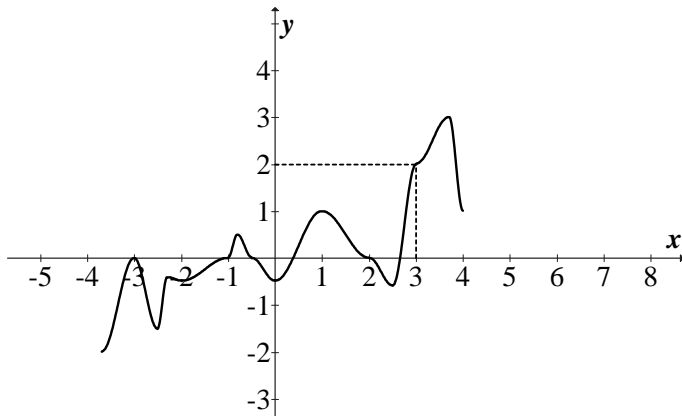


UNIDAD N° 3: LÍMITE

¿Qué es un límite?

Es el valor al cual “se aproxima” una función cuando “ x tiende a un valor determinado”



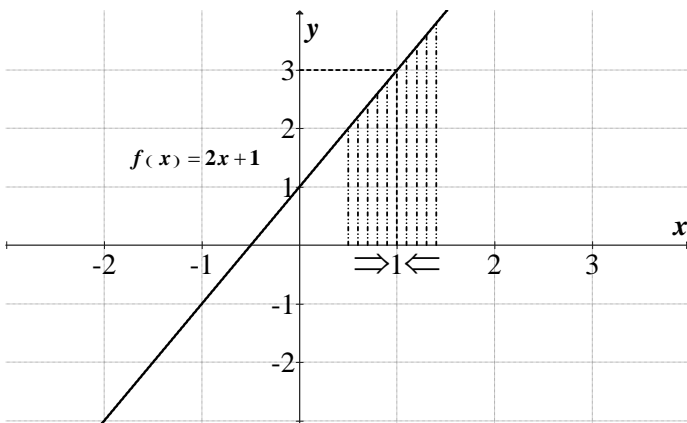
El límite de la función cuando “ x tiende a 3” es 2

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

Límites Laterales

Vamos a analizar la función: $f(x) = 2x + 1$

Veamos que pasa a medida que la x “se acerca al valor 1” y vamos a usar para esto unas tablas de valores, pero antes veamos que es esto de los límites laterales:

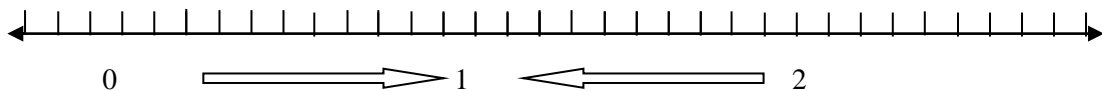


Para calcular el límite de la función para “ x tendiendo a 1” tengo que acercarme a 1 por la izquierda y por la derecha

Así voy a tener dos límites:

- El límite para “ x tendiendo a 1 por la izquierda”
- El límite para “ x tendiendo a 1 por derecha”

Para que **exista** el límite de la función en un punto, **los límites laterales deben ser iguales**.



Me acerco a 1 por **izquierda**

Nos acercamos a 1 desde la izquierda

x	y
0	1
0,5	2
0,6	2,2
0,7	2,4
0,8	2,6
0,9	2,8
0,95	2,9
0,99	2,98

A medida que x se acerca a 1 “por izquierda” y se acerca a 3

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

Este es el límite de la función para x tendiendo a 1 por izquierda

Me acerco a 1 por **derecha**

Nos acercamos a 1 desde la derecha

x	y
2	5
1,5	4
1,4	3,8
1,3	3,6
1,2	3,4
1,1	3,2
1,05	3,1
1,01	3,02

A medida que x se acerca a 1 “por derecha” y se acerca a 3

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

Este es el límite de la función para x tendiendo a 1 por derecha

Por último decimos que como los **límites laterales coinciden** entonces **existe el límite** de la función para “x tendiendo a 1” y vale 3.

Cálculo de límites

Para calcular el límite hay que reemplazar el “x” por el valor al que quiero que “se acerque” (ósea el valor al cual tiende x).

Ejemplo: calcular el límite de $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ para x tendiendo a -2

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow -2} 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 2 \cdot 4 - 6 - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

Otro ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x+3}}$

Siempre lo primero que hago cuando tengo que calcular un límite es reemplazar “x” por el valor al cual “tiende el límite”

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x+3}} = \frac{3 \cdot (1)^2 - 1}{\sqrt{1+3}} = \frac{3 - 1}{\sqrt{4}} = \frac{2}{2} = 1$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 1}{\sqrt{x+3}} = 1$$

Límites Infinitos

A veces cuando calculamos un límite, nos da infinito.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{5x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2 - 10} = \frac{10}{0}$$

Y ahora, la pregunta es: ¿Cómo hago esta cuenta?

