Unidad N° 2: Función

FUNCIÓN

> Una **función** es una relación que a cada valor de la variable independiente, ***x*** le corresponde "un único valor" de la variable dependiente, ***y***.

Simbólicamente una función se expresa:

$y = f(x)$ Se lee: " *y* es función de *x*" o " y es igual a *f* de *x* "

Lo que significa que el valor que toma " *y*" depende del valor que le damos a " *x*".

DOMINIO E IMAGEN

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se escribe: Dom f

La imagen de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se simboliza: Im f.

Las funciones se pueden clasificar según el tipo de operaciones que se realizan con la variable en : algebraica y trascendentes.

La clasificación de funciones permite agruparlas en familias de funciones.

Familia de Funciones Algebraicas

Son aquellas en que la variable está afectada a las operaciones de: suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz.

Se clasifican en:

a) **Racionales**: la variable está afectada a todas las operaciones menos la radicación. Pueden ser Polinómicas y Fraccionarias.

b) **Irracionales**: sobre la variable se efectúan toda clase de operaciones algebraicas.

Familia de Funciones Trascendentes

Se clasifican en: Trigonométricas, Exponenciales y Logarítmicas.

Ejemplos:

$f(x) = x^3 - 3x + 8$ Función Algebraica Racional Entera

$g(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ Función Algebraica Racional Fraccionaria

$h(x) = \sqrt{x - 5}$ Función Algebraica Irracional

$i(x) = 3\cos(x - 1)$ Función Trascendentes Trigonometrica

$j(x) = 7^{x-1}$ Función Trascendentes Exponencial

$m(x) = \log_2(x + 2)$ Función Trascendentes Logarítmica

RESTRICCIONES AL DOMINIO

Las más comunes son:

- **Los denominadores:** "Deben ser distintos de cero". Ya que la división por cero no existe.
- **Las raíces de índice par:** "El argumento de las raíces debe ser mayor o igual a cero" ya que no existen las raíces pares de números negativos en el campo de los números reales.
- **Los logaritmos:** "El valor o expresión afectado/a por un logaritmo debe ser mayor a cero".

Nota: si la función no tiene ni denominadores, ni raíces, ni logaritmos, por ahora podemos decir que su dominio son todos los números reales.

Ejemplo:

a) Veamos cual es el dominio de la función $f(x) = \frac{x+1}{5x+6}$

El denominador debe ser distinto de cero $\rightarrow 5x + 6 \neq 0$

$$5x \neq -6$$

$$x \neq -\frac{6}{5}$$

Luego Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

b) Determinar el dominio de $f(x) = \sqrt{x+2}$

El argumento debe ser mayor o igual a cero $\rightarrow x + 2 \geq 0$

$$x \geq -2$$

Luego Dom $f = [-2; \infty)$

c) Calcular el dominio de $f(x) = \log_2(x-6)$

La expresión $x + 6 > 0$

$$x > -6$$

Luego Dom $f = (-6; \infty)$

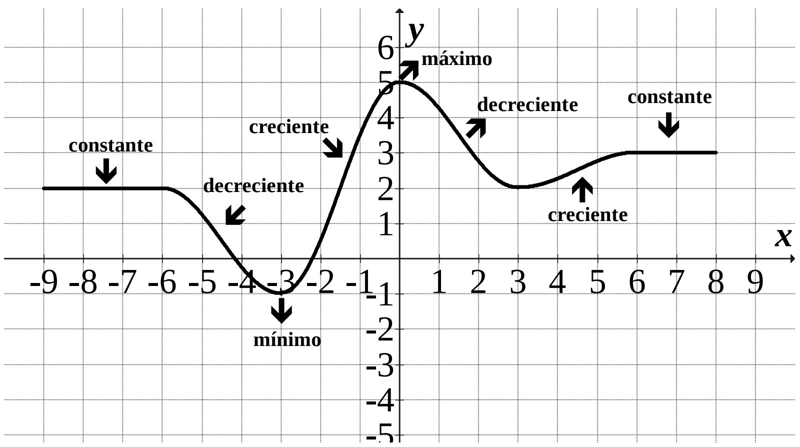
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para estudiar las variaciones de una función hay que mirarla de izquierda a derecha.

*Una función es **creciente** cuando al "aumentar x, aumenta y".*

*Una función es **decreciente** cuando al "aumentar x, disminuye y".*

*Una función es **constante** cuando al "aumentar x, no varia y".*



Dom $f = [-9; 8]$

Im $f = [-1; 5]$

Creciente = $(-3; 0) \cup (3; 6)$

Decreciente = $(-6; -3) \cup (0; 3)$

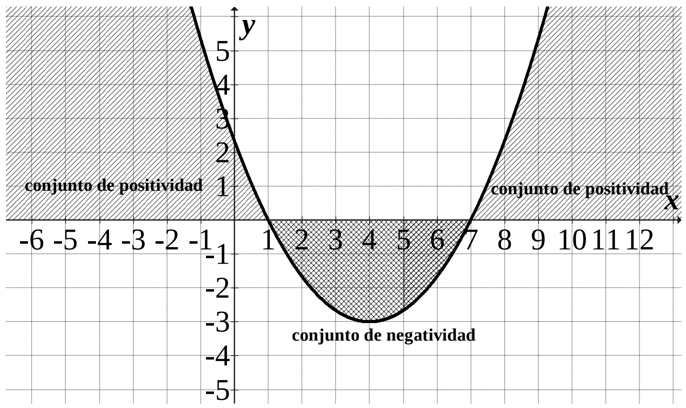
Constante = $(-9; -6) \cup (6; 8)$

Máximo = $(0; 5)$

Mínimo = $(-3; -1)$

Una función es **creciente** o **decreciente** por tramos, el punto que toma el "mayor valor en un tramo creciente" es el **máximo** de la función, el punto que toma el "menor valor en un tramo decreciente" es el **mínimo** de la función.

POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD



El **conjunto de positividad** (C^+) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes positivas.

El **conjunto de negatividad** (C^-) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes negativas.

$C^+ = (\infty ; 1) \cup (7; \infty)$

$C^- = (1; 7)$

RAÍZ DE UNA FUNCIÓN

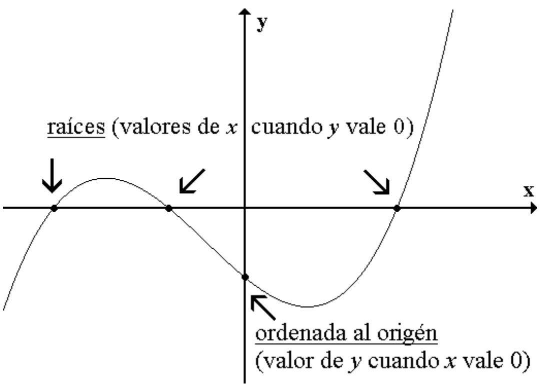
Las raíces de una función son los valores de x que hacen que y valga cero.

Como y vale cero "la gráfica de la función corta el eje de las x en esos puntos".

ORDENADA AL ORIGEN DE UNA FUNCIÓN

La ordenada al origen de una función es el valor que toma y cuando x vale cero.

De esta forma la ordenada al origen es el "punto en donde la gráfica de la función corta al eje de la y".

