UNIDAD N° 1: NÚMEROS REALES

*Los **Números Racionales** (ℚ) son aquellos que pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros.*

Existen dos maneras de escribir un mismo número racional: como fracción o en forma decimal; una y otra designan exactamente el mismo número. La expresión decimal de un número racional tiene un número finito de cifras decimales, o es periódica.

$\frac{34}{9} = 3{,}777\ldots = 3{,}\widehat{7}$ $\quad -\frac{13}{4} = -3{,}25$ $\quad \frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots\ 2{,}8\widehat{3}$

*Los **Números Irracionales** (𝕀) son aquellos que no pueden ser expresados como un cociente entre dos números enteros, por tener infinitas cifras decimales no periódicas.*
Todas las raíces no exactas de base entera son números irracionales.

$\sqrt{5} = 2{,}236067\ldots$ $\quad \sqrt[3]{6} = 1{,}817120\ldots$ $\quad \sqrt[4]{21} = 2{,}140695\ldots$

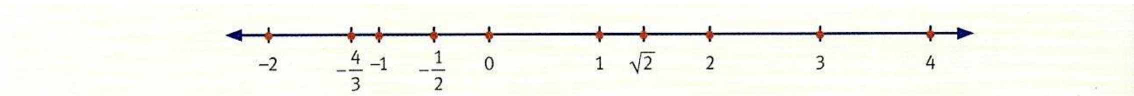
Hay números irracionales que se determinan a partir de una ley de formación.

$2{,}246810\ldots$ $\quad -0{,}12223242\ldots$ $\quad 5{,}1122334455\ldots$ $\quad 14{,}0123456\ldots$

El conjunto de los **números reales** (ℝ) está formado por los números racionales (ℚ) y los irracionales (𝕀).

Los números reales se grafican sobre una recta denominada recta real; y cumplen las siguientes propiedades
Propiedad de completitud: A cada número real le corresponde un punto en la recta y viceversa.

Propiedad de densidad: Entre dos números reales distintos siempre hay otro número real.



Intervalos Reales

> Se denomina "intervalo real" a todo subconjunto de números reales; geométricamente, los intervalos corresponden a semirrectas o segmentos de la recta real.

Se puede clasificar de la siguiente manera:

(A) Intervalos acotados: cuando sus extremos son números reales.

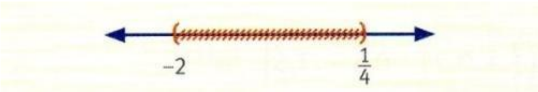
- **Abiertos**: los extremos no están incluidos en el intervalo. Se utilizan paréntesis para representarlos

Por ejemplo

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}: -2 < x < \tfrac{1}{4}\right\} = \left(-2; \tfrac{1}{4}\right)$$

Se lee: El conjunto A es igual a todos los números reales tales que son mayores que -2 y menores que $\frac{1}{4}$

En la recta numérica se representa así:



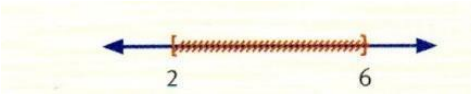
- **Cerrados**: Los extremos están incluidos en el intervalo. Se utilizan corchetes para representarlos.

Por ejemplo

$$B = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 6\} = [2; 6]$$

Se lee: El conjunto B es igual a todos los números reales tales que son mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 6

En la recta numérica se representa así:

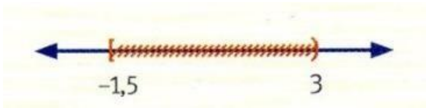


- **Semiabiertos**: Un extremo está incluido en el intervalo (corchete) y el otro no (paréntesis)

Por ejemplo $C = \{x \in \mathbb{R}: -1{,}5 \leq x < 3\} = [-1{,}5; 3)$

Se lee: El conjunto C es igual a todos los números reales tales que son mayores o iguales que -1,5 y menores que 3

