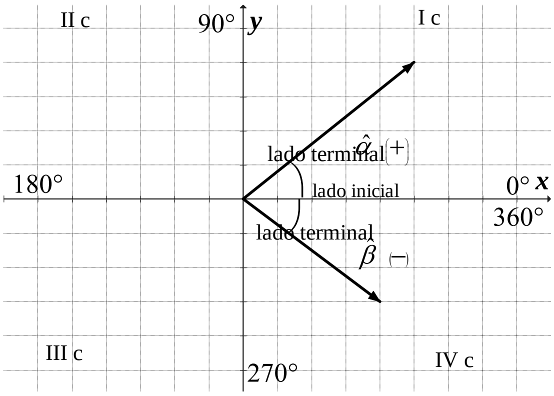
Ángulos orientados en un sistema cartesiano

Se dice que un ángulo está orientado en un sistema cartesiano si:

- Su **vértice** es el origen del sistema de ejes cartesianos.
- El **lado inicial** coincide con el semi-eje positivo de las “*x*”; y gira manteniendo fijo su vértice hasta llegar al **lado terminal**.
- Si gira en sentido contrario a las agujas del reloj, el sentido es **positivo**.
- Si gira en sentido a favor de las agujas del reloj, el sentido es **negativo**.
- El plano cartesiano queda dividido en 4 sectores llamados **cuadrantes** en los cuales localizamos el lado terminal.



Sistema de medición de ángulos

Para medir ángulos se utilizan distintos sistemas de medición.

Sistema sexagesimal

La unidad en este sistema es el grado; que es el cociente de un ángulo recto por el número 90.

$$1° = \frac{1R}{90} \text{ entonces } 1R = 90°$$

$$1' = \frac{1°}{60} \text{ entonces } 1° = 60'$$

$$1'' = \frac{1'}{60} \text{ entonces } 1' = 60''$$

$$1° = 3600''$$

Sistema circular o radial

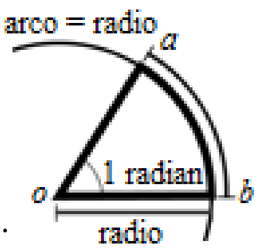
El ángulo unidad es el radian (rad), que es un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y cuyos lados abarcan un arco de longitud igual al radio de la circunferencia.

$$r = \overline{ob}$$

$$\widehat{ab} = \overline{ob}$$

$$\hat{\alpha} = 1rad$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{ab}}{\overline{ob}}$$



El valor de un ángulo de un giro es de 2π radianes.

Equivalencias entre los distintos sistemas

Sistema sexagesimal	Sistema circular
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

Relación entre los sistemas de medición de ángulos

Para convertir del sistema sexagesimal al radial y viceversa, se utilizan siempre reglas de tres simple directa.

Ejemplo:

1) Del sistema sexagesimal al circular

$\hat{\alpha} = 140°$

$180° \_\_\_\_\_ \pi \text{ rad}$

$140° \_\_\_\_\_ \frac{140° \cdot \pi \text{ rad}}{180°} = \frac{7}{9}\pi \text{ rad}$

2) Del sistema circular al sexagesimal

$\hat{\alpha} = \frac{3}{4}\pi$

$\pi \text{ rad} \_\_\_\_ 180°$

$\frac{3}{4}\pi \_\_\_\_\_ \frac{\frac{3}{4}\pi \cdot 180°}{\pi} = 135°$

Razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo, existen ciertas relaciones entre sus elementos.

- Los ángulos agudos son complementarios: $\boxed{\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°}$
- La relación pitagórica: $\boxed{\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2}$
- Las **razones trigonométricas** relacionan las longitudes de los lados con la amplitud de los ángulos agudos.

– **Seno** ⟶ $\boxed{\text{sen } \hat{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}$ $\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ab}}$ y $\text{sen } \hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$

– **Coseno** ⟶ $\boxed{\cos \hat{x} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}}$ $\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$ y $\cos \hat{\beta} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ab}}$

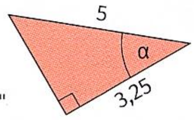
– **Tangente** ⟶ $\boxed{\text{tg } \hat{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}}$ $\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ac}}$ y $\text{tg } \hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{\overline{cb}}$

Cálculo de un ángulo agudo a partir de dos lados

Para hallar la amplitud del ángulo agudo de un triángulo rectángulo si se conocen dos de sus lados, se debe utilizar la calculadora científica.

