Cálculo integral

Unidad 6

Colegio San José

La Integral Indefinida

$$\int f(x)\,dx$$

Definición

Regla de la Potencia

Regla de una constante por una función

Regla de una suma o diferencia de sumas

Integración con condiciones iniciales

INTEGRACIÓN

El proceso de encontrar todas las anti derivadas de una función se llama anti derivación o integración. El símbolo que representa es:

$$\int \qquad \textit{llamado signo de integral}$$

Representación de la integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Esto se lee, la integral indefinida de $f(x)$ con respecto de x es igual a $F(x)$ mas C ,siendo C la constante de integración.

De acuerdo a esta notación tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int dx = x + c$$

Elementos de la integral indefinida

$$\overset{\text{1. Integral}}{\int} \underbrace{f(x)}_{\text{2. Integrando}} \overbrace{d\underbrace{x}_{\text{4. Variable de integración}}}^{\text{3. Diferencial}} = \overbrace{F(x) + \underbrace{c}_{\text{6. Constante de integración}}}^{\text{5. Primitiva general}}$$

$$\int f\ \ x\ \ dx = F\ \ x\ \ + c$$

Elementos de la integral indefinida

$$\int \ldots dx$$

$$f\ \ x\ \ dx = dF\ \ x$$

7. Operador integral

8. Diferencial de *F*(*x*)

INTEGRAL INDEFINIDA

Integrar es el proceso recíproco del de derivar, es decir, dada una función f(x), busca aquellas funciones F(x) que al ser derivadas conducen a f(x).

Se dice, entonces, que F(x) es una primitiva o antiderivada de f(x); dicho de otro modo las primitivas de f(x) son las funciones derivables F(x) tales que:

$$F'(x) = f(x).$$

Integral indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.

Se representa por $\int f(x)\,dx$.

Se lee : integral de x diferencial de x.

$\int$ = es el signo de integración.

f(x) = es el integrando o función a integrar.

Dx = es diferencial de x, e indica cuál es la variable de la función que se integra.

C = es la constante de integración y puede tomar cualquier valor numérico real.

Si F(x) es una primitiva de f(x) se tiene que:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Para comprobar que la primitiva de una función es correcta basta con derivar.

Matemática: Antiderivada | Cálculo.

Cuando se conoce la derivada de una función y se desea conocer la función original, se usa integrales. Modo Intuitivo:

Ejemplo 1: ¿Qué se derivo para que la derivada sea $f'(x) = 4$?

Se puede ver que la función que se derivo es:

$$F(x) = 4x$$

pero también pueden ser las funciones:

$$F(x) = 4x + 5$$

$$F(x) = 4x - 12$$

$$F(x) = 4x + 8$$

En general

$$F(x) = 4x + C$$

La letra C representa constante, número Real

Se puede afirmar que la función $F(x) = 4x + C$ es la antiderivada de $f(x) = 4$

Ejemplo 2: Hallar la antiderivada de $f'(x) = 3x^2$

La función que se derivó es $F(x) = x^3$ pero también…

$$F(x)= x^3 + 5$$

$$F(x)= x^3 + 9$$

$$F(x)= x^3 - 2$$

En general

$$F(x)= x^3 + C$$

Se puede afirmar que la función $F(x) = x^3 + C$ es la antiderivada de $f(x) = 3x^2$

Reglas básicas de integración

Integrales inmediatas

Integral de una constante

La **integral de una constante** es igual a la constante por x.

$$\int k\,dx = k \cdot x + C$$

Integral de cero

$$\int 0\,dx = C$$

Integral de una potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u^n \cdot u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Ejemplos:

- $\int 7dx$

  $\int 7dx = 7x + C$

- $\int x^6 dx$

  $\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$

- $\int 7x^3 dx$

  $\int 7x^3 dx = \frac{7x^4}{4} + C$

- $\int x^{\frac{2}{3}} dx$

  $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C = \frac{3x \cdot \sqrt{x^2}}{5} + C$

- $\int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = \frac{3x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{3x^{-3}}{-3} + C = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$