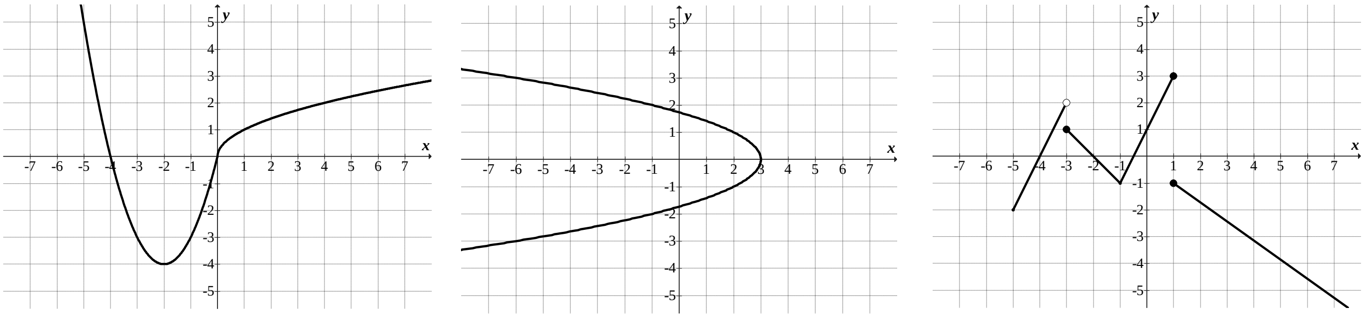


Para tener en cuenta:

- El gráfico de una función corta al eje de las *y* (ordenada al origen) cuando *x* vale 0.
- El gráfico de una función corta al eje de las *x* (raíz) cuando *y* vale 0.
- Como el eje de las *x* es la recta real puede suceder que la función no tenga contacto con el eje *x*, en cuyo caso la función no tiene raíces reales.

ACTIVIDADES

1) Decidir cuáles de las siguientes gráficas representan funciones y cuáles no. Justificar. Las que sean funciones analizar dominio e imagen.



2) Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = (x-1)^2$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: g(x) = x^2 - 1$ calcular:

$f(-2) =$ $\qquad$ $g(-2) =$

$f(2) =$ $\qquad$ $g(2) =$

$f(0) =$ $\qquad$ $g(0) =$

$f(-5) =$ $\qquad$ $g(-5) =$

3) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3}{2x-4}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{-x+3}$

c) $f(x) = 3x - 2$

d) $f(x) = \log(1-2x)$

e) $f(x) = \frac{x+2}{-x-3}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-1}$

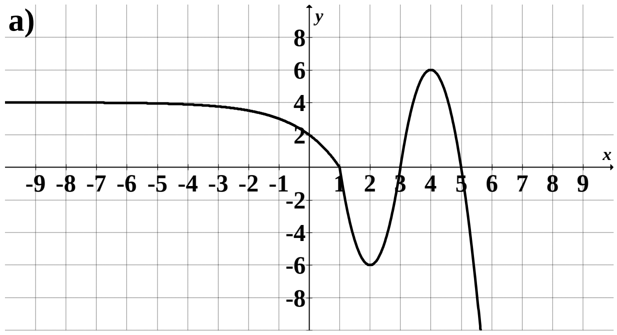
g) $f(x) = \frac{x^2-25}{3x+36}$

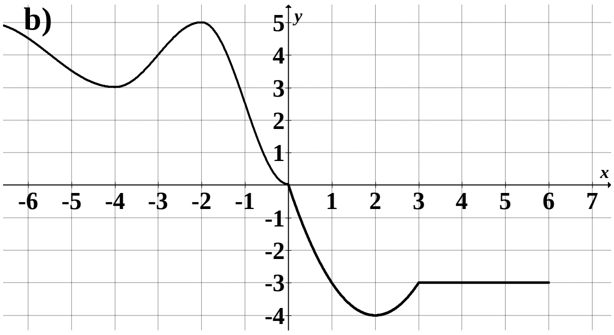
h) $f(x) = 7x^2 + 5$

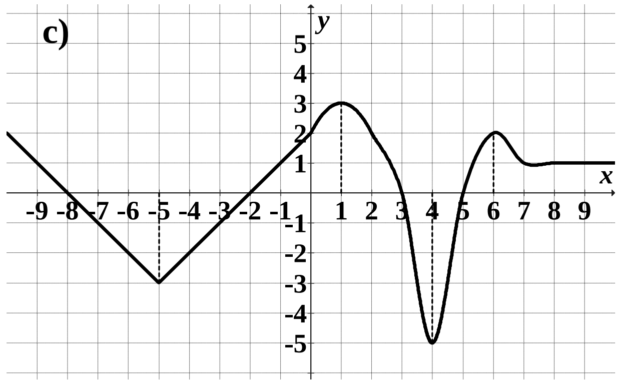
i) $f(x) = \sqrt{12-x}$

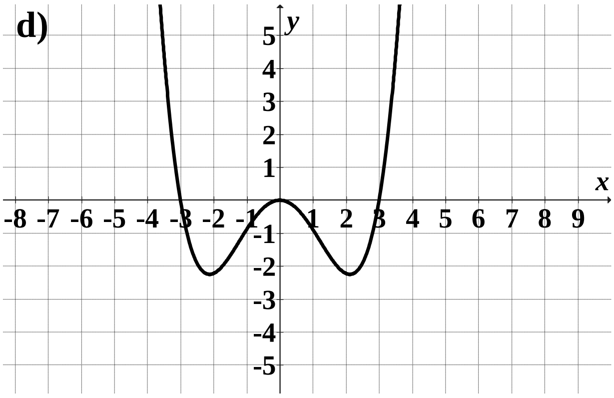
j) $f(x) = \log(3x+5)$

4) Dados los siguientes gráficos de funciones:
   a) Indicar el dominio
   b) Indicar la imagen
   c) Escribir las raíces de la función
   d) Escribir intervalos donde la función crece, decrece y es constante
   e) Escribir los intervalos donde la función sea positiva y negativa





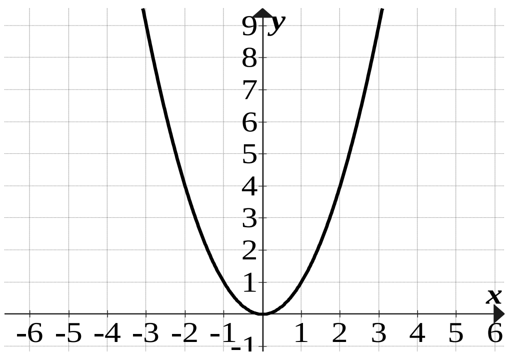




FUNCIÓN CUADRÁTICA

Llamamos **función cuadrática** a toda función del tipo:

$$y = x^2$$



Esta función está definida para todos los valores de x. Por lo tanto el **dominio** de las funciones cuadráticas es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)**.** Y la **imagen** es $[0; +\infty)$.

Tiene un eje de simetría vertical.

