Colegio Dr. B. A. Houssay

Unidad N° 2: Factorización de Polinomios

Factorizar *un polinomio, de* ***n*** *cantidad de términos, es expresarlo como un* ***producto*** *de polinomios* ***primos****.*

Factor común

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$a(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo.

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x.$

$P(x) = 2x.x - 2.2x \rightarrow 2x$ es el factor común de los dos términos.

$P(x) = 2x(x - 2) \rightarrow$ Expresión factoreada de $P(x)$ a través del factor común.

$\frac{2x^2}{2x}$ $\frac{4x}{2x}$ $\rightarrow$ Dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada término por 2x.

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

Para normalizar un polinomio, se debe sacar como factor común el coeficiente principal.

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$$

Polinomio normalizado

Factor común por grupos

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos.

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$P(x) = \underbrace{(x^5 - 2x^4)}_{x^4} + \underbrace{(-3x + 6)}_{-3} \longrightarrow$ Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.

$P(x) = x^4(x - 2) -3(x - 2) \longrightarrow$ En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$P(x) = (x - 2)(x^4 - 3) \longrightarrow$ Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

b) $Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2) = 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)$

$Q(x) = (x + 1)(3x^2 + 2)$

Diferencia de cuadrados

P(x)= $x^2 - a^2 = (x - a)\ .\ (x + a)$

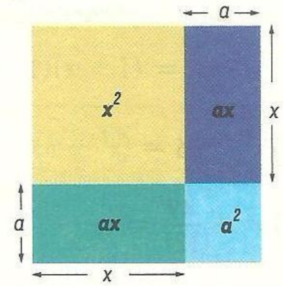
Trinomio cuadrado perfecto

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2 \longrightarrow$ **Cuadrado de un binomio:** expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto.

$\downarrow$

Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del cuadrado del binomio.

$$\mathbf{x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^2}$$



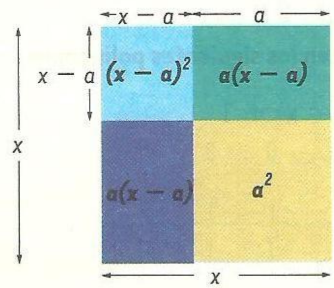
$$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$$
$$= x^2 + 2ax + a^2$$

a) $P(x) = x^2 + 6x + 9 = \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^2} + 2.3x + \underset{\underset{3}{\downarrow}}{3^2} = (x + 3)^2$

b) $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^2} - 2.2x + \underset{\underset{2}{\downarrow}}{2^2} = (x - 2)^2$

c) $R(x) = x^2 + \underset{\downarrow}{8x} + 9 = \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^2} + 2.4x + \underset{\underset{3}{\downarrow}}{3^2}$ $\quad 3 \neq 4$

No es trinomio cuadrado perfecto



$$(x - a)^2 = x^2 - a(x - a) - a(x - a) - a^2$$
$$= x^2 - ax + a^2 - ax + a^2 - a^2$$
$$= x^2 - 2ax + a^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2.x + a^3 = (x + a)^3 \longrightarrow$ **Cubo de un binomio:** expresión factorizada del cuatrinomio cubo perfecto.

$\downarrow$

Cuatrinomio cubo perfecto: es el desarrollo del cubo del binomio.

$x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2.x \pm a^3 = (x \pm a)(x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^3 \longrightarrow$ **Expresión factorizada**

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$$
$$= (x^2 + 2ax + a^2)(x + a)$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a)$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)(x - a)$$
$$= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

a) $T(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^3} + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + \underset{\underset{2}{\downarrow}}{2^3} = (x + 2)^3$

b) $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^3} - 3.1x^2 + 3.1^2.x - \underset{\underset{1}{\downarrow}}{1^3} = (x - 1)^3$

c) $M(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 8 \neq \underset{\underset{x}{\downarrow}}{x^3} - 3.2x^2 + 3.2^2.x - \underset{\underset{2}{\downarrow}}{2^3} \longrightarrow$ No es cuatrinomio cubo perfecto

$6 \neq 4 \quad 12 \neq 8$

Teorema de Gauss

*Si el polinomio P(x), de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces **p** es divisor del término independiente y **q** lo es del coeficiente principal.*

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + d$:

- se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- se buscan las posibles raíces: p $\rightarrow$ Divisores del término independiente.

  q $\rightarrow$ Divisores del coeficiente principal.

Todo polinomio P(x), de grado n, de n raíces reales, puede factorizarse como:

$$\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}$$

Siendo **a** el coeficiente principal de P(x) y $x_1; x_2; \ldots; x_n$ sus n raíces reales.

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$:

Divisores del término independiente, (-3): $\pm 1, \pm 3$

Divisores del coeficiente principal, (2): $\pm 1, \pm 2$

Posibles raíces $\frac{p}{q}$

$x_1 = \pm 1; x_2 = \pm \frac{1}{2}; x_3 = \pm 3; x_4 = \pm \frac{3}{2}$

Se especializa el polinomio P(x) por las posibles raíces (x_n es raíz si $P(x_n) = 0$).

$P(-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, **es raíz**

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$, **es raíz**

$P(3) = 0 \Rightarrow x_3 = 3$, **es raíz**

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow P(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

*Un polinomio P(x) tiene una raíz **múltiple** si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.*

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P_1(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$	$x_1 = -1 \wedge x_2 = -\frac{1}{2} \wedge x_3 = 3$	Tres raíces simples
$P_2(x) = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$	$x_1 = x_2 = -1$	Una raíz doble
$P_3(x) = (x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$	$x_1 = x_2 = x_3 = 2$	Una raíz triple
$P_4(x) = (x + 2)^2.(x - 1)^3$	$x_1 = x_2 = -2 \wedge x_3 = x_4 = x_5 = 1$	-2, raíz doble y 1, raíz triple
$P_5(x) = x^3(x + 3) = x.x.x(x + 3)$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \wedge x_4 = -3$	0, raíz triple y -3, raíz simple

Actividades

1) Factoricen los siguientes polinomios.

a) $12x^2 - 4x + 4 =$

b) $x^7 + x^5 =$

c) $24x^5 + 18x^4 - 30x^2 =$

d) $x^4 - x^3 + x - 1 =$

e) $4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 =$

2) **Resuelve aplicando diferencia de cuadrados**.

a) $x^2 - 9 =$

b) $x^4 - 36 =$

c) $x^2 - \frac{49}{121}$

d) $25x^2 - 4 =$

3) **Exprese cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un** binomio.

a) $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

b) $T(x) = x^6 + 4x^3 + 4$

c) $S(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

d) $G(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$

4) **Expresen cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.**

a) $D(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

b) $P(x) = x^3 - 12x^2 + 75x + 125$

c) $T(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$

d) $R(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$

5) **Hallen las raíces de los siguientes polinomios y factorice.**

a) $A(x) = x^2 + x - 6$

b) $B(x) = x^3 - 3x + 2$

c) $C(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

d) $D(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$