Matemática

LÍMITES

OA 2: Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

Límites

A veces algo no se puede calcular directamente... ¡pero puedes saber cuál debe ser el resultado si te vas acercando más y más! A esto lo llamamos el límite de una función.

Por ejemplo, ¿cuál es el valor de $\frac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x=1$?

∴ Vamos a reemplazar "x" por "1"

Entonces tenemos:

$$\frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado!

Una técnica para encontrar el verdadero valor de este ejemplo es acercándose al 1 por "valores cercanos": Lo veremos en la siguiente tabla.

"x"	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999
0,99999	1,99999

* Es decir cada vez que la "x" se acerque más y más al 1, el resultado final de la operación se acercará más al 2.

A esto nos referimos cuando hablamos de límite. Y se simboliza de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Se lee:
El límite cuando "x" tiende a "a" de $f(x)$

En este ejemplo la forma matemática de denotarlo sería:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \longrightarrow$$

Y el resultado de éste límite es 2

Vimos la forma tabular de calcular un límite, pero la manera más común de hacerlo es de forma algebraica. Y sería la siguiente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$ / Aplicando suma por su diferencia y simplificando por $(x-1)$

$$= \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$ / Evaluando el límite en $x=1$

∴ El límite pedido es igual a 2

En la mayoría de ocasiones para obtener el resultado de un límite, basta sólo con reemplazar la "X" al valor a cual tiende.
Tal como en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to 3} x^2-2x+8$$

$$= 3^2-2\cdot 3+8$$ /evaluando en $x=3$

$$= 9-6+8 = 11$$

∴ El límite pedido es 11

Pero hay otras veces como en el primer ejemplo, donde al evaluar el límite este se indefine, por lo que en estas ocasiones se debe realizar un procedimiento algebraico (factorizar, simplificar, racionalizar, etc.).

Para luego evaluar y encontrar el valor del límite.

EJEMPLO:

Al evaluar nos queda:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{0}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Indeterminado

En este caso lo más apropiado es racionalizar

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x})^2-2^2} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{x-4}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

$\therefore$ El límite pedido es igual a 4. $\blacksquare$

Ejercicios propuestos

1) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{4x-8}$

2) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$

3) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$

4) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10}$

5) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1}$

6) $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{x+4}$

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

8) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$

$\downarrow$

Desarrollo
en la
siguiente pág.

Solución

1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{4x-8} = \frac{2^2-4}{4 \cdot 2-8} = \frac{4-4}{8-8} = \frac{0}{0}$ Indeterminado

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{4x-8} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{4\cancel{(x-2)}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{4} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$ $\therefore$ el límite es 1

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-16} = \frac{4^2-4\cdot 4}{4^2-16} = \frac{16-16}{16-16} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{(x+4)\cdot(x-4)} = \frac{x\cancel{(x-4)}}{(x+4)\cdot\cancel{(x-4)}}$$ indeterminado

$$\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x+4)} = \frac{4}{4+4} = \frac{4 :2}{8 :2} = \frac{1}{2}$$ $\therefore$ el límite es $1/2$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \frac{1^2-4\cdot 1+3}{1^2+3\cdot 1-4} = \frac{1-4+3}{1+3-4} = \frac{0}{0}$ indeterminado

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} = \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+4)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-3)}{(x+4)} = \frac{1-3}{1+4} = \frac{-2}{5}$$ $\therefore$ el límite es $-2/5$

4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10} = \dfrac{5^2-10\cdot 5+25}{5^2-3\cdot 5-10} = \dfrac{25-50+25}{25-15-10} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x-10} = \dfrac{(x-5)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x+2)}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)}{(x+2)} = \dfrac{5-5}{5+2} = \dfrac{0}{7} = 0$ ∴ El límite es 0//

5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1} = \dfrac{(-1)^2+7\cdot(-1)+6}{(-1)^2-1} = \dfrac{1-7+6}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+7x+6}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x+6)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+6}{x-1} = \dfrac{-1+6}{-1-1} = \dfrac{5}{-2} = -\dfrac{5}{2}$ ∴ El límite es $-\frac{5}{2}$//

6) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{x+4} = \sqrt[3]{4+4} = \sqrt[3]{8} = 2$ ∴ el límite es 2//

7) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1^2-1}{\sqrt{1}-1} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}$

$\lim\limits_{x \to 1} (x+1)(\sqrt{x}+1) = (1+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 2 = 4$ ∴ El límite es 4//

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \dfrac{\sqrt{9+0}-3}{0} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ indeterminado

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x} \cdot \dfrac{(\sqrt{9+x}+3)}{(\sqrt{9+x}+3)} = \dfrac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{9+x}+3)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \dfrac{1}{\sqrt{9}+3} = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$ ∴ El límite es 1/6//