En la recta numérica se representa así:



(B) Intervalos no acotados: cuando alguno de sus extremos es ∞ o $-\infty$**.**

Por ejemplo D = $\{x \in \mathbb{R}: x < 4\} = (-\infty; 4)$

Se lee: El conjunto D es igual a todos los números reales tales que son menores que 4

En la recta numérica se representa así:

Otro ejemplo $E = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\} = [2; \infty)$

Se lee: El conjunto E es igual a todos los números reales tales que son mayores o iguales que 2

En la recta numérica se representa así:

Propiedades de la Potenciación y la Radicación.

Propiedades de la Potenciación.

1) **Potencia de exponente cero** $a^0 = 1 \quad si\ y\ sólo\ si\ a \neq 0$

2) **Potencia de exponente negativo** $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad si\ y\ sólo\ si\ a \neq 0$

3) **Potencia de otra potencia** $(a^n)^m = a^{n.m}$

4) **Producto de Potencias de igual base** $a^n . a^m = a^{n+m}$

5) **Cociente de potencias de igual base** $a^n : a^m = a^{n-m}$

6) **Distributiva respecto de la multiplicación** $(a.b)^n = a^n . b^n$

7) **Distributiva respecto de la división** $(a:b)^n = a^n : b^n$

Propiedades de la Radicación.

La Radicación se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos: $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{x^7}} = x^{-\frac{7}{3}}$

8) **Raíz de una raíz** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

9) **Distributiva respecto de la multiplicación** $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

10) **Distributiva respecto de la división** $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} \quad si\ y\ sólo\ si\ b \neq 0$

11) **Simplificación de índices** $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}} \quad si\ y\ sólo\ si\ r \neq 0\ y\ a > 0$

12) **Eliminación del radical** $\sqrt[n]{a^n} = a\ si\ n\ es\ impar\ ó\ \sqrt[n]{a^n} = |a|\ si\ n\ es\ par$

Representación en la recta numérica de Números Irracionales.

Números Irracionales.

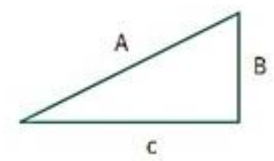
Los "**números irracionales**" son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Las raíces no exactas de números racionales son números irracionales.

Se denomina ***radical*** a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga solución real.

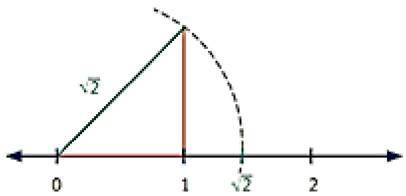
Representación en la recta numérica.

Cada número irracional tiene asociado un punto sobra la recta real.
Para representar este punto sobre la recta numérica, si el irracional es de la forma $\sqrt{a}$, se debe recurrir al Teorema de Pitágoras: $A^2 = B^2 + C^2$



- Representación de $\sqrt{2}$.

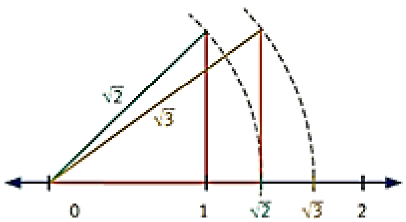
Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden una unidad. El valor de la hipotenusa es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



- Representación de $\sqrt{3}$.

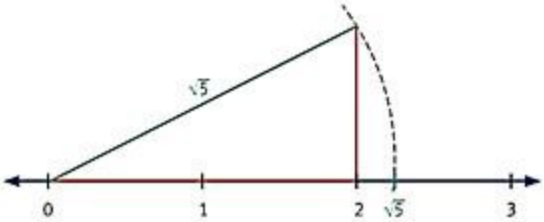
Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y $\sqrt{2}$, respectivamente. El valor

de la hipotenusa es $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$



- Representación de $\sqrt{5}$.

