

Unidad N° 4

Función exponencial.

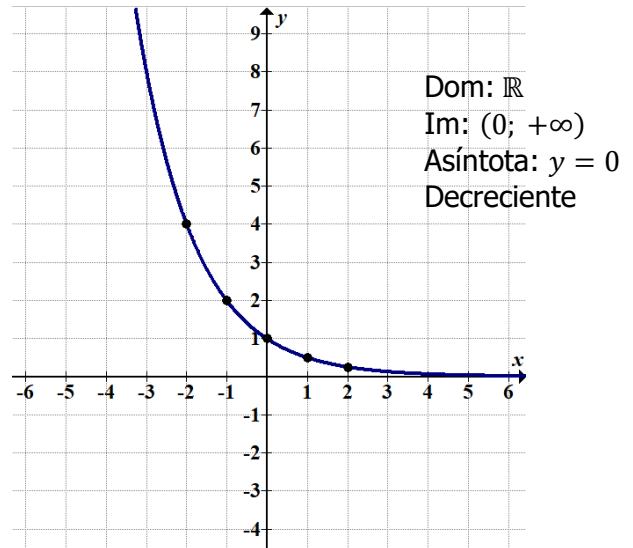
Definición: Se denomina función exponencial a toda función de la forma

$$f(x) = c \cdot a^{x-h} + k; a \neq 1 \text{ y } a > 0$$

Analicemos las distintas gráficas de la función exponencial:

❖ $0 < a < 1 \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

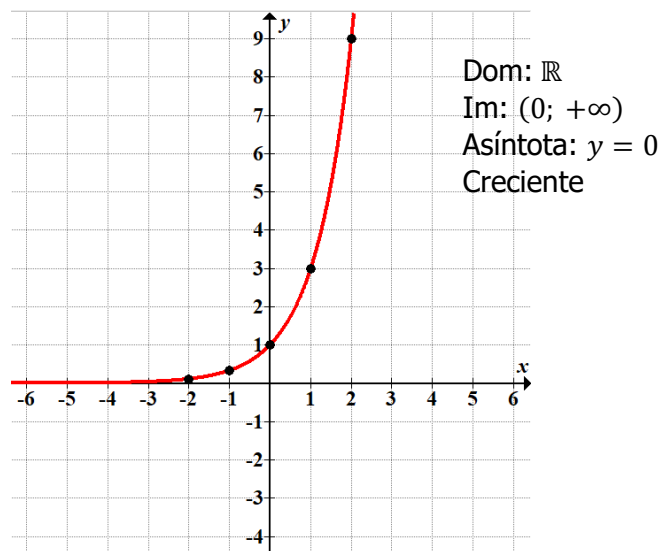
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$(x; y)$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$	$(-2; 4)$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$	$(-1; 2)$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$(0; 1)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(1; \frac{1}{2}\right)$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(2; \frac{1}{4}\right)$



Asíntota: se denomina asíntota a la recta a la cual se aproxima indefinidamente una función sin tocarla.

❖ $a > 1 \rightarrow y = 3^x$

x	$y = 3^x$	$(x; y)$
-2	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	$\left(-2; \frac{1}{9}\right)$
-1	$3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$	$\left(-1; \frac{1}{3}\right)$
0	$3^0 = 1$	$(0; 1)$
1	$3^1 = 3$	$(1; 3)$
2	$3^2 = 9$	$(2; 9)$



Desplazamiento de la función exponencial

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$$y = 2^x + 3$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(3, +\infty)$