La función es creciente en: (0 , +∞)

La función es decreciente en: (– ∞ , 0)

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$y = x^2 + 3$

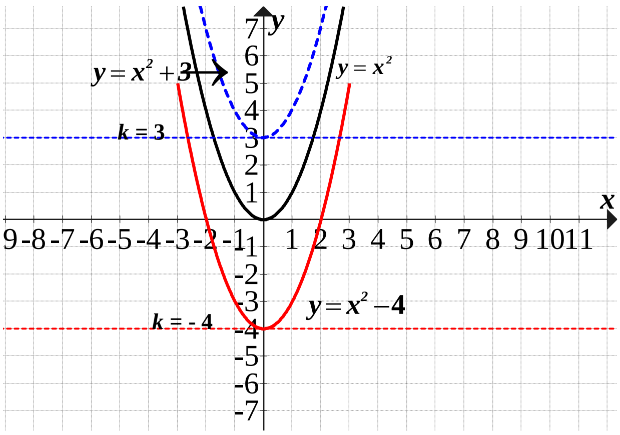
Al **sumar** 3 unidades, hace que la gráfica se desplace 3 unidades hacia **arriba**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[3; +\infty)$

Crec: (0 , +∞)

Decrec: (– ∞ , 0)



$y = x^2 - 4$

Al **restar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades hacia **abajo**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[-4; +\infty)$

Crec: (0 , +∞)

Decrec: (– ∞ , 0)

Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$y = (x + 4)^2$

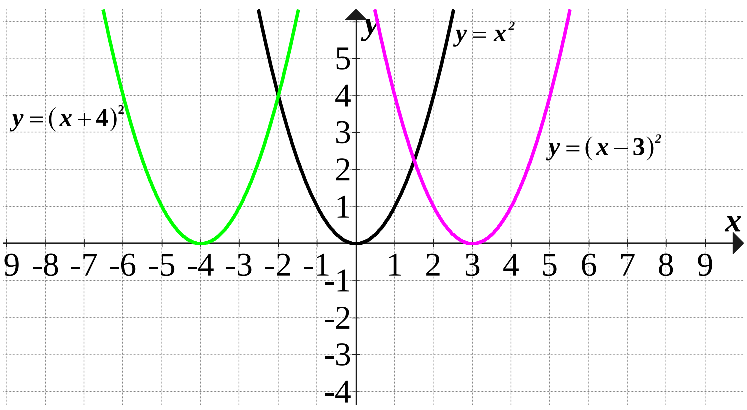
Al **sumar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[0; +\infty)$

Crec: (– 4 , +∞)

Decrec: (– ∞ , – 4)



$y = (x - 3)^2$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[0; +\infty)$

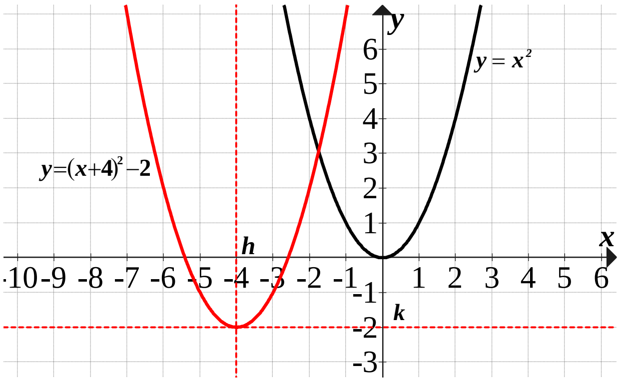
Crec: (3 , +∞)

Decrec: (– ∞ , 3)

Desplazamiento vertical y horizontal $\boldsymbol{y = f(x - h) + k}$

$y = (x + 4)^2 - 2$

Al **sumar** 4 unidades y **restar** 2 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda** y 2 unidades hacia **abajo**.



Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[-2; +\infty)$

Crec: $(-4, +\infty)$

Decrec: $(-\infty, -4)$

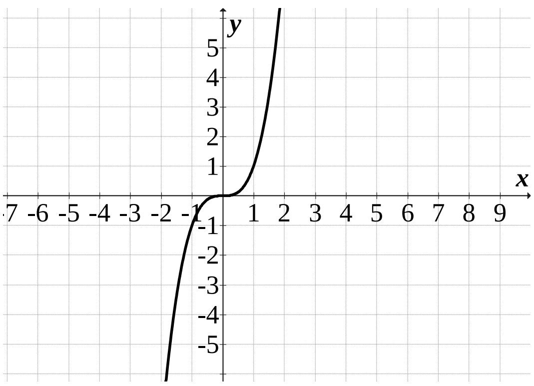
ACTIVIDADES

5) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:
   a) $y = (x + 2)^2 - 3$
   b) $y = (x + 1)^2$
   c) $y = -x^2$
   d) $y = -(x - 2)^2$
   e) $y = -(x - 3)^2 + 2$

FUNCIÓN CÚBICA

Llamamos **función cúbica** a toda función del tipo:

$$y = x^3$$



Esta función está definida para todos los valores de $\boldsymbol{x}$. Por lo tanto el **dominio** de las funciones cuadráticas es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)**.**

Y la **imagen** es el conjunto de los números reales.

La función es creciente en: $\mathbb{R}$

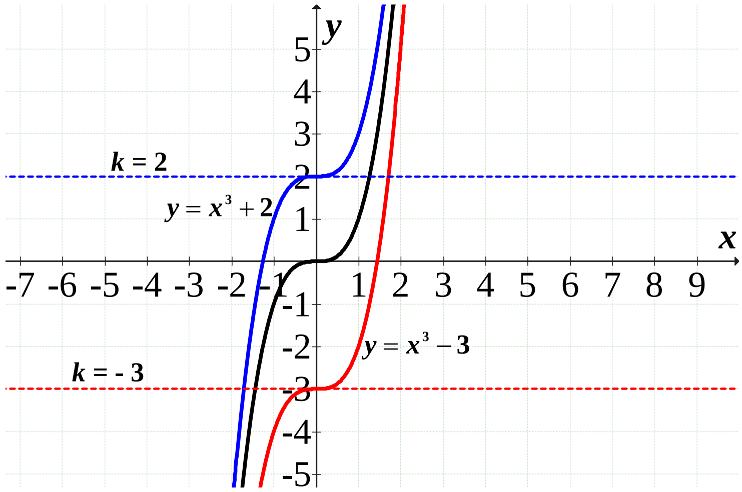
Desplazamiento vertical $\boldsymbol{y = f(x) + k}$

$y = x^3 + 2$

Al **sumar** 2 unidades, hace que la gráfica se desplace 2 unidades hacia **arriba**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}$



$y = x^3 - 3$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades hacia **abajo**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}$

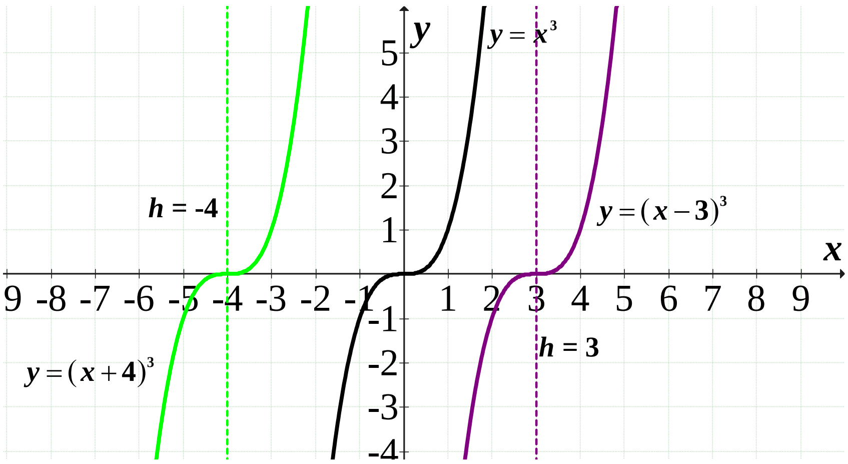
Desplazamiento horizontal $\boldsymbol{y = f(x - h)}$