Se determina sobre la recta un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2, respectivamente. El valor dela hipotenusa es $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$



De este modo se puede representar cualquier raíz cuadrada de un número natural, siempre que se elijan convenientemente los catetos del triángulo rectángulo.

Potencias de Exponente Fraccionario

- Para cualquier par de números m y n $(n \neq 1)$, y cualquier $a > 0$:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

$$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} \qquad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \qquad \sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$$

- Las potencias de exponente fraccionario conservan todas las propiedades de las potencias de exponente entero.

1 ACTIVIDADES
Números reales

1. Coloquen una X donde corresponda.

Número	Naturales	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
-4					
$\frac{1}{3}$					
$\sqrt{5}$					
$\sqrt{9}$					
$1,3\widehat{4}$					

2. Representen cada uno de los siguientes intervalos en la recta numérica.

a. $(-2;3)$

c. $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

b. $(-5;\sqrt{5}]$

d. $[-\sqrt[3]{27};\sqrt[3]{27})$

3. Escriban el intervalo real correspondiente en los siguientes casos.

a. $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -3\} =$

b. $\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 7\} =$

c. $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\} =$

d. $\{x \in \mathbb{R} / -3{,}5 < x < 0\} =$

e. $\{x \in \mathbb{R} / -1{,}2 < x \leq 1{,}2\} =$

f. $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 3\} =$

4. Expresen de tres formas distintas los intervalos que se indican a continuación.

a. Todos los números reales mayores o iguales que −3 y menores que 2.

b. Todos los números reales mayores o iguales que −5.

c. Todos los números menores que −3 o mayores o iguales que 2.

d. Todos los números reales mayores que −2 y menores o iguales que −1.

2 ACTIVIDADES

1. Marquen las respuestas correctas.

a. $(ab)^{-5} : (ab)^2 . a =$ ○ $a^{-2} b^{-3}$ ○ $a^{-6} b^{-7}$ ○ $a^{-7} b^{-7}$ ○ $a^{-8} b^{-7}$

b. $\sqrt{a^4 b^5} . \sqrt{a^2 b} =$ ○ $a^6 b^6$ ○ $a^4 b^3$ ○ $a^3 b^3$ ○ ab^2

c. $\sqrt{a} . \sqrt{b} . a^{\frac{3}{2}} : b^4 =$ ○ $a^2 b^{-\frac{7}{2}}$ ○ $a^2 b^{\frac{7}{2}}$ ○ $a^2 b^{-\frac{9}{2}}$ ○ $a^2 b^{\frac{9}{2}}$

d. $\sqrt{a} . \sqrt[3]{b} . \sqrt{a . b} . a^{-4} =$ ○ $a^{-3} b^{\frac{5}{6}}$ ○ $a^5 b^{\frac{5}{6}}$ ○ $a^{-3} b^{-\frac{1}{6}}$ ○ $a^5 b^{-\frac{1}{6}}$