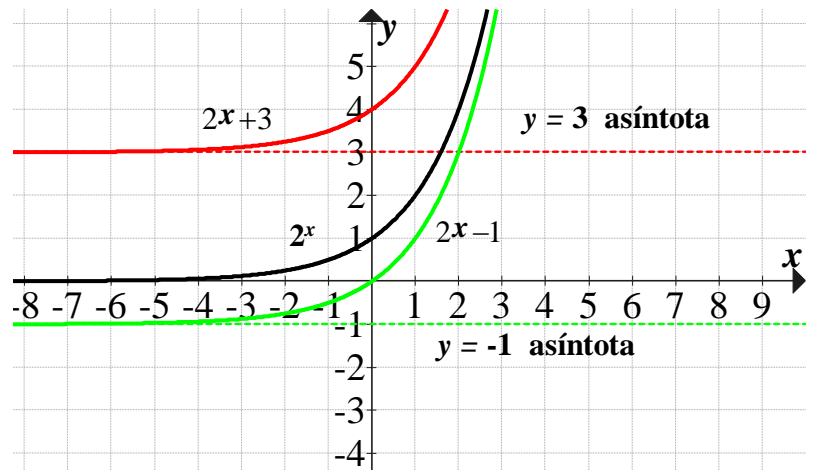
Asíntota: $y = 3$

$$y = 2^x - 1$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(-1, +\infty)$

Asíntota: $y = -1$



Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$$y = 2^{x-2}$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(0, +\infty)$

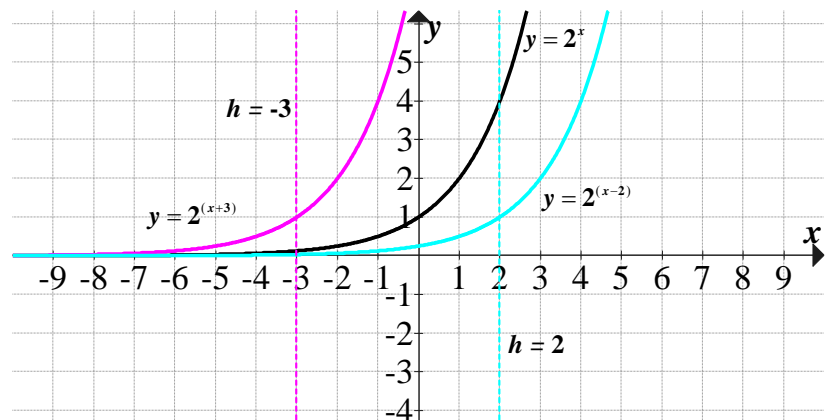
Asíntota: $y = 0$

$$y = 2^{x+3}$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(0, +\infty)$

Asíntota: $y = 0$



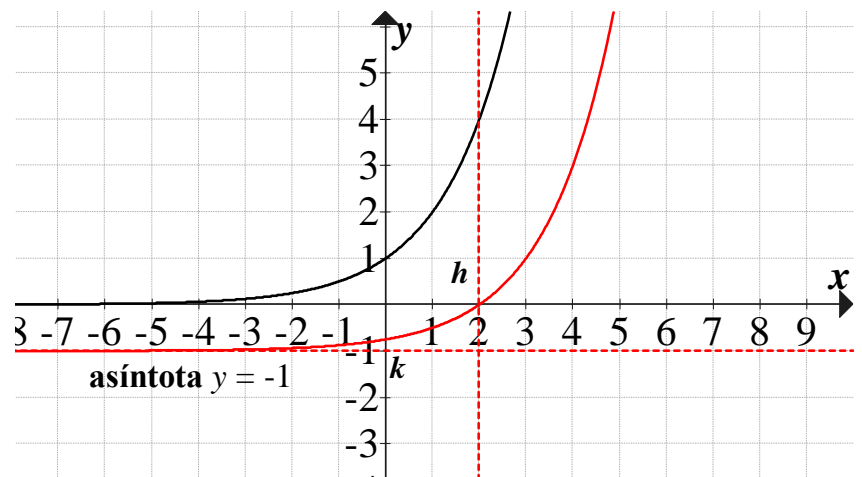
Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = 2^{(x-2)} - 1$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(-1, +\infty)$

Asíntota: $y = -1$



Actividades

1) Representar gráficamente las siguientes funciones exponenciales. Analizar: dominio, imagen, asíntota, crecimiento o decrecimiento.

a) $y = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $y = 2^{x+1}$

e) $y = 2^x + 1$

f) $y = 3^x - 2$

g) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

h) $y = 3^{x+1}$

i) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

j) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

Logaritmo. Función logarítmica.