- $\int \sqrt[3]{x} dx$

  $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C$

- $\int \left(x^4 - 6x^2 - 2x + 4\right) dx$

  $\int \left(x^4 - 6x^2 - 2x + 4\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} - x^2 + 4x + C$

- $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right) dx$

  $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}\right) dx = \int \left(3x^{\frac{1}{2}} + 10x^{-6}\right) dx = \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{10x^{-6+1}}{-6+1} + C =$

Integrales trigonométricas

$$\int sen\,x\;dx = -\cos x\; + C$$

$$\int sen\,u \cdot u'\,dx = -\cos u\; + C$$

$$\int \cos x\;dx = \text{sen}\,x + \text{C}$$

$$\int \cos u\;\cdot u'\,dx = \text{sen}\,u + \text{C}$$

Ejemplos:

$$\int (\cos x - senx)dx$$

$$\int (\cos x - senx)dx = senx + \cos x\; + C$$

TABLA RESUMEN

Integrales

1.- $\int du = u + c$

2.- $\int a\,du = a\int du$

3.- $\int (du + dv) = \int du + \int dv$

4.- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1)$

5.- $\int \frac{du}{u} = \ell\eta|u| + c$

6.- $\int e^u du = e^u + c$

7.- $\int a^u du = \frac{a^u}{\ell\eta a} + c$

8.- $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$

9.- $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$

EJERCICIOS

1.- $\int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4)\ dx$

2.- $\int (\operatorname{sen} x + 7\cos x - 1)\ dx$

3.- $\int \sqrt[4]{x}\ dx =$

4.- $\int (\sqrt{x} - 2)\ dx$

5.- $\int \frac{2}{\sqrt{x}}\ dx$

6.- $\int x^5 dx$

7.- $\int (4x+3)^2\ dx$

Calcula estas integrales de funciones trigonométricas.

a) $\int \operatorname{sen} 2x\ dx$

b) $\int \cos (x+1)\ dx$

c) $\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{2}\ dx$

d) $\int \operatorname{sen} (-x)\ dx$

INTEGRALES

1. $\int x^3\ dx$

2. $\int \frac{x^3}{3}\ dx$

3. $\int \frac{x^4}{6}\ dx$

4. $\int (x^3 + 3)\ dx$

5. $\int (x^2 + 2x - \frac{1}{x})\ dx$

1. $\int 3\ dx$

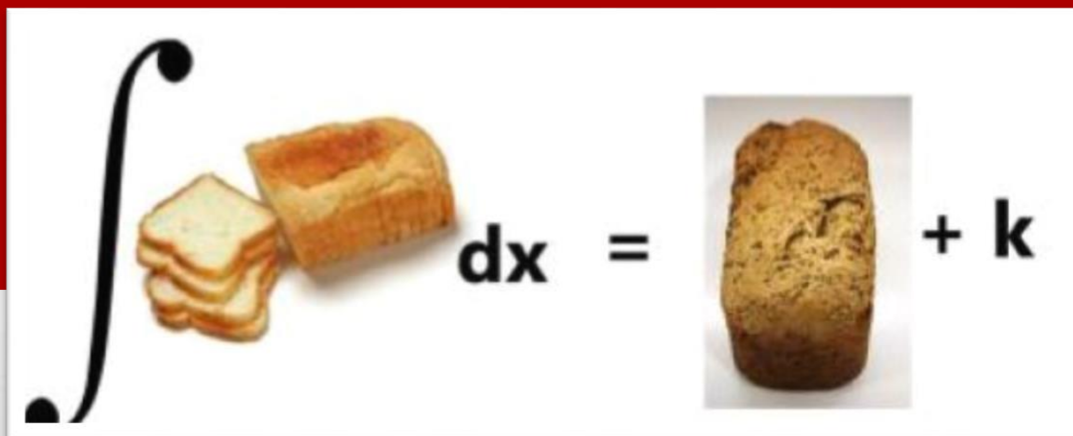
2. $\int (\pi^2 - 1)\ dx$

3. $\int x^7\ dx$

4. $\int 5x^{1/4}\ dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2}\ dx$


dx =
+ k