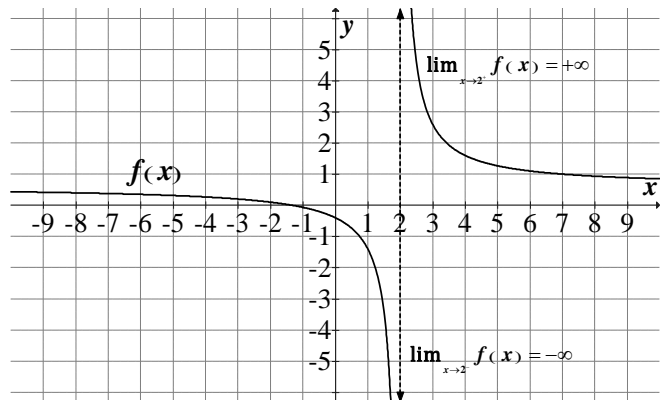
Ya sabemos que no existe la división por “cero”. Pero en realidad **no tenemos que dividir por “cero”** Ya que lo que estamos calculando es un límite. **El denominador no es CERO, sino que “tiende” a CERO.**

Veamos: calculemos los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x + 4}{5x - 10} = \frac{10}{0,0000000 \text{ "algo"}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x + 4}{5x - 10} = \frac{10}{-0,0000000 \text{ "algo"}} = -\infty$$

Por lo tanto el **límite da infinito**



Límites Indeterminados

Venía muy fácil ¿no?. Bueno, ahora se va a complicar un poco.

Veamos que pasa si quiero calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Entonces la pregunta es: **¿Cuánto da ese límite?**



Esta cuenta no sólo no se puede hacer, sino que, además, es **indeterminada**

Para saber eso vamos a tener que resolver la **Indeterminación**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 2}{1} = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x - 2 = 3^2 - 3 - 2 = 4$$

Luego de salvar la indeterminación el límite da 4.

- ❖ Por lo general la mayoría de los límites indeterminados en los que aparecen raíces se resuelven multiplicando las expresiones de las raíces por sus expresiones conjugadas.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{2-x} = \frac{0}{0} \text{ INDETERMINADO}$$

Para “salvar la indeterminación” tenemos que multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del numerador.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{2-x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{2-x} \cdot \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3)^2 - (\sqrt{x+7})^2}{(2-x) \cdot (3 + \sqrt{x+7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (x+7)}{(2-x) \cdot (3 + \sqrt{x+7})} \\ &= \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x - 7}{(2-x) \cdot (3 + \sqrt{x+7})} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(2-x) \cdot (3 + \sqrt{x+7})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(3 + \sqrt{x+7})} = \frac{1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

INDETERMINACIÓN “INFINITO SOBRE INFINITO”

Esta indeterminación se da cuando “**x**” **tiende a infinito** y por lo tanto tiende a infinito el numerador y el denominador al mismo tiempo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ INDETERMINADO}$$

Para “salvar la indeterminación” hay que **dividir numerador y denominador por x elevada al mayor exponente** que tenga.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{1}{\infty}} = \frac{3 + 0 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$

Simplificando reemplazo “x”

Importante: no confundir

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{m} = \frac{0}{m} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{x} = \frac{m}{0} = \infty}$$

Ejercitación

I. Calcular los siguientes límites

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{2x + 2} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2x + 6 =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -4} -3x + 2 =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x + 1} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}x - 1}{x^2 - 1} =$$

II. Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 4 & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ x - 5 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Y calcular:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -5} f(x) =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$$

III. Calcular los siguientes límites, salvando las indeterminaciones.

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x + 4} =$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -6} \sqrt[2]{\frac{2x - 4}{x + 2}} =$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 25} =$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2 + 7x}{x^4 - 1} =$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7} =$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 7}{2x^2 + 7x + 1} =$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} 5x^2 - 4x + 8 =$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 + 3x - 2 =$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 2x - 6x^3}{7x^3 + 2x} =$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3 - 36x}{x - 6} =$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 13} \sqrt{\frac{3x - 14}{x + 3}} =$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 5 + 2x}{x^5 - 5x^4} =$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} =$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + 2x - 4x^5}{7x^3 + 2x} =$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} =$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -1} 4x^2 - 3x + 6 =$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 5}{x^3 - 5x^4} =$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 2}{x - 3} =$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} =$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 4x - 12} =$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{11} + 13x^7 - 4x^3 + 3}{x^{12} - 1} =$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} =$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$$