$y = (x + 4)^3$

Al **sumar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}$



$y = (x - 3)^3$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}$

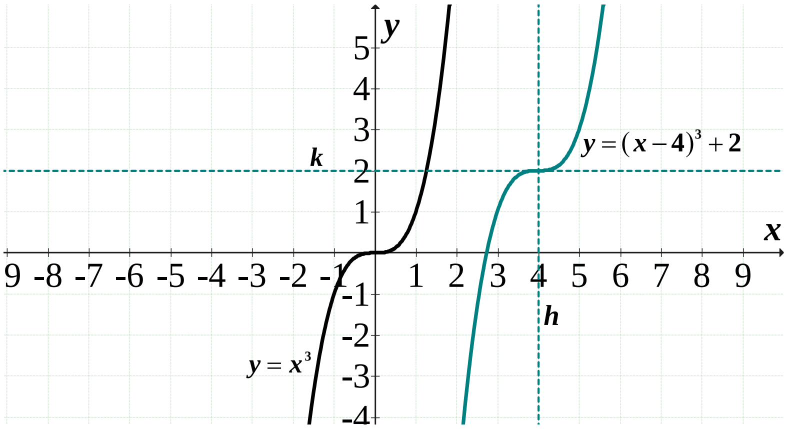
Desplazamiento vertical y horizontal $\boldsymbol{y = f(x-h)+k}$

$$y = (x-4)^3 + 2$$

Al **restar** 4 unidades y **sumar** 2 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **derecha** y 2 unidades hacia **arriba**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $\mathbb{R}$



ACTIVIDADES

6) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:
   a) $y = (x-2)^3 - 3$
   b) $y = -x^3$
   c) $y = -(x-1)^3$
   d) $y = (x+2)^3$
   e) $y = -(x+3)^3 - 2$

Links de videos sugeridos para ver:
https://www.youtube.com/watch?v=QoG2Vs7LY9c

Función Valor Absoluto

Recordemos que el **valor absoluto** de un número real cualquiera x, que simbolizamos $|x|$, es **la distancia entre x y cero**. $|x| = f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

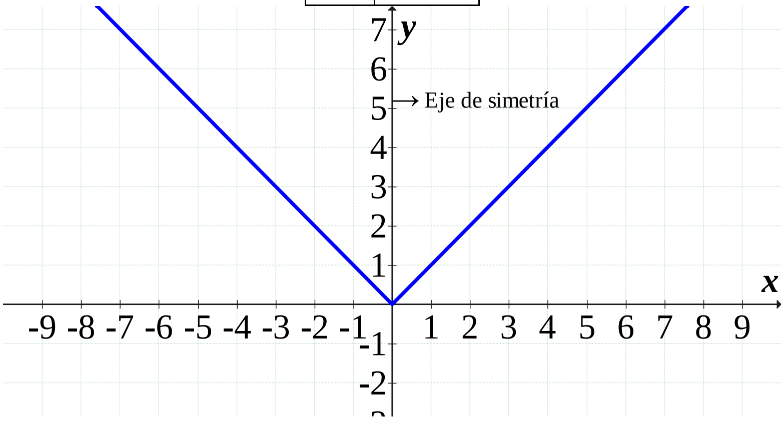
Ejemplo:

$|69| = 69;$ $\qquad |-69| = -(-69) = 69$

$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3};$ $\qquad \left|-\frac{7}{3}\right| = -\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

x	$y = \|x\|$
– 4	4
– 3	3
– 2	2
– 1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



Está definida para todo x, o sea, en el intervalo (– ∞ ; + ∞).

Es decir, que el **dominio** es el conjunto de los números reales y la **imagen** es (0 ,+∞).

Tiene un eje de simetría vertical.

La gráfica es:

- ✓ creciente en: (0 , +∞)
- ✓ decreciente en: (– ∞ , 0)

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

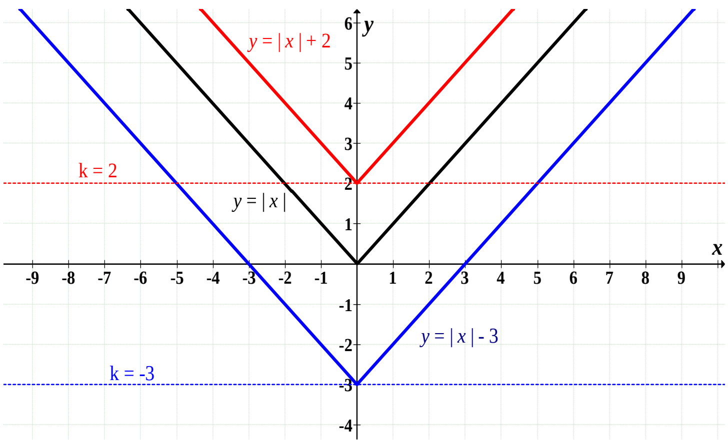
$y = |x| - 3$

Dom: ℝ

Im: [– 3 , +∞)

Crec: (0 , +∞)

Decrec: (– ∞ , 0)



$y = |x| + 2$

Dom: ℝ

Im: [2 , +∞)

Crec: (0 , +∞)

Decrec: (– ∞ , 0)

Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

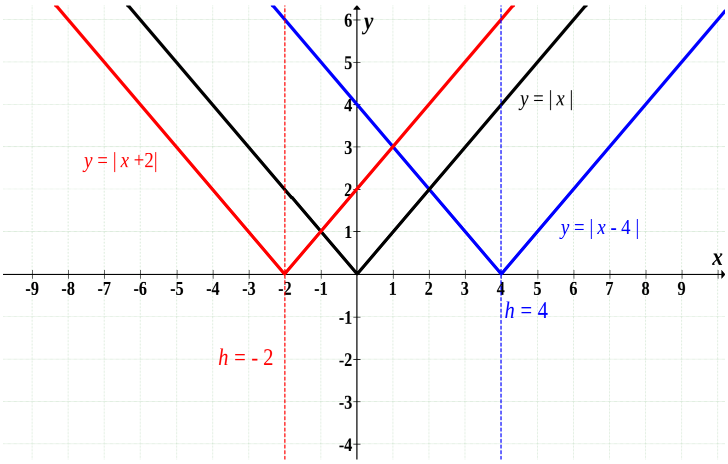
$y = |x + 2|$

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[\ 0\ ,\ +\infty)$

Crec: $(\ -2\ ,\ +\infty)$

Decrec: $(-\infty\ ,\ -2\ )$



$y = |x - 4|$

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[\ 0\ ,\ +\infty)$

Crec: $(\ 4\ ,\ +\infty)$

Decrec: $(-\infty\ ,\ 4\ )$

Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$y = |x - 3| + 1$

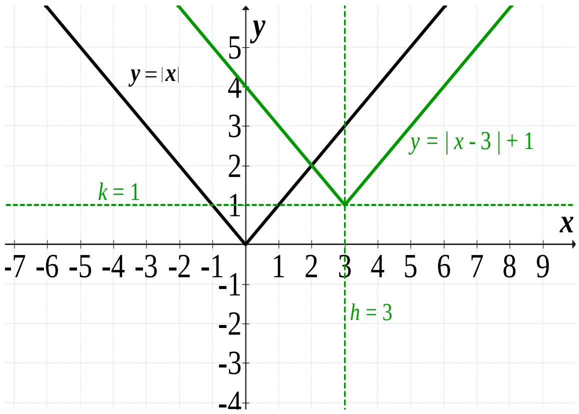
Al **restar 3** unidades y **sumar** 1 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha** y 1 unidades hacia **arriba**.