2. Escriban V (Verdadero) o F (Falso). Expliquen las respuestas.

a. $3^{-2} = \frac{1}{9}$

b. $(7^2)^{-3} = 7^6$

c. $4^{-3} : 4^{-5} = 4^{-8}$

d. $2 . 2^0 : 2^{-3} = 2^3$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

f. $\sqrt[5]{9^5} = |9|$

g. $(2a)^5 = 2a^5$

h. $\sqrt[3]{25} = 5^{\frac{2}{3}}$

i. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

3. Expresen como una única potencia aplicando las propiedades.

a. $2^{-5} . 2 : 2^{-4} =$

b. $[(-3)^3 : (-3)^{-3}]^{-2} =$

c. $(5 . 4)^2 : (5^2 . 4)^3 =$

d. $(ab)^3 . (ab)^{-2} =$

e. $\sqrt{5} . \sqrt[3]{5^2} . \sqrt[6]{5^5} =$

f. $\sqrt{\sqrt{64}} . \sqrt{2} =$

g. $\sqrt{6} . \sqrt{6^3} . \sqrt{6^6} =$

h. $\sqrt{ab} : \sqrt{a^2 b} =$

i. $(a^{-1} b)^5 . \sqrt{ab} =$

4. Identifiquen el error y resuelvan correctamente.

$(2^4 : 2 \,.\, 2^6)^{-3} = (2^{10})^{-3}$ ____________________

$= 2^7$ ____________________

5. Resuelvan expresando con un índice común.

a. $\dfrac{\sqrt[3]{5}\,.\sqrt{3}}{\sqrt[6]{9\,.\,125}} =$ ____________________

b. $\dfrac{\sqrt[4]{2}\,.\sqrt[8]{81}}{\sqrt[8]{1296}} =$ ____________________

c. $\dfrac{\sqrt[5]{3}\,.\sqrt{2}}{\sqrt[10]{3}\,.\sqrt{3}} =$ ____________________

d. $\dfrac{\sqrt[3]{3}\,.\sqrt{2}}{\sqrt[12]{3}\,.\sqrt[4]{2}} =$ ____________________

6. Completen la tabla:

Potencia de exponente fraccionario	$3^{\frac{1}{3}}$		$2^{\frac{3}{5}}$		$5^{\frac{3}{2}}$	
Radical		$\sqrt[3]{8^5}$		$\sqrt{7}$		$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

7. Resuelvan y escriban el resultado como radical:

a) $\dfrac{7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{4}{6}}}{7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}} =$

b) $\left(\dfrac{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{10}}}{2^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

c) $\dfrac{(5^2 \cdot 5^5)^{\frac{1}{21}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}{5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}} =$

8. Transformen las raíces en potencias de exponente fraccionario, resuelvan las operaciones indicadas y, luego, expresen el resultado en forma de radical.

a) $\dfrac{\sqrt{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^5}}{\left(\sqrt[3]{2^4}\right)^{\frac{1}{2}}} =$

b) $\left(\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}\right)^2 =$

c) $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} =$

3 ACTIVIDADES

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide $\sqrt{6}$, si uno de los catetos mide 1 cm, ¿cuánto debe medir el otro cateto?

b. Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 1 cm y 4 cm, ¿la medida de la hipotenusa corresponde a un número racional o irracional?

2. Marquen las opciones correctas.

a. Los números que son irracionales.

○ $-\sqrt{3}$ ○ $-\sqrt{4}$ ○ π ○ $\sqrt{-2}$

b. Las operaciones cuyos resultados son números irracionales.

○ $\sqrt{2}\,.\sqrt{18}$ ○ $\sqrt{5}+1$ ○ $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ○ $-\sqrt{9}+\frac{1}{2}$

3. Representen lo números $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{2}$ en la recta numérica.

Completen:

$$\sqrt{6}=\sqrt{(\quad)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\ldots\ +5}$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$$

$$-\sqrt{2}=-\sqrt{(\quad)^2+(\quad)^2}$$

Usando regla y compas representen en la recta numérica los tres números irracionales anteriores.

4. Representen en la recta numérica los siguientes números. Usen escala de 1 cm o de 2 cm.

Cada items en una recta numerica distinta.

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sqrt{5}-1$

c. $-2\,.\sqrt{3}$

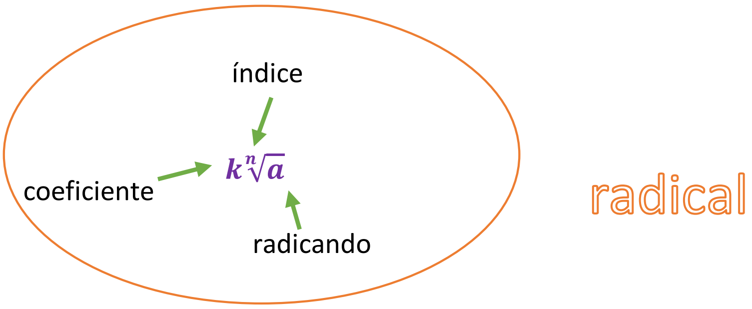
d. $-\sqrt{2}+2$

e. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

f. $-2\,.\sqrt{5}+\sqrt{2}$

Radicales. Operaciones

Recordemos las partes de un radical



Extracción de factores de un radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y de la radicación.

