Unidad N° 1: Expresiones Algebraicas. Polinomios. Operaciones

Expresiones Algebraicas

Las expresiones algebraicas enteras son expresiones matemáticas que combinan letras con números o letras solas vinculadas por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potencias con exponente entero positivo.

Ejemplos:

a) $\sqrt{x} + 3x^2$ b) $\frac{1}{x^2 - 2} + 2^4$ c) $x^4 + 2x^2 - 3x$,

En una expresión algebraica los números se llaman **coeficientes**, y las letras **variables** o indeterminadas.

coeficientes $\Rightarrow$ $\mathbf{2}\,\underbrace{\boldsymbol{x^2 y}}_{\text{variables o indeterminadas}}$ **coeficientes** $\Rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{3}}\,\underbrace{\boldsymbol{a^3 bc}}_{\text{variables o indeterminadas}}$

"Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**"

Clasificación de los polinomios

Según su cantidad de términos, un polinomio se denomina:

Monomio: si tiene un solo término $\boldsymbol{6x^3}$
Binomio: si tiene dos términos $2x + 3x^2$
Trinomio: si tiene tres términos $0{,}5 + 5x - 3x^5$
Cuatrinomio: si tiene cuatro términos $4x^5 + 2x^4 - 3 + x$
Si tienen más de cuatro términos se les llama simplemente polinomios.

A los polinomios los nombraremos con letras mayúsculas y entre paréntesis indicaremos la variable.

Ejemplos:

$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ $Q(z) = \frac{2}{3}z^4 + z$ $T(y) = -2y^5$

Polinomios Semejantes (Monomios)

Dos monomios son semejantes si los términos tienen la misma variable y el mismo exponente.

Características de un polinomio

- Se denomina **grado** de un polinomio al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.
- Se llama **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.
- Al polinomio cuyo coeficiente principal es uno se lo denomina **normalizado**. Si éste polinomio es además de grado uno se lo denomina **polinomio mónico**.
- Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

- Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado. Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan, con coeficiente cero.
- El término que no tiene variable se denomina **término independiente**.

Nota: nosotros trabajaremos siempre con los polinomios ordenados en forma decreciente

Ejemplos:

$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$

$\boldsymbol{P(x) = 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 5}$ completo y ordenado en forma decreciente

Gr ($P(x)$)= 4

coef ppal.: 3

t.indep.= 5

$\boldsymbol{Q(x) = -6x^3 + \frac{1}{3}x^5 - 7x}$

$\boldsymbol{Q(x) = \frac{1}{3}x^5 + 0x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 7x + 0}$ completo y ordenado

Gr ($P(x)$)= 5

coef ppal.: $\frac{1}{3}$

t.indep.= 0

Polinomios Opuestos

Decimos que un polinomio es opuesto a uno dado si los signos de éste son opuestos al anterior.

Ejemplo:

$$P(x) = -4x^3 + 2x^2 - x - 7$$
$$-P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 7$$

Operaciones con polinomios

Adición y sustracción de polinomios

Para **sumar** o **restar** polinomios, se suma o resta sus términos semejantes.

Para **sumar** o **restar** varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

Ejemplo:

$\boldsymbol{A(x) = -6x + 4x^3 - 3x^2 + 1}$

$\boldsymbol{B(x) = 5x^2 - 9 + 2x + x^3}$

$$\begin{array}{rl} & A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1 \\ + & \\ & B(x) = \underline{\ x^3 + 5x^2 + 2x - 9} \end{array}$$

$\boldsymbol{A(x) + B(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

Para restar dos polinomios, se procede igual que en la suma, sumándole al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$A(x) - B(x) = A(x) + \big(-B(x)\big) = (4x^3 - 3x^2 - 6x + 1) + (-x^3 - 5x^2 - 2x + 9) =$$

minuendo **sustraendo**

$$\begin{array}{rl} A(x) = & 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1 \\ + \quad B(x) = & -1x^3 - 5x^2 - 2x + 9 \\ \hline A(x) - B(x) = & 3x^3 - 8x^2 - 8x + 10 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se debe aplicar la propiedad distributiva y el producto de potencias de igual base ($x^n \cdot x^m = x^{n+m}$).