$\cos \hat{\alpha} = \frac{3,25}{5} = 0,65$

$\hat{\alpha} = \text{invcos}\ 0,65 \cong 49°\ 27'\ 30''$

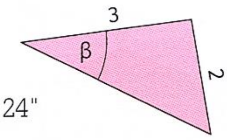


Secuencia de teclas en la calculadora:

SHIFT | cos | 0 | . | 6 | 5 | = | ° ' "

$\text{tg}\ \hat{\beta} = \frac{2}{3} = 0,\hat{6}$

$\hat{\beta} = \text{invtg}\ \frac{2}{3} \cong 33°\ 41'\ 24''$



Secuencia de teclas en la calculadora:

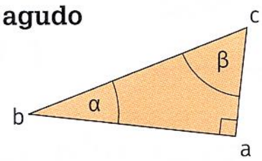
SHIFT | tan | 2 | a b/c | 3 | = | ° ' "

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo es hallar la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus ángulos agudos a partir de dos de sus datos y utilizando siempre esos datos.

Resolver un triángulo si se conoce un lado y un ángulo agudo

$$\text{Datos} \begin{cases} \hat{\alpha} = 36°\ 27'\ 43'' \\ \overline{ab} = 12,35\ \text{cm} \end{cases} \qquad \text{Incógnitas} \begin{cases} \hat{\beta} \\ \overline{bc} \\ \overline{ac} \end{cases}$$



Cálculo de $\hat{\beta}$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° \Rightarrow \hat{\beta} = 90° - \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\beta} = 90° - 36°\ 27'\ 43'' \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\beta} = 53°\ 32'\ 17''}$$

Cálculo de $\overline{bc}$

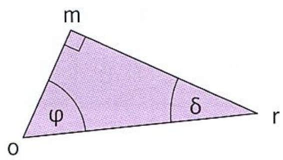
$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \overline{bc} = \frac{\overline{ab}}{\cos \hat{\alpha}} \Rightarrow \overline{bc} = \frac{12,35}{\cos 36°\ 27'\ 43''} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{bc} \cong 15.36}$$

Cálculo de $\overline{ac}$

$$\text{tg}\ \hat{\alpha} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab}\,.\,\text{tg}\ \hat{\alpha} \Rightarrow \overline{ac} = 12,35\,.\,\text{tg}\ 36°\ 27'\ 43'' \Rightarrow \boldsymbol{\overline{ac} \cong 9.13}$$

Resolver un triángulo si se conoce dos lados

$$\text{Datos} \begin{cases} \overline{mr} = 7,15\ \text{cm} \\ \overline{or} = 8,63\ \text{cm} \end{cases} \qquad \text{Incógnitas} \begin{cases} \hat{\varphi} \\ \hat{\delta} \\ \overline{om} \end{cases}$$



Cálculo de $\overline{om}$

$$\overline{or}^2 = \overline{om}^2 + \overline{mr}^2 \Rightarrow \overline{om} = \sqrt{\overline{or}^2 - \overline{mr}^2} \Rightarrow \overline{om} = \sqrt{8,63^2 - 7,15^2} \Rightarrow \boldsymbol{\overline{om} \cong 4.83}$$

Cálculo de $\hat{\varphi}$

$$\text{sen}\ \hat{\varphi} = \frac{\overline{mr}}{\overline{or}} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{\varphi} = \frac{7,15}{8,63} \Rightarrow \hat{\varphi} = \text{invsen}\ \frac{7,15}{8,63} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\varphi} \cong 55°\ 56'\ 44''}$$

Cálculo de $\hat{\delta}$

$$\cos \hat{\delta} = \frac{\overline{mr}}{\overline{or}} \Rightarrow \cos \hat{\delta} = \frac{7,15}{8,63} \Rightarrow \hat{\delta} = \text{invcos}\ \frac{7,15}{8,63} \Rightarrow \boldsymbol{\hat{\delta} \cong 34°\ 3'\ 16''}$$

TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

La palabra TRIGONOMETRIA proviene del griego Trigonom: triangulo y Metrom: medida. Entonces significa "MEDIDA DE TRIANGULOS".