Dom: $\mathbb{R}$

Im: $[1; +\infty)$

Crec: $(\ 3\ ,\ +\infty)$

Decrec: $(-\infty\ ,\ 3\ )$



ACTIVIDADES

7) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:
   a) $y = |x - 5|$
   b) $y = -|x|$
   c) $y = |x| + 5$
   d) $y = |x + 4|$
   e) $y = -|x + 1| - 3$

f) $y = |x-2| + 4$
g) $y = |x-4| - 2$
h) $y = -|x-4|$
i) $y = -|x| + 1$
j) $y = -|x-1| + 2$

Funciones racionales

Llamamos funciones racionales a las funciones de la forma:

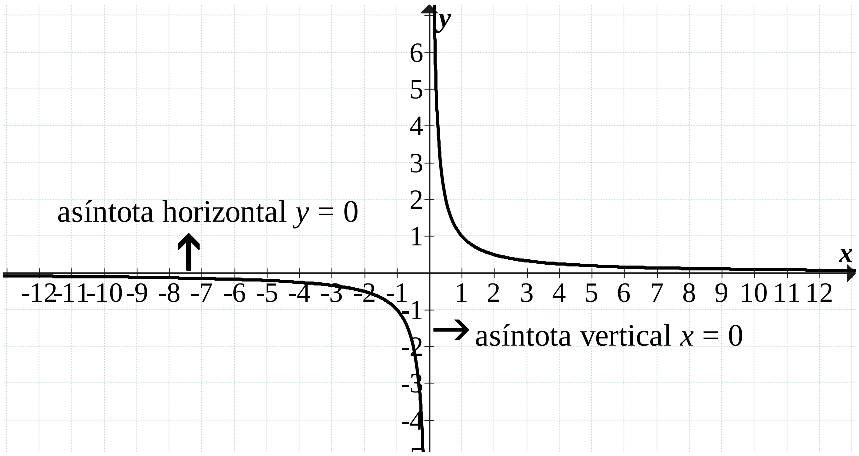
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } P(x), Q(x) \text{ polinomios de una sola indeterminada } x, \text{ siendo } Q(x) \text{ no nulo.}$$

Estudiaremos dos tipos de funciones racionales:

1) $y = \frac{1}{x}$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

x	$f(x)$
-8	-0,125
-4	-0,25
-2	-0,5
-1	-1
-0,50	-2
-0,25	-4
0	No se puede dividir por cero
0,25	4
0,50	2
1	1
2	0,5
4	0,25
8	0,125



Como el denominador tiene que ser distinto de cero,

el **dominio** es: ℝ – { 0 }, o (–∞ ; 0) ∪ (0 ; +∞).

La **imagen** es: ℝ – { 0 }, o (–∞ ; 0) ∪ (0 ; +∞).

Tiene una **asíntota vertical** $x = 0$.

Asíntota horizontal $y = 0$.

C $^{+}$: (0 ; +∞).

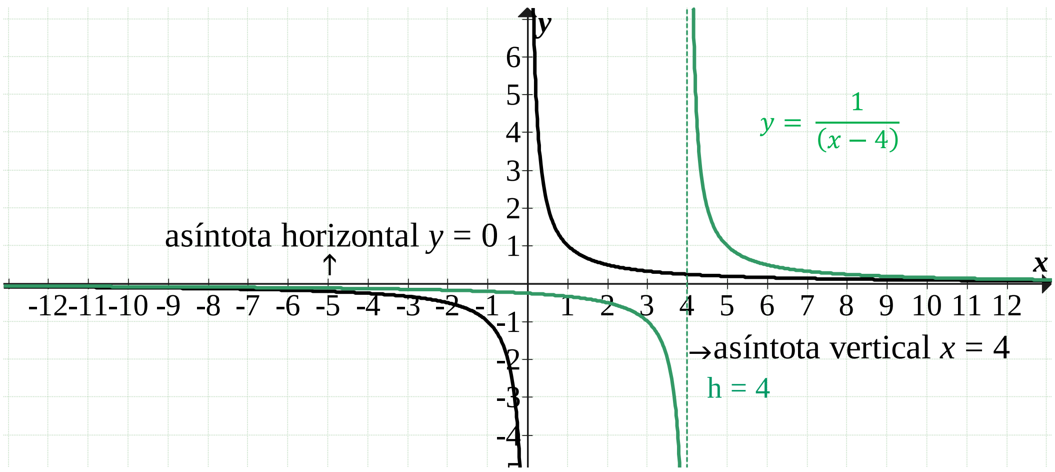
C $^{-}$: (–∞ ; 0).

La función es **decreciente.**

No posee **raíces**, y no tiene **ordenada al origen.**

Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$y = \dfrac{1}{(x-4)}$ h = 4



Dom: ℝ – {4}

Im: ℝ – {0}

A v: $x = 4$

A h: $y = 0$

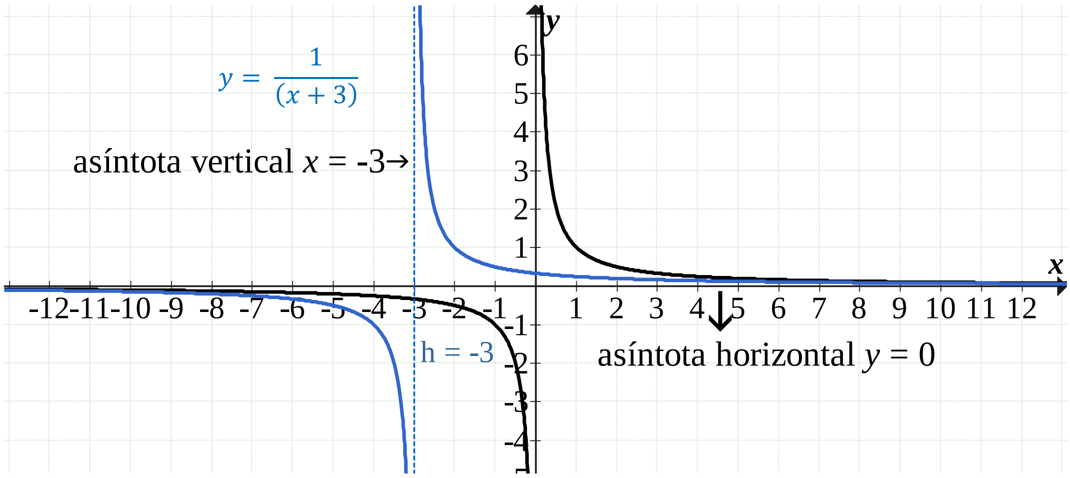
C $^{+}$: (4 ; +∞).

C $^{-}$: (–∞ ; 4).