$$2x^3 \cdot (3x^2 - 4x - 5x^3 + 2) = 2x^3 \cdot 3x^2 - 2x^3 \cdot 4x - 2x^3 \cdot 5x^3 + 2x^3 \cdot 2 =$$

$$= 6x^5 \quad - \quad 8x^4 \quad - \quad 10x^6 \quad + 4x^3$$

$$= -10x^6 + 6x^5 - 8x^4 + 4x^3$$

$$(5x - 2x^2) \cdot (-x^2 + 3x) = 5x \cdot (-x^2) + 5x \cdot 3x - 2x^2 \cdot (-x^2) - 2x^2 \cdot 3x$$

$= -5x^3 + 15x^2 + 2x^4 - 6x^3$ operamos los monomios semejantes

$$= 2x^4 - 11x^3 + 15x^2$$

Productos Notables

Hay ciertos productos que aparecen frecuentemente en el cálculo algebraico y son los llamados "productos notables".

- **Producto de la suma de dos términos por su diferencia**

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos. Esto es:

$$(a + b) \cdot (a - b) = \underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de}}$$

Demostración:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$$

Aplicamos propiedad distributiva

Ejemplo:

$$(x+4)\cdot(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$$

$$(x^2+5)\cdot(x^2-5)=(x^2)^2-5^2=x^4-25$$

- **Cuadrado de un binomio**

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Cuadrado de cuadrado}}=\underbrace{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}_{\text{Trinomio}}$$

Al elevar un binomio al cuadrado, se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto.**

- **Cubo de un binomio**

$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de perfecto}}=\underbrace{a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo}}$$

Al elevar un binomio al cubo, se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto.**

Para resolver cuadrados y cubos de un binomio, se debe tener en cuenta dos propiedades.

$$(a\cdot x)^n=a^n\cdot x^n \qquad (x^n)^m=x^{n\cdot m}$$

Ejemplos: Calcular:

a) $(x^2+5)^2=$

Identificamos correctamente quien es *a* y *b*

$a=x^2$

$b=5$

Luego aplicamos la regla

$$\begin{aligned}(x^2+5)^2&=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 5+5^2\\&=x^4+10x^2+25\end{aligned}$$

Resolvemos y aplicamos las propiedades

b) $(3-x^3)^3=$

Identificamos correctamente quien es *a* y *b*

$a=3$

$b=-x^3$

Luego aplicamos la regla

$$\begin{aligned}(3-x^3)^3&=3^3+3\cdot 3^2\cdot(-x^3)+3\cdot 3\cdot(-x^3)^2+(-x^3)^3\\&=27+3\cdot 9\cdot(-x^3)+9\cdot x^6-x^9\\&=27-27x^3+9x^6-x^9\end{aligned}$$

Resolvemos y aplicamos las propiedades

División de polinomios

Para **dividir dos monomios**, se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$x^m : x^n = x^{m-n}$

$(10x^3) : (5x) = (10 : 5)(x^3 : x) = 2x^2$ $\qquad$ $(-10x^8) : (3x^5) = (-10 : 3)(x^8 : x^5) = -\frac{10}{3}x^3$

Para dividir **un polinomio por un monomio**, se aplica la propiedad distributiva.

$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

$$(12x^6 + 36x^4 - 6x^3 + 42x) : (-6x) = 12 : (-6)(x^6 : x) + 36 : (-6)(x^4 : x) - 6 : (-6)(x^3 : x) + 42 : (-6)(x : x)$$
$$= -2x^5 - 6x^3 + x^2 - 7$$

Para dividir **dos polinomios**, se deben cumplir las siguientes condiciones.

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.
- El polinomio divisor debe estar ordenado en forma decreciente.

$$\begin{array}{rr|l}
\textit{Dividendo} & P(x) & Q(x) \quad \textit{Divisor} \\ \cline{3-3}
\textit{Resto} & R(x) & C(x) \quad \textit{Cociente}
\end{array}
\qquad\qquad P(x) = C(x) \, . \, Q(x) + R(x)$$

Dados $\begin{cases} P(x) = 2x - 5 + 4x^4 \\ Q(x) = -2x + x^2 \end{cases}$ hallar $P(x) : Q(x)$.