Concepto de logaritmo:

Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva y distinto de 1, al exponente al que se debe elevar la base "a" para obtener dicho número.

$$\log_a N = C \Rightarrow a^C = N \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ N > 0 \end{cases}$$

↓ ↓ ↓
base logaritmo
argumento

Ejemplo: $\checkmark \log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

$$\checkmark \log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$$

Para tener en cuenta:

La potenciación tiene dos operaciones inversas:

$$2^4 = 16 \begin{cases} \rightarrow \sqrt[4]{16} = 2 & \text{se obtiene la base} \\ \rightarrow \log_2 16 = 4 & \text{se obtiene el exponente} \end{cases}$$

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Algunos logaritmos se pueden obtener directamente usando calculadora científica.

Ellos son:

- los de base 10, llamados **logaritmos decimales**. Se simboliza $\boxed{\log}$. Se omite escribir la base 10.
- Los de base e ("e" = irracional 2,718281...), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos** $\boxed{\ln}$.

También es posible obtener con la calculadora los siguientes logaritmos:

1)

$$\begin{aligned}\log_5 32 &= \frac{\log 32}{\log 5} \\ &= \frac{1,505}{0,699} \\ &= 2,153\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_5 32 &= \frac{\ln 32}{\ln 5} \\ &= \frac{3,465}{1,61} \\ &= 2,153\end{aligned}$$

Este procedimiento se llama **cambio de base**, lo que nos permite utilizar la calculadora científica en todos los casos.

Simbólicamente: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$$

Actividades

Calculen siempre que sea posible:

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_5 25 =$

c) $\log_7 7 =$

d) $\log_2 0 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

g) $\log_2 \frac{1}{2} =$

h) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

i) $\log_2 \sqrt{8} =$

j) $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

k) $\log_9 \frac{1}{3} =$

l) $\log_{10} 0,01 =$

2) Encuentren los siguientes logaritmos utilizando la calculadora científica, apretando las teclas **Log** y **ln** según corresponda.

a) $\log 202 =$

b) $\log 20 =$

c) $\log 2,02 =$

d) $\log 0,242 =$

e) $\ln 7 =$

f) $\ln 25 =$

g) $\ln 250 =$

h) $\ln 0,25 =$

3) Calculen aplicando logaritmo decimal:

a) $\log_4 100 =$

b) $\log_3 10 =$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 7 =$

d) $\log_5 \frac{1}{8} =$

Calculen aplicando logaritmo neperiano:

a) $\log_2 165 =$

b) $\log_5 72 =$

c) $\log_3 8,21 =$

d) $\log_{15} 0,25 =$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16$$

$$\log_2 64 = 2 + 4$$

$$6 = 6$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log_a \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_a P - \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_5 (25 : 5) = \log_5 25 - \log_5 5$$

$$\log_5 5 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a P^n = n \cdot \log_a P$$

Ejemplo:

$$\log_2 8^3 = \log_2 (8 \cdot 8 \cdot 8)$$

$$\log_2 512 = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8$$

$$9 = 3 \cdot \log_2 8$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$9 = 9$$

Podemos aplicar esta propiedad del logaritmo a una raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{Q} = \log_a Q^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 8$$

$$1 = \frac{1}{3} \cdot 3$$

$$1 = 1$$

Actividades

4) Resolver aplicando propiedades:

a) $\log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$

b) $\log_2\left(\frac{1}{32} : 64\right) =$

c) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)^3 =$

d) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

e) $\log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$

f) $\log_3 27^4 =$

g) $\log_2\left(16 : \frac{1}{2}\right) =$

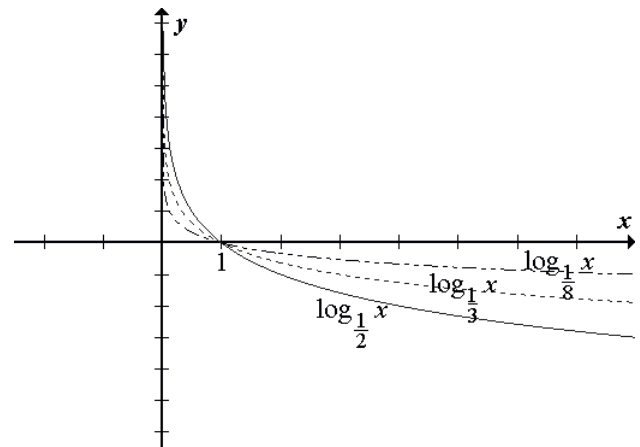
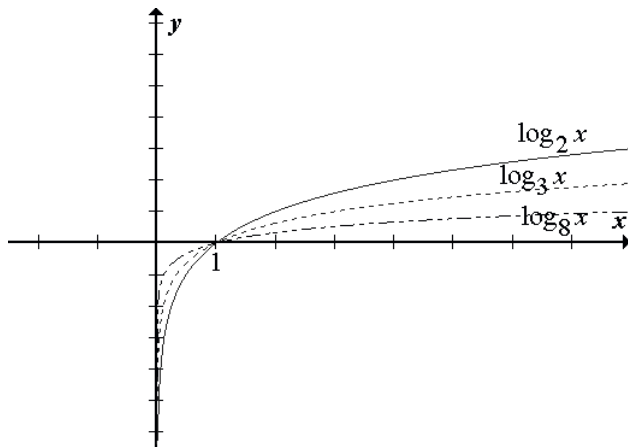
h) $\log_3(9 \cdot 81) =$