Desde sus orígenes, la TRIGONOMETRIA estudia: las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos líneas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

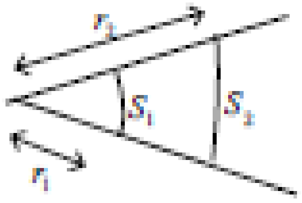
SISTEMA DE MEDICIÓN ANGULAR

Para expresar la medida de un ángulo, se pueden utilizar los siguientes sistemas:

- **Sistema sexagesimal:** su unidad de medida es el "grado sexagesimal"; donde un grado sexagesimal (simbólicamente 1°) representa la noventa-ava parte de un ángulo recto.

$$1° = \frac{\text{ángulo recto}}{90} \Rightarrow 90° = \text{ángulo recto}$$

- **Sistema Radial:** Para definir la unidad de medida de este sistema, analicemos previamente: Sea un ángulo cualquiera, con centro en el vértice del ángulo y radios r_1 y r_2, si se trazan arcos de circunferencias de longitudes S_1, S_2; se obtiene la siguiente figura:



Se verifica que:

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = a \ ; \quad \text{con } a = \text{cte}$$

Para cualquier radio r, y la correspondiente longitud de arco S, se verifica:

$$\frac{S}{r} = a \Rightarrow S = a \cdot r$$

La constante "a" es característica del ángulo en cuestión y determina el valor del ángulo. Se dirá que el ángulo se mide en "radianes".

Un **radián** es la medida del ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia, en la que está centrado.

Nota: Sabiendo que el ángulo central positivo de un giro es $\alpha = 360°$ y recordando que la longitud de la circunferencia es $2.\pi.r$, un ángulo central verifica:

$\alpha = 360° = \frac{S}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ Por lo tanto: **$360° = 2\pi$ radianes**

<u>Ejemplos:</u>

a) Determinar los radianes que representan 35°.

$$360° \;\_\_\_\_\; 2\pi \text{ rad}$$
$$35° \;\_\_\_\_\; x \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{35°.2\pi \text{ rad}}{360°} = \frac{7}{36}\pi \text{ rad}$$

b) Determinar los grados sexagesimales que representan 3π rad.

2π rad 360°

3π rad $x \Rightarrow x = \frac{3\pi \text{ rad} . 360°}{2\pi \text{ rad}}$; luego $x = 540°$

<u>ACTIVIDADES</u>

1. Calcular la medida de los siguientes ángulos en radianes:

a) $\hat{a} = 18°$ b) $\alpha = 78°$

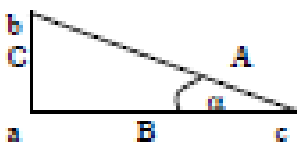
2. Calcular la medida de los siguientes ángulos en grados:

a) $\hat{e} = \frac{3}{7}\pi$ b) $\alpha = 3$ rad

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llaman razones trigonométricas a las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Considerando el ángulo α se pueden definir las seis razones de la siguiente forma:



$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}} = \frac{C}{A}$

$\sec\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat ady}} = \frac{A}{B}$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}} = \frac{B}{A} \qquad \text{cosec}\ \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat op}} = \frac{A}{C}$$

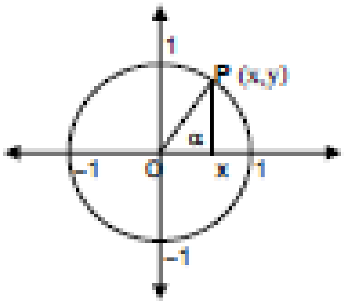
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}} = \frac{C}{B} \qquad \text{cotg}\ \alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{cat op}} = \frac{B}{C}$$

De las definiciones anteriores se deduce que

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}\ ;\ \text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}\ ;\ \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}\ ;\ \text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\ \alpha}}$$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Recibe el nombre de **circunferencia trigonométrica** la circunferencia de centro en el origen de coordenadas cartesianas (0,0) y de radio r = 1.



Al considerar un punto P(x,y) perteneciente a la circunferencia trigonométrica y unir el punto P con el origen de coordenadas se obtiene el segmento $\overline{OP}$ = r = 1 (radio de la circunferencia), que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo OPX.