El *dividendo debe estar completo y ordenado:* $P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x - 5$

El *divisor debe estar ordenado:* $Q(x) = x^2 - 2x$

$$\begin{array}{lcl|l}
 & & 4x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x - 5 & x^2 - 2x \\ \cline{4-4}
4x^2 \, . \, (x^2 - 2x) & \longrightarrow & -(4x^4 - 8x^3) & 4x^2 + 8x + 6 \longrightarrow \textit{Cociente: } C(x) \\
 & & 0x^4 + 8x^3 - 10x^2 & 4x^4 : x^2 = 4x^2 \\
8x \, . \, (x^2 - 2x) & \longrightarrow & -(8x^3 - 16x^2) & 8x^3 : x^2 = 8x \\
 & & 0x^3 + 6x^2 + 0x & 6x^2 : x^2 = 6 \\
6 \, . \, (x^2 - 2x) & \longrightarrow & -(6x^2 - 12x) & \\
 & & \underbrace{0x^2 + 12x - 5}_{\textit{Resto: } R(x)} &
\end{array}$$

Se termina la cuenta porque el grado es menor que el grado del divisor.

$C(x) = 4x^2 + 8x + 6$ $\qquad$ $R(x) = 12x - 5$

Regla de Ruffini y Teorema del resto

La **regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio P(x) por otro cuya forma sea $x + a$.

Dados $P(x) = 2x^3 + 3x - 1$ y $Q(x) = x + 2$ hallar $P(x) : Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**. $\longrightarrow$ *Dividendo* $2x^3 + 0x^2 + 3x - 1$ *Divisor* $x + 2$

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo. $\longrightarrow$

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 0 & 3 & -1 \\
-2 & & -4 & 8 & -22 \\
\hline
 & 2 & -4 & 11 & -23
\end{array}$$

Cálculos auxiliares

$(-2) . 2 = -4$

$(-2) . (-4) = 8$

$(-2) . 11 = -22$

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**. $\longrightarrow$ $\underbrace{C(x) = 2x^2 - 4x + 11}_{\text{Cociente}}$ $\qquad$ $\underbrace{R(x) = -23}_{\text{Resto}}$

$(3x^3 - 2x^2 - 2) : (x - 1)$

$3x^3 - 2x^2 + 0x - 2 \longrightarrow$ *Dividendo*

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -2 & 0 & -2 \\
1 & & 3 & 1 & 1 \\
\hline
 & 3 & 1 & 1 & \boxed{-1}
\end{array}$$

Cociente $\longrightarrow 3x^2 + 1x + 1$

Resto $\longrightarrow -1$

$(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16) : (x + 4)$

$-x^5 + 0x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 0x - 16 \longrightarrow$ *Dividendo*

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & -1 & 0 & 12 & -15 & 0 & -16 \\
-4 & & 4 & -16 & 16 & -4 & 16 \\
\hline
 & -1 & 4 & -4 & 1 & -4 & \boxed{0}
\end{array}$$

Cociente $\longrightarrow -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 4$

Resto $\longrightarrow 0$

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$ es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.

Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2$ *y* $Q(x) = x - 1$

El resto de la división $P(x) : Q(x)$ *se obtiene:*

$P(1) = 3.(1)^3 - 2.(1)^2 - 2$

$P(1) = 3 - 2 - 2 = -1$

El resto de la división es -1.

Dados $P(x) = -x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16$ *y* $Q(x) = x + 4$

El resto de la división $P(x) : Q(x)$ *se obtiene:*

$P(-4) = -(-4)^5 + 12.(-4)^3 - 15.(-4)^2 - 16$

$P(-4) = 1024 - 768 - 240 - 16 = 0$

El resto de la división es 0.