Función Logarítmica

Llamamos **función logarítmica** a toda función del tipo:

$$y = \log_a x \quad \text{con } a > 0; a \neq 1$$

Esta función está definida para los valores de $x > 0$. Es decir, el **dominio** de la función es \mathbb{R}^+ . Las gráficas de acuerdo a los distintos valores de **a** son:



Características comunes:

- ✓ Cortan el eje x en el punto $(1, 0)$
- ✓ No cortan el eje y , el **conjunto imagen** es $(-\infty, +\infty)$ o \mathbb{R}
- ✓ Tienen una **asíntota**, que es el eje y .

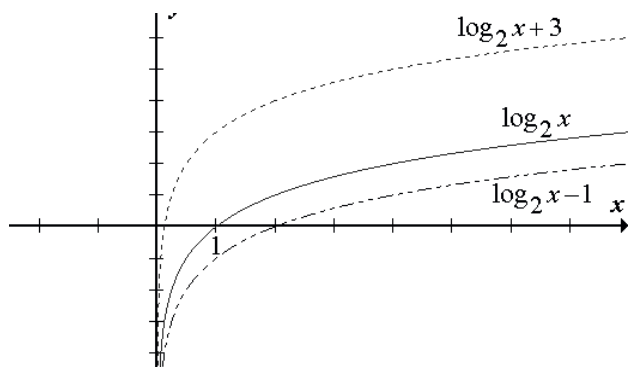
Diferencias:

- ✓ Si **a** es **mayor** que **1**, la función es creciente.
- ✓ Si **a** es **menor** que **1**, la función es decreciente.

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$y = \log_2 x + 3$
 Dom: $(0, +\infty)$
 Im: \mathbb{R}
 Asíntota: $y = 0$

$y = \log_2 x - 1$
 Dom: $(0, +\infty)$
 Im: \mathbb{R}
 Asíntota: $y = 0$



Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$$y = \log_2(x - 2)$$

Dom: $(2, +\infty)$

Im: \mathbb{R}

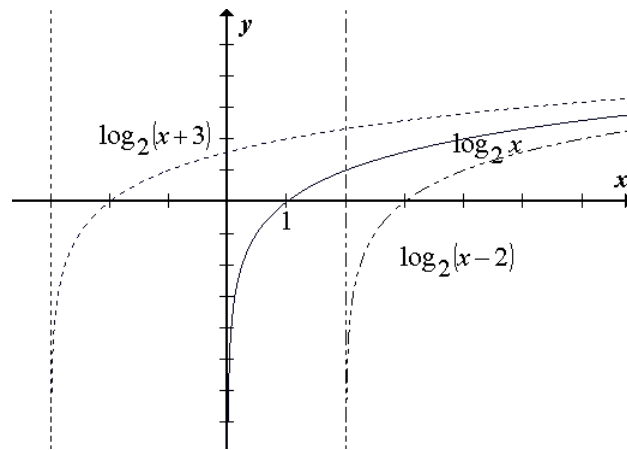
Asíntota: $x = 2$

$$y = \log_2(x + 3)$$

Dominio: $(-3, +\infty)$

Im: \mathbb{R}

Asíntota: $x = -3$



Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = \log_2(x + 2) - 3$$

Dom: $(-2, +\infty)$

Im: \mathbb{R}

Asíntota: $x = -2$