Ejemplo:

a) $$\sqrt[3]{16\cdot x^7} = \sqrt[3]{2^4\cdot x^6\cdot x^1} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot x^6\cdot x^1} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x^6}\cdot\sqrt[3]{x} = 2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}$$
$$= 2\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{2\cdot x}$$

b) $$\sqrt[5]{\frac{128}{243}\cdot y^5} = \sqrt[5]{\frac{2^5\cdot 2^2}{3^5}\cdot y^5} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{3^5}}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{y^5} = \frac{\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^5}}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{y^5} = \frac{2}{3}\cdot y\cdot\sqrt[5]{4}$$

Radicales Semejantes

Dos radicales son semejantes cuando tienen igual índice y el mismo radical.

Ejemplo:

Términos con radicales semejantes: * $\sqrt{3}$ y $2\cdot\sqrt{3}$

* $-2\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{2}$
* $3\cdot\sqrt[4]{x^3}$ y $-8\cdot\sqrt[4]{x^3}$

Términos con radicales no semejantes: * $-\sqrt[3]{7}$ y $2\cdot\sqrt{7}$

* $5\sqrt{3}$ y $7\sqrt{2}$
* $-4\cdot\sqrt[4]{3}$ y $9\cdot\sqrt[3]{4}$

Adición y sustracción de radicales

Solo es posible sumar o restar términos que contienen radicales semejantes.

a) $3 \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} =$
$(3 + 5 - 1) \cdot \sqrt{2} =$
$7\sqrt{2}$

b) $\underline{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5} + \underline{3\sqrt{3}} + 7\sqrt{5} =$
$(5 + 3) \cdot \sqrt{3} + (-2 + 7) \cdot \sqrt{5} =$
$8 \cdot \sqrt{3} + \quad 5 \cdot \sqrt{5}$

Observar la siguiente operación con radicales:

$3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} =$

Según lo dicho anteriormente, ¿se puede realizar? ¿Por qué?

Entonces, observar que sucede si extraes factores del radicando:

a) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 9\sqrt{50} =$

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

8	2
4	2
2	2
1	

50	2
25	5
5	5
1	

$3\sqrt{2} - \quad 5\sqrt{2^5} \quad + \quad 7\sqrt{2^3} \quad - \quad 9\sqrt{5^2 \cdot 2} =$ factorizamos 32; 8; 50

$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} + 7\sqrt{2^2 \cdot 2} - 9\sqrt{5^2 \cdot 2} =$ descomposición (esto es a $2^5 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2$)

$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + 7\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - 9\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} =$ propiedad distributiva

$3\sqrt{2} - \; 5 \cdot 2 \cdot \; 2 \cdot \; \sqrt{2} + \; 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \; - 9 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} =$ simplificación

$3\sqrt{2} - \quad 20 \cdot \sqrt{2} \quad + \quad 14 \cdot \sqrt{2} \quad - 45 \cdot \sqrt{2} =$ radicales semejantes

$(3 - 20 + 14 - 45) \cdot \sqrt{2} =$ resolución

$= -48 \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375} =$

81	3	24	2	375	5
27	3	12	2	75	5
9	3	6	2	15	5
3	3	3	3	3	3
1		1		1	

$\sqrt[3]{3^4} + 5\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} =$ factorizamos 81; 24; 375

$\sqrt[3]{3^3 \cdot 3} + 5\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} - \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} =$ descomposición

$\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3}$ propiedad distributiva

$3\sqrt[3]{3} + 5 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} =$ simplificación

$3\sqrt[3]{3} + 10\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} =$ radicales semejantes

$(3 + 10 - 5) \cdot \sqrt[3]{3} =$ resolución

$= 8\sqrt[3]{3}$

Para resolver hay que tener en cuenta los siguientes pasos:

- **a.** Factorear los radicales
- **b.** Extraer factores fuera del radical
- **c.** Identificar términos semejantes
- **d.** Operar

Multiplicación de Radicales.