Actividades

1. Completar la siguiente tabla:

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Polinomio completo y ordenado	Polinomio opuesto
$-11x + x^3 + 6$					
					$-0{,}5x^4 + 3x - 2x^2$
					$-x^2 - 9$
	1	11	-6		
$\boldsymbol{-2 + 2x^5 - x}$					

2. Resolver las siguientes operaciones

a) $P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4$

$Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1$

$P(x) + Q(x) =$

b) $R(x) = 2x^2 + x - 2$

$T(x) = -x + 2 - 5x^3$

$R(x) + T(x) =$

c) $M(x) = 2x^2 + x - 2$

$N(x) = x^2 + 1$

$M(x) - N(x) =$

d) $A(x) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 1$

$C(x) = 3x - 5x^2 - x^4 + 2$

$A(x) - C(x) =$

3. **Dados los polinomios**:

$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

$Q(x) = 2x^3 - 3x - 2$

$R(x) = 2x^4 + 3x^3 + x - 1$

Calcular: a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) + Q(x) - R(x)$

d) $P(x) - Q(x) + R(x)$

4. **Resolver los siguientes productos de polinomios:**

a) $x^3 \cdot (x^2 - x + 1) =$

b) $(2x^3 - x + 1) \cdot (x^2 + x - 2) =$

c) $\left(-\frac{2}{3}x + x^3\right) \cdot (2x - 3x^2 + 1) =$

5. **Resolver los siguientes producto de la suma de dos términos por su diferencia**

a) $(x + 3) \cdot (x - 3) =$

b) $(3x^2 - 2) \cdot (3x^2 + 2) =$

c) $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 7x\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2 - 7x\right) =$

6. **Desarrollar las siguientes potencias**

a) $(3 + x)^3 =$

b) $(x + 2)^2 =$

c) $(2x - 1)^2 =$

d) $(x - 1)^3 =$

7. **Resolver aplicando la regla de Ruffini.**

1) $\mathbf{(2x^3 + 2x + 5 + 3x^2) : (x + 1) =}$

2) $\mathbf{(x^2 - 10x + 20) : (x - 8) =}$

3) $\mathbf{(2 + 3x^4 - x^5) : (x - 3) =}$

8. **Calcular el resto de las siguientes divisiones:**

1) $\mathbf{(x^3 + 4x^2 + x + 5) : (x - 2) =}$

2) $\mathbf{(2x^3 + x^2 - 18x - 7) : (x - 3) =}$

3) $\mathbf{(1 - x^3) : (x - 1) =}$

9. **Calcule el valor numérico de los siguientes polinomios.**

a) Si $\mathbf{P(x) = 9x^2 - 6x - 5}$ $\quad \mathbf{P(1) =}$ $\quad \mathbf{P(0) =}$

b) Si $\mathbf{Q(x) = x^3 - 23x - 28}$ $\quad \mathbf{Q(-4) =}$ $\quad \mathbf{Q(4) =}$

c) Si $\mathbf{R(x) = x^5 - 32}$ $\quad \mathbf{R(2) =}$ $\quad \mathbf{R\left(\frac{1}{2}\right) =}$

d) Si $\mathbf{S(x) = 2x^3 - 3}$ $\quad \mathbf{S(-1) =}$ $\quad \mathbf{S\left(\frac{1}{3}\right) =}$

10. **Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, responda verdadero o falso según corresponda.**

a) $\mathbf{x = 0}$ es raíz de $\mathbf{P(x)}$

b) $\mathbf{x = 2}$ es raíz de $\mathbf{R(x)}$

c) $\mathbf{Q(-4) = Q(4)}$

d) $\mathbf{x = -4}$ es raíz de $\mathbf{Q(x)}$

11. **Dado el polinomio $\mathbf{P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x + 16}$ calcule el valor numérico para $\mathbf{x = 1, 2, 0}$ y $\mathbf{-1}$ ¿Es alguno de estos valores raíz de $\mathbf{P(x)}$?**

12. **Dado los polinomios.**

$M(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ $\qquad P(x) = 2x^2 - x^3 + 5x^4 - 1$ $\qquad Q(x) = -x^2 + 2x - 3$

$R(x) = 5x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ $\qquad S(x) = x^2 - 4$ $\qquad T(x) = 2x - 4$

Calcule:

a) $P(x) + R(x) =$

b) $M(x) - Q(x) =$

c) $Q(x) - R(x) =$

d) $P(x) - [R(x) + Q(x)] =$

e) $3 \cdot M(x) - 5Q(x) =$

f) $Q(x) \cdot S(x) =$

g) $T(x) \cdot S(x) - M(x) =$

h) $P(x) \cdot T(x) =$

i) $M(x) \cdot S(x) =$