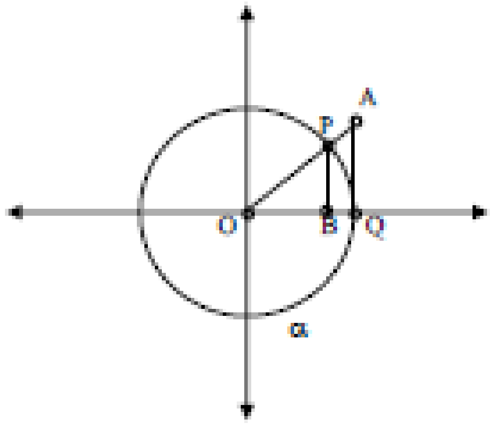
Observando el gráfico es claro que:

$\overline{OP}$ = r = **hipotenusa**

$\overline{OX}$ = x (abscisa del punto P) = **cateto adyacente** del ángulo α (en el triángulo OPX)

$\overline{PX}$ = y (ordenada del punto P) = **cateto opuesto** del ángulo α (en el triángulo OPX)

Las razones trigonométricas tienen una **representación segmentaria** en la circunferencia trigonométrica, que para ángulos del primer cuadrante es:

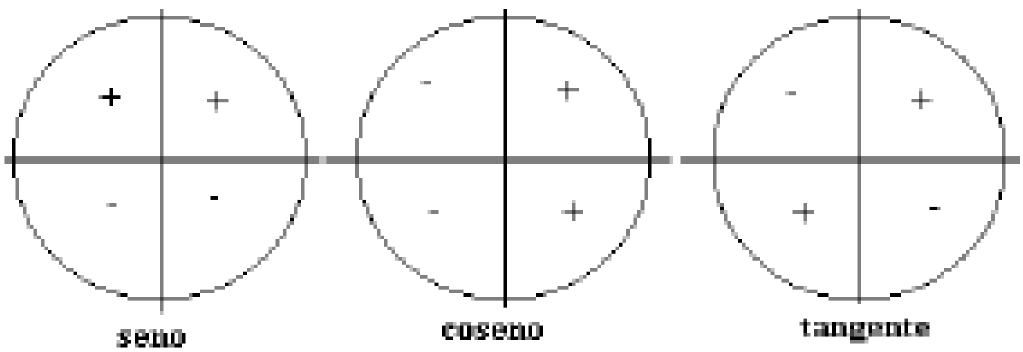


$\overline{OB}$ = **x**: representa el cos α

$\overline{PB}$ = y: representa el **sen** α

$\overline{QA}$: representa la **tg** α

Nota: Las razones presentan los siguientes signos de acuerdo a cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas:



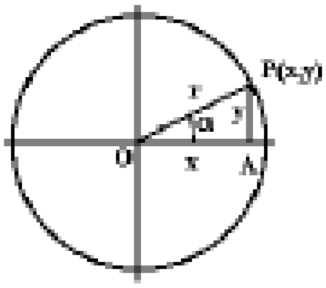
<u>ACTIVIDAD</u>

Completar el siguiente cuadro con el signo correspondiente.

α	sen α	cos α	tg α	cotg α	cosec α	sec α
1° Cuadrante						
2° Cuadrante						
3° Cuadrante						
4° Cuadrante						

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

- **Teorema fundamental.**



$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{y}{r}$ de donde $y = r\,\text{sen}\,\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ de donde $x = r\cos\alpha$

Además, según Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

luego tenemos que:

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\text{sen}^2\alpha = r^2$$

de donde resulta la expresión:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Calcular sen α y tg α, usando la Relación Fundamental, sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

Calcular cos α y cotg α, usando la Relación Fundamental, sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

INVERSAS DE RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Puede observarse la siguiente situación:

Para el ángulo α de 30°; o sea para el arco $\frac{\pi}{6}$, le corresponde el valor de la función seno igual a 0,5;

es decir: $0,5 = \text{sen}\ \frac{\pi}{6}$.

Esta "relación" implica que $\frac{\pi}{6}$ es el "arco cuyo seno" es 0,5.

Simbólicamente, se puede expresar lo siguiente:

Si "y" es el seno de "x", esto implica que "x" es el "arco cuyo seno" es "y".

$$y = \text{sen}\ x \Rightarrow x = \text{arco sen}\ y$$

La relación "arco seno" es la inversa del seno.

Análogamente:

$$y = \cos x \Rightarrow x = \text{arco coseno}\ y$$
$$y = \text{tg}x \Rightarrow x = \text{arco tg}\ y$$

Tener en cuenta el siguiente cuadro, que ayudará para ubicar el ángulo en el cuadrante correspondiente, conociendo la relación trigonométrica.

