2x$
   ¿A que valor se aproxima la función, cuando X se aproxima al valor -1?

Para analizar el límite de una función en un punto, es necesario acercarse a ese punto tanto por derecha como por izquierda, a esta forma de acercarse al punto analizado por los lados se le conoce como Límites Laterales y se simboliza por:

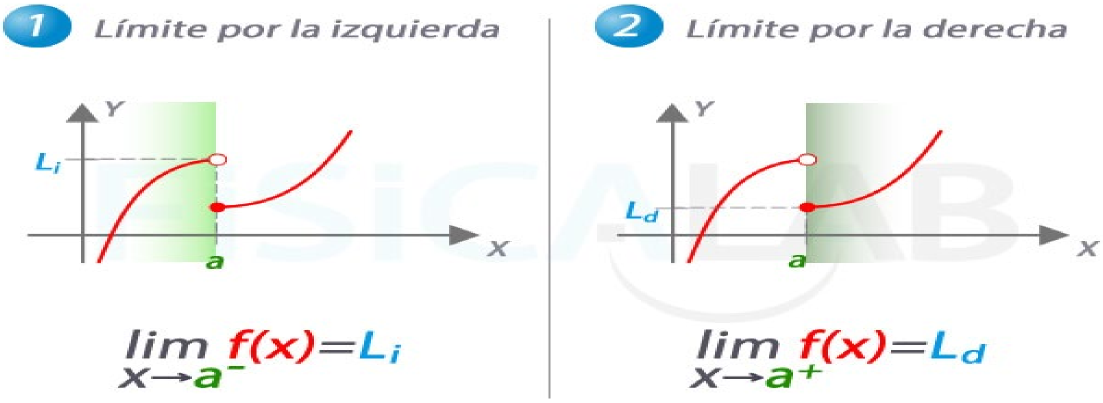
$$\lim_{X\to Xo^{+}} f(x) = L_1 \text{ ; Limite por la derecha.}$$

$$\lim_{X\to Xo^{-}} f(x) = L_2 \text{ ; Limite por la izquierda}$$

De hecho, para poder decir que el límite en un punto existe, se debe verificar que el límite de f(x) por la izquierda es igual al límite de f(x) por la derecha.

Colegio Secundario E.T.P. SAN JOSÉ

Analicemos el límite desde la gráfica.



Si me acerco por izquierda vemos que la curva llega a un límite $\mathbf{L_i}$

Si me acerco por derecha la curva llega a un límite **L**

Como podemos observar $\mathbf{L_i \neq L_d}$ por lo tanto el **LIMITE NO EXISTE**

Conclusión:

Para que el límite exista, los límites laterales deben ser iguales. De lo contrario decimos que la función no tiene límite.

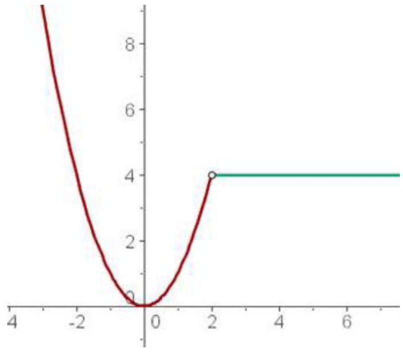
Miremos ahora este otro ejemplo

El límite de una función en un punto si existe, es único.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$



límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4.

El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.

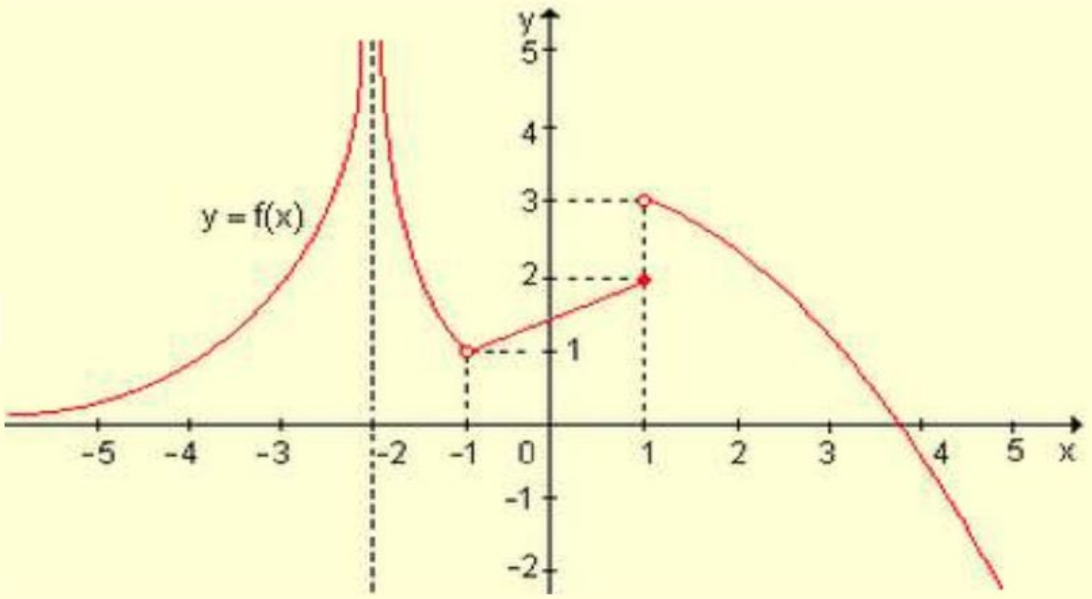
Colegio Secundario E.T.P. SAN JOSÉ

50 AÑOS 1970-2020

EJERCITACIÓN

4) Analicemos la siguiente función a partir de su gráfica

Sea la función $y = f(x)$ definida por el siguiente gráfico:



Calcule:

a) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 1} f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **e)** $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to -2^+} f(x)$

g) $\lim_{x \to -2} f(x)$ **h)** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ **i)** $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

j) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ **k)** $\lim_{x \to -1} f(x)$

NOS VEMOS PRONTO...