Raíces: no posee

Ordenada al origen: y = – 0,25

$y = \dfrac{1}{(x+3)}$ $\quad$ $h = -3$



Dom: ℝ – {– 3}

Im: ℝ – {0}

A v: $x = -3$

A h: $y = 0$

C $^{+}$: (– 3 ; +∞).

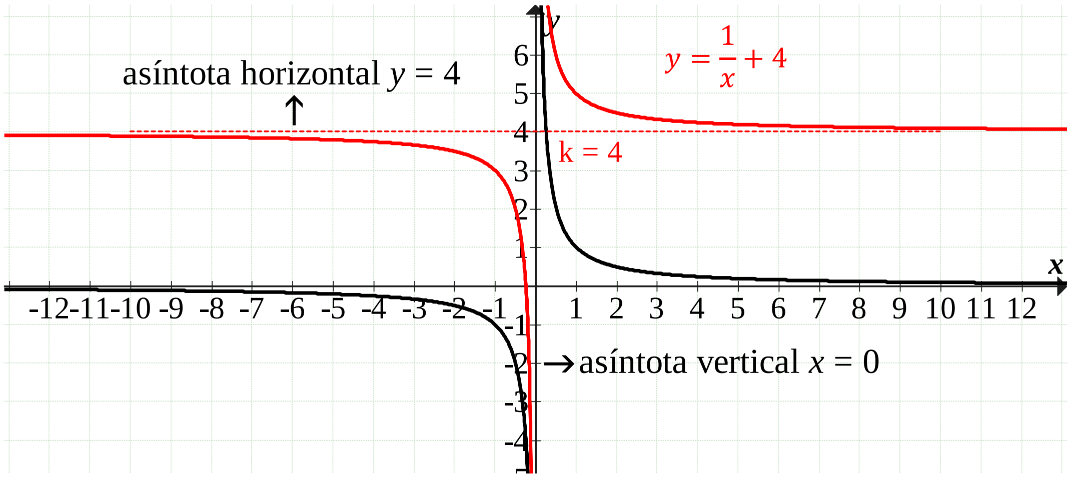
C $^{-}$: (–∞ ; – 3).

Raíces: no posee

Ordenada al origen: $y =$ 0,33…

Desplazamiento vertical $\;y = f(x) + k$

$y = \dfrac{1}{x} + 4$ $\quad$ $k = 4$



Dom: ℝ – {0}

Im: IR – {4}

A v: $x = 0$

A h: $y = 4$

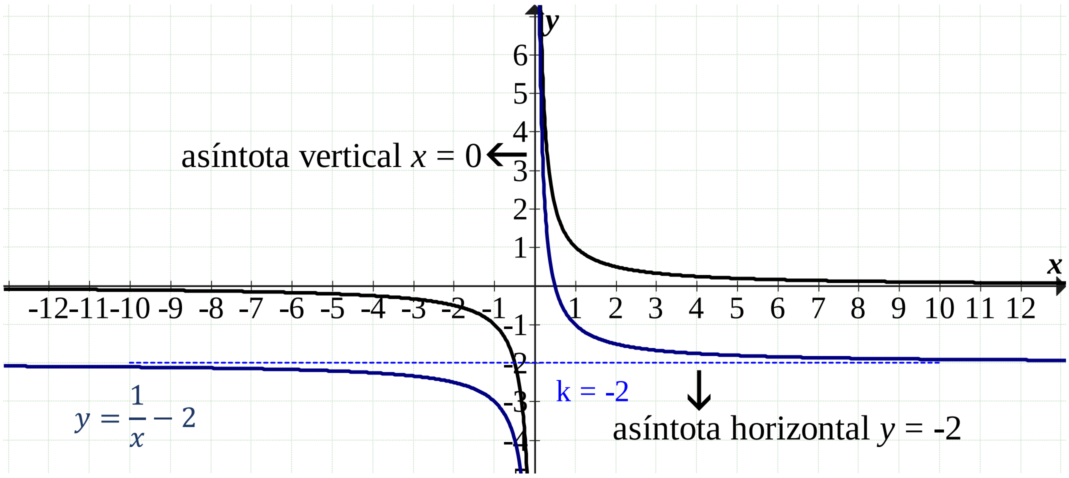
C $^{+}$: (–∞ ; – 0,25) ∪ (0 ; +∞).

C $^{-}$: (– 0,25; 0)

Raíces: x = – 0,25

Ordenada al origen: no posee

$y = \frac{1}{x} - 2 \qquad k = -2$



Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$

Im: $\mathbb{R} - \{-2\}$

A v: $x = 0$

A h: $y = -2$

C $^{+}$: (0; 0,50).

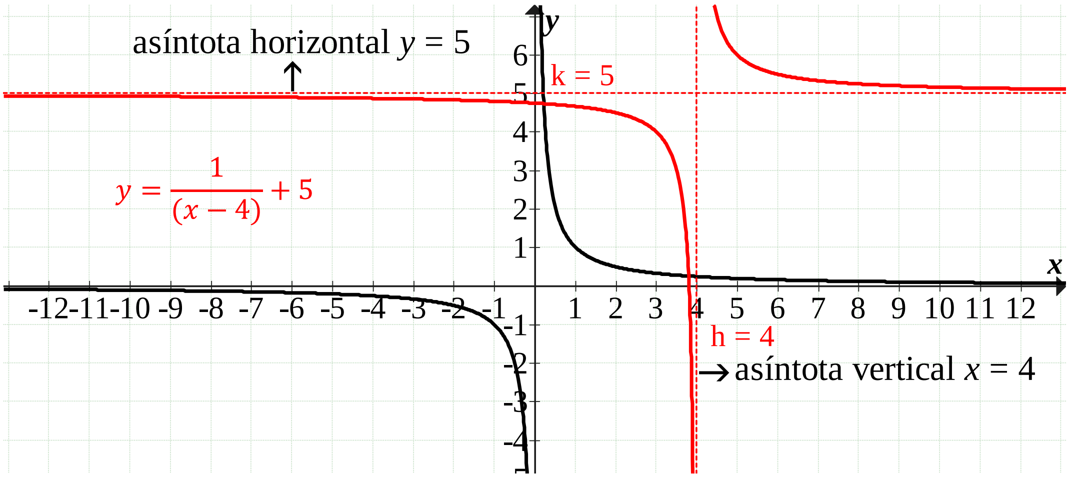
C $^{-}$: $(-\infty\ ,\ 0\ ) \cup (\ 0{,}50;\ +\infty)$

Raíces: $x =$ 0,50

Ordenada al origen: no posee.

Desplazamiento horizontal y vertical $\quad y = f(x - h) + k$

$y = \frac{1}{(x-4)} + 5 \qquad h = 4 \qquad k = 5$



Dom: $\mathbb{R} - \{4\}$

Im: $\mathbb{R} - \{5\}$

A v: $x = 4$

A h: $y = 5$

C $^{+}$: ($-\infty$; 3,80) $\cup$ (4 ; $+\infty$).

C $^{-}$: (3,80; 0).