Valor de la Relación Trigonométrica	Ángulo agudo dado por la calculadora
Seno – Positivo	α , $(180° - \alpha)$
Seno – Negativo	$(\alpha + 360°)$, $(\lvert\alpha\rvert + 180°)$
Coseno – Positivo	α , $(360° - \alpha)$
Coseno – Negativo	α , $(360° - \alpha)$
Tangente – Positivo	α , $(\alpha + 180°)$
Tangente – Negativa	$(\alpha + 360°)$, $(180° + \alpha)$

Ejemplos:

a) sen α = 0,5 → α = 30° (valor de calculadora)
→ $180° - \alpha = 150°$

b) sen α = -0,5 → α = -30° (valor de calculadora)
→ Rtas: $-30° + 360° = 330°$

$\lvert -30° \rvert + 180° = 210°$

c) cos α = 0,5 → α = 60° (valor de calculadora)
→ $360° - \alpha = 300°$

d) tg α = 1 → α = 45° (valor de calculadora)
→ $\alpha + 180° = 45° + 180° = 225°$

e) tg $\alpha = -1$ $\longrightarrow$ $\alpha = -45°$ (valor de calculadora)

$360° + \alpha = 315°$

$180° + \alpha = 135°$

ACTIVIDADES

1. Haciendo uso de la calculadora, obtener el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 100° =

b) cos 0,5 =

c) tg 20° 10' 3'' =

d) cotg 2,6° =

e) cotg 2,6 =

f) sec 20,1 =

g) cosec 142° 15'' =

2. Si tg $\alpha = 2,5$ y α está en el primer cuadrante. ¿Cuánto mide α en radianes?

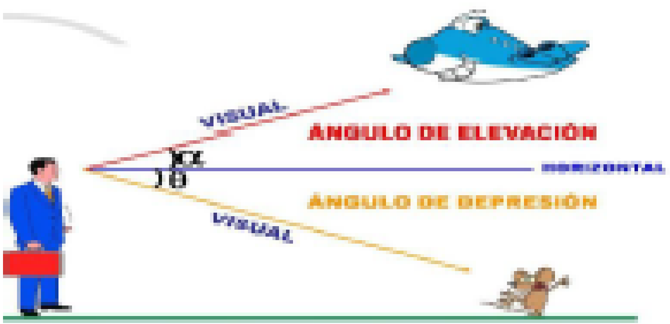
3. Si sen $\hat{a}$ = 0,5 y $\hat{a}$ pertenece al II cuadrante; ¿Cuánto mide $\hat{a}$ en sexagesimal?

4. Calcular las demás razones trigonométricas de α sabiendo que sen $\alpha = \frac{4}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

5. Calcular las demás razones trigonométricas de α sabiendo que cos $\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y α está en el tercer cuadrante.

APLICACIÓN DE TRIGONOMETRÍA EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Otro de los conceptos que aplicamos para dar solución a las situaciones planteadas mediante un triángulo rectángulo es el de ANGULO DE ELEVACION Y ANGULO DE DEPRESION.



El término ángulo de elevación denota al ángulo desde la horizontal hacia arriba a un objeto. El término ángulo de depresión denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto. Una línea de vista para el observador estaría debajo de la horizontal.

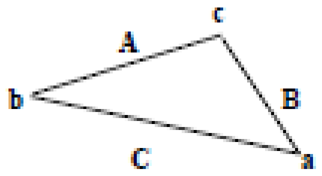
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto.

- **Teorema del seno**

"En todo triángulo oblicuángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

$$\frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$



- **Teorema del coseno**

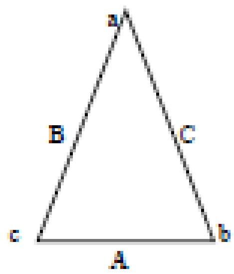
"El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

Según los datos del problema, el teorema se puede aplicar de las formas siguientes:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,.\,C\,.\cos\hat{a}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\,A\,.\,C\,.\cos\hat{b}$$

$$C^2 = B^2 + A^2 - 2\,B\,.\,A\,.\cos\hat{c}$$



ACTIVIDADES

1. Sea abc un triángulo rectángulo en $\hat{a}$, el segmento $\overline{ab}$ mide 20 cm. y el ángulo $\hat{c}$, opuesto a ese lado, mide 42°. Calcular:

a) el lado $\overline{ac}$ b) el lado $\overline{bc}$ c) el ángulo $\hat{b}$

2. Sea abc un triángulo rectángulo en $\hat{a}$, los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ miden 2 m y 4 m, respectivamente. Calcular:

a) el lado $\overline{bc}$ b) el ángulo $\hat{b}$ c) el ángulo $\hat{c}$

3. Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 36° y tienen longitudes de 3 y 8 cm. Determina la longitud de la diagonal menor.