UNIDAD N° 2: NÚMEROS COMPLEJOS.

Existencia de números complejos. Forma Binómica. Representación gráfica. Operaciones con números complejos: suma, resta, multiplicación y división.

Números complejos $\mathbb{C}$

Unidad imaginaria

La **unidad imaginaria** es el número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra *i*.

$$\sqrt{-1} = i$$

$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$

Potencias de la unidad imaginaria

$$\boxed{\begin{array}{c} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array}}$$

$i^{35} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{3} & 8 \end{array}$$

$i^{35} = i^3 = -i$

Números imaginarios

Un **número imaginario** se denota por $\boldsymbol{bi}$, donde:

$\boldsymbol{b}$ es un **número real**.

$\boldsymbol{i}$ es la **unidad imaginaria**.

Números complejos en forma binómica

Al número $\boldsymbol{z = a + bi}$ le llamamos **número complejo** en **forma binómica**.

El número $\boldsymbol{a}$ se llama **parte real** del **número complejo**.

El número $\boldsymbol{b}$ se llama **parte imaginaria** del **número complejo**.

Si $b = 0$ el **número complejo** se reduce a un **número real** ya que $a + 0i = a$

Si $a = 0$ el **número complejo** se reduce a $\boldsymbol{bi}$, y se dice que es un **número imaginario puro**.

Los **números complejos** $\boldsymbol{z = a + bi}$ y $\boldsymbol{-z = -a - bi}$ se llaman **opuestos**.

Los **números complejos** $\boldsymbol{z = a + bi}$ **y** $\boldsymbol{\bar{z} = a - bi}$ se llaman **conjugados**.

Dos **números complejos** son **iguales** cuando tienen **la misma componente real y la misma componente imaginaria.**

Módulo de un complejo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Operaciones de complejos en forma binómica

Suma y resta de números complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = -7 + 7i$$

Multiplicación de números complejos

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 10 - 15i + 4i - 6i^2 = 10 - 11i + 6 = 16 - 11i$$

División de números complejos

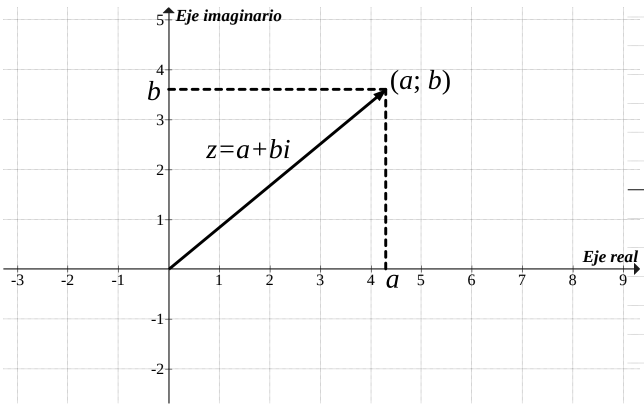
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

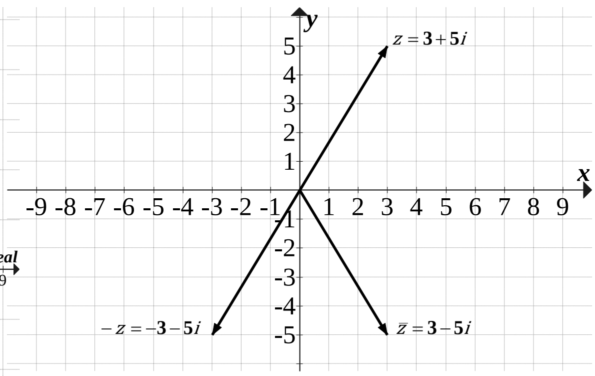
$$\frac{2 + 3i}{1 - 2i} = \frac{(2 + 3i) \cdot (1 + 2i)}{(1 - 2i) \cdot (1 + 2i)} = \frac{2 + 4i + 3i + 6i^2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{2 + 7i - 6}{1 + 4} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan en el **plano complejo**, donde el eje de las abscisas es el **eje real** y el de las ordenadas, el **eje imaginario**.

El número complejo $z = a + bi$ se representa por un vector.





Cuadrado y cubo de un complejo

Para elevar al cuadrado o al cubo un complejo, se desarrolla el cuadrado o el cubo de un binomio.

$$\boldsymbol{(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2}$$

$(3 + 2i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + (2i)^2 = 9 + 12i + 4 \cdot i^2 = 9 + 12i + 4 \cdot (-1) = 9 + 12i - 4$

$= 5 + 12i$

$$\boldsymbol{(a + bi)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot bi + 3 \cdot a \cdot (bi)^2 + (bi)^3}$$

$(2 - i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (-i) + 3 \cdot 2 \cdot (-i)^2 + (-i)^3 = 8 - 12i + 6 \cdot (-1) + (-i)$

$= 8 - 12i - 6 - i = 2 - 13i$

Actividades:

1) Representar gráficamente cada uno de los siguientes complejos:
   a) $z_1 = 2 + 3i$
   b) $z_2 = i$
   c) $z_3 = -3 + 5i$
   d) $z_4 = -5 - 2i$
   e) $z_5 = -4 + 2i$
2) Dados los siguientes complejos:

   $z_1 = 3 - 2i$
   $z_2 = 1 + 3i$
   $z_3 = 3i$
   $z_4 = -5$
   $z_5 = -5 + 2i$

Calcular:
   a) $z_5 - z_1 =$
   b) $z_4 + \bar{z}_5 =$
   c) $z_2 : z_3 =$
   d) $z_2 \cdot z_4 - z_5 =$
   e) $\overline{(z_1 + z_2)} =$
   f) $z_2 \cdot z_3 =$
   g) $z_1 : z_5 =$
   h) $(z_1)^2 - (z_3 \cdot z_4) =$
3) Completar el cuadro y responder:
   a) ¿Qué obtienes al sumar números opuestos?
   b) ¿Qué obtienes al multiplicar complejos conjugados?

z	$-z$	$\bar{z}$	$z + (-z)$	$z \cdot \bar{z}$
$3 - 5i$				
	$-1 + \frac{1}{2}i$			
		$\frac{3}{4} - i$		
	$7 + 4i$			

4) Calcular las siguientes operaciones combinadas:
   a) $\frac{3i\cdot(-2i+1)}{-1+3i} =$
   b) $\frac{1-i}{(1+i)^2} =$
   c) $\left(1+\sqrt{-3}\right)^{-2} =$
   d) $\frac{(1+i)^3}{3i} =$
5) Resolver las siguientes ecuaciones:
   a) $x^2 + 2 = -16$
   b) $(3+i)\cdot x + i = 5i$
   c) $x\cdot(2-i) = 4+3i$
   d) $\frac{1-2i}{x} = 2+i$
6) Indicar el valor de:
   a) $i^{10} =$
   b) $i^{51} =$
   c) $i^{34} =$
   d) $(i^{12})^{10} =$
   e) $i^7 + i^{11} + i^0 =$
7) Calcular:
   a) $\left(3-\sqrt{2}\,i\right)\cdot\left(3+\sqrt{2}\,i\right) =$
   b) $(9i)^2 =$
   c) $(5-2i)^2 =$
   d) $(-2+2i)^3 =$
   e) $(3+i)+(-5i)\cdot\left(\frac{1}{5}-i\right) =$
   f) $-3i+\frac{1}{2}i^5+i^3 =$
   g) $\frac{1}{2}+i^3+2+i^7 =$