Raíces: x = 3,80

Ordenada al origen: y = 4,75

8) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento; asíntotas vertical y horizontal, intervalos de positividad y de negatividad; raíces y ordenada al origen de cada una:

a) $y = \frac{1}{(x-2)} - 1$

b) $y = \frac{1}{(x+3)} + 2$

c) $y = -\frac{1}{x}$

d) $y = -\frac{1}{(x+2)} + 1$

e) $y = -\frac{1}{(x-4)}$

f) $y = \frac{1}{(x+2)}$

g) $y = -\frac{1}{x} + 1$

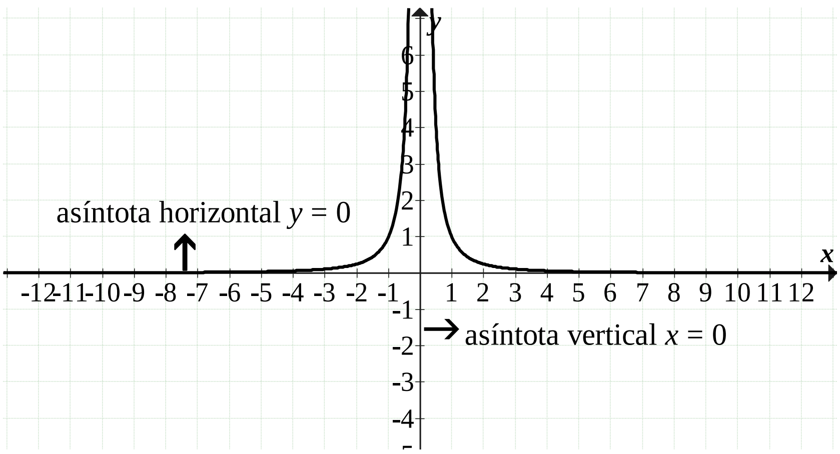
h) $y = \frac{1}{x} + 3$

Veremos ahora la función racional

2) $y = \frac{1}{x^2}$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

x	*f(x)*
-4	$\frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$ =0,0625
-2	0,25
-1	1
-0,50	4
-0,25	16
0	No se puede dividir por cero
0,25	16
0,50	4
1	1
2	0,25
4	0,0625



Como el denominador tiene que ser distinto de cero,

el **dominio** es: ℝ – { 0 }, o (–∞ ; 0) ∪ (0 ; +∞).

La **imagen** es: (0 ; +∞).

Tiene una **asíntota vertical** $x = 0$.

Asíntota horizontal $y = 0$.

C $^+$:(–∞ ; 0) ∪ (0 ; +∞).

C $^-$: no posee.

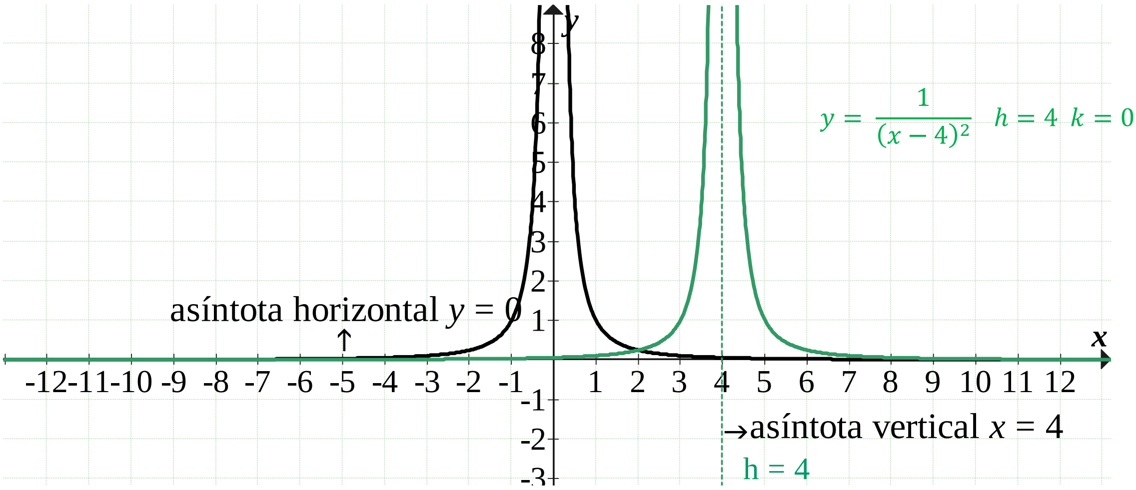
Creciente: (–∞ ; 0).

Decreciente: (0 ; +∞).

No posee **raíces**, y no tiene **ordenada al origen.**

Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$$y = \frac{1}{(x-4)^2} \qquad h = 4$$



Dom: $\mathbb{R} - \{4\}$

Im: $(0;\ +\infty)$

A v: $x = 4$

A h: $y = 0$

Crec: $(-\infty; 4)$

Decrec: $(4; +\infty)$

C $^+$: (–∞ ; 4) ∪ (4 ; +∞).

C $^-$: no posee

Raíces: no posee

Ordenada al origen: $y = 0{,}0625$

y cuando $x = 0$

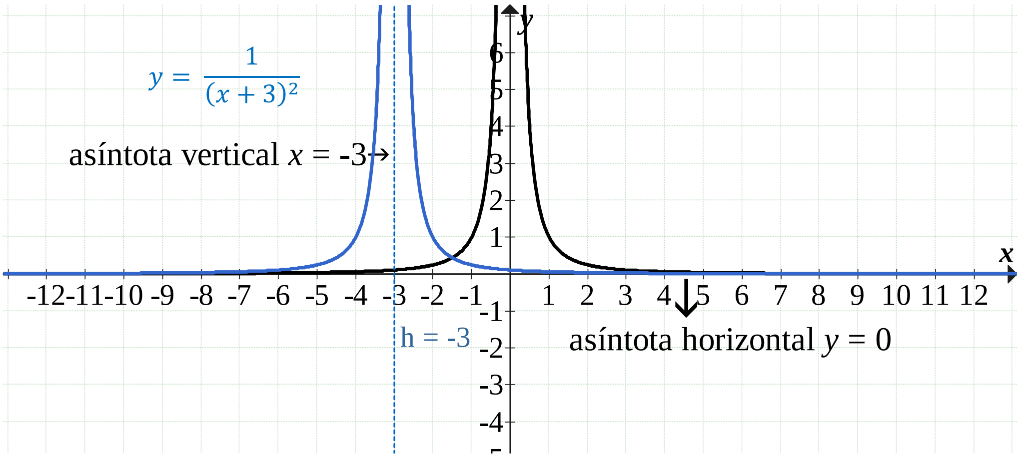
$$y = \frac{1}{(x-4)^2}$$

$$y = \frac{1}{(0-4)^2}$$

$$y = \frac{1}{(-4)^2}$$

$$y = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

$y = \dfrac{1}{(x+3)^2}$ $\quad$ $\mathrm{h} = -3 \; k = 0$



Dom: $\mathbb{R} - \{-3\}$

Im: $(0;\ +\infty)$

A v: $x = -3$

A h: $y = 0$

Crec: $(-\infty; -3)$

Decrec: $(-3; +\infty)$

C $^{+}$: (–∞ ; -3) ∪ (-3 ; +∞).

C $^{-}$: no posee

Raíz: no posee

Ordenada al origen: $y =$ 0,11…

y cuando $x = 0$

$$y = \frac{1}{(x+3)^2}$$

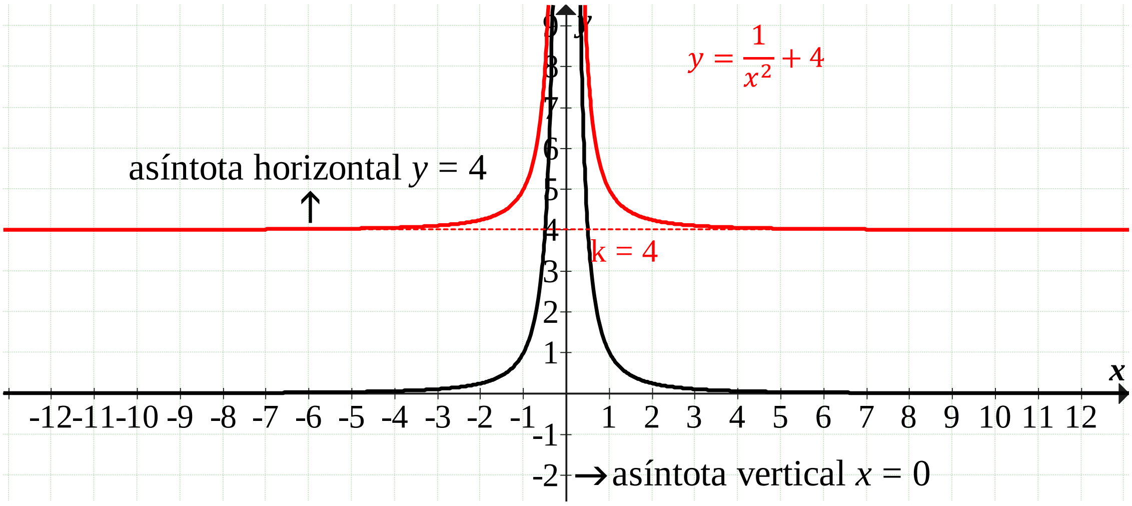
$$y = \frac{1}{(0+3)^2}$$

$$y = \frac{1}{(3)^2}$$

$$y = \frac{1}{9} = 0{,}1111111$$

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$y = \frac{1}{x^2} + 4 \qquad k = 4$



Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$

Im: $(4; +\infty)$

A v: $x = 0$

A h: $y = 4$

Crec: $(-\infty; 0)$

Decrec: $(0;\ +\infty)$

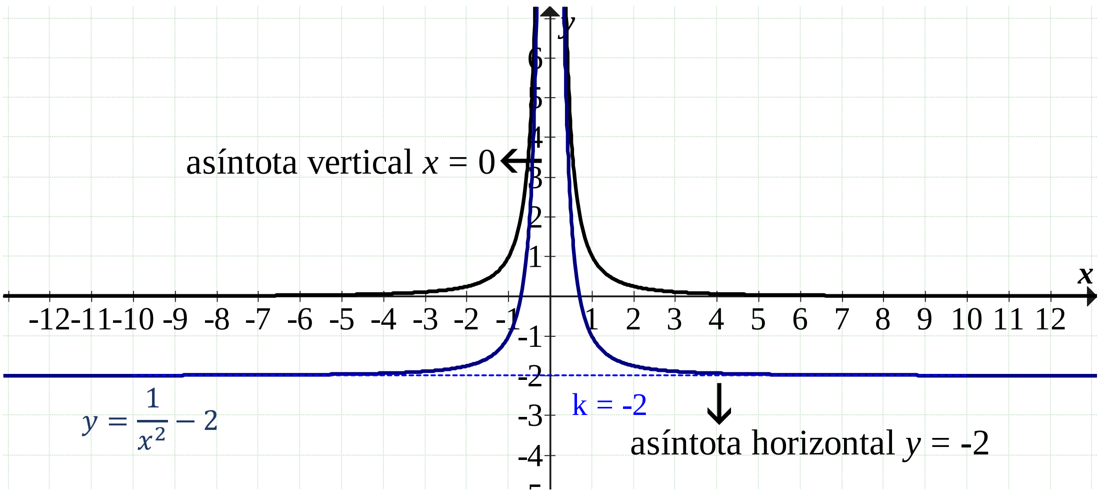
C $^+$: $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$.

C $^-$: no posee

Raíces: x = no posee

Ordenada al origen: no posee

$y = \frac{1}{x^2} - 2 \qquad k = -2$



Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$

Im: $(-2;\ +\infty)$

A v: $x = 0$

A h: $y = -2$

Crec: $(-\infty; 0)$

Decrec: $(0;\ +\infty)$

C $^+$: $(-0{,}71; 0{,}71)$.

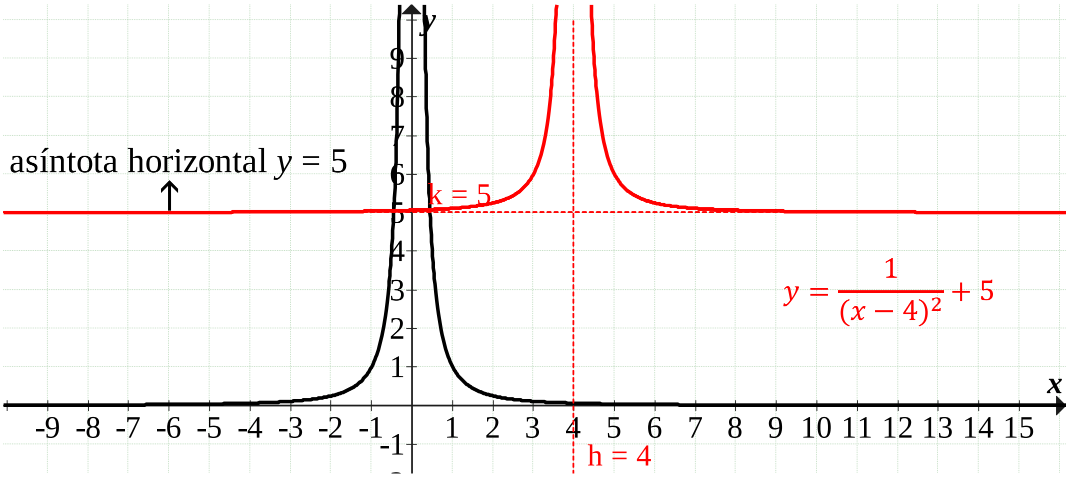
C $^-$: $(-\infty, -0{,}71) \cup (0{,}71; +\infty)$

Raíces: $x_1 = -0{,}71$ y $x_1 = 0{,}71$

Ordenada al origen: no posee.

Desplazamiento horizontal y vertical $y = f(x-h) + k$

$y = \frac{1}{(x-4)^2} + 5$ h = 4 k = 5



Dom: $\mathbb{R} - \{4\}$

Im: $(5;\ +\infty)$

A v: $x = 4$

A h: $y = 5$

Crec: $(-\infty; 4)$

Decrec: $(4;\ +\infty)$

C $^{+}$: (-∞; 4) ∪ (4 ; +∞).

C $^{-}$: no posee

Raíces: no posee

Ordenada al origen: $y = 5{,}06$

ACTIVIDADES

9) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento; asíntotas vertical y horizontal, intervalos de positividad y de negatividad; raíces y ordenada al origen de cada una:

a) $y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1$

b) $y = -\frac{1}{x^2}$

c) $y = -\frac{1}{x^2} - 3$

d) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

e) $y = -\frac{1}{x^2} - 1$

f) $y = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$

g) $y = \frac{1}{x^2} - 2$

h) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 2$