De igual índice

Para multiplicar radicales con el mismo índice hay que aplicar la primera propiedad de las raíces:

$$\sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^5} =$$

Tenemos una multiplicación de dos raíces. Pues, en primer lugar, las unimos en un único radical aplicando la primera propiedad:

$$= \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^5} =$$

Ya hemos multiplicado las dos raíces. A partir de aquí tenemos que operar para simplificar el resultado. Para ello, multiplicamos las potencias dentro del radical sumando los exponentes:

$$= \sqrt[3]{2^7} =$$

Y finalmente, extraemos factores fuera de la raíz:

$$= 2^2\sqrt[3]{2}$$

De distintos índice

Vamos a empezar con un ejemplo de multiplicar raíces con el índice distinto

$$\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[4]{8^2} \cdot \sqrt{32} =$$

El primer paso es calcular el mínimo común múltiplo de los índices

$$\text{m.c.m}(3; 4; 2) = 12$$

Éste será el nuevo índice común, que lo colocamos ya en las raíces a falta del exponente del radicando:

$$= \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{8} \cdot \sqrt[12]{32} =$$

Ahora debemos hallar el número por el que se ha multiplicado índice original, para que el nuevo índice sea 12 y lo hacemos dividiendo este índice común entre el índice original de cada raíz:

$$\frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{12}{2} = 6$$

Es decir, el índice de la primera raíz se ha multiplicado por 4, el de la segunda raíz por 3 y el de la tercera por 6. Por tanto, por esos mismos números vamos a multiplicar cada uno de los exponentes de los radicandos:

$$= \sqrt[12]{2^{4 \cdot 5}} \cdot \sqrt[12]{8^{3 \cdot 2}} \cdot \sqrt[12]{32^{6 \cdot 1}} =$$

Multiplicamos exponentes:

$$= \sqrt[12]{2^{20}} \cdot \sqrt[12]{8^6} \cdot \sqrt[12]{32^6} =$$

Y ya tenemos una multiplicación de raíces con el mismo índice, cuyas raíces son equivalentes a las originales. Seguimos el procedimiento para multiplicar raíces con el mismo índice.

Verás que es muy importante dominar tanto las propiedades de las raíces como las propiedades de las potencias.

Unimos las tres raíces en una sola:

$$= \sqrt[12]{2^{20} \cdot 8^{6} \cdot 32^{6}} =$$

Dentro de la raíz nos han quedado tres potencias que tienen distinta base. Conforme están no pueden multiplicarse, ya que sólo se pueden multiplicar las potencias con la misma base.

Para buscar las potencias que tengan la misma base, hay que descomponerlas en factores primos:

$$= \sqrt[12]{2^{20} \cdot (2^{3})^{6} \cdot (2^{5})^{6}} =$$

Una vez descompuestas, vemos que nos queda una sola base. Entonces, eliminamos paréntesis y finalmente, ya podemos sumar los exponentes manteniendo la base:

$$= \sqrt[12]{2^{20} \cdot 2^{18} \cdot 2^{30}} = \sqrt[12]{2^{68}} =$$

Ya tenemos la multiplicación. Ahora vamos a simplificar el resultado extrayendo factores fuera de la raíz:

$$= 2^{5}\sqrt[12]{2^{8}} =$$

Y, por último, simplificamos la raíz dividiendo el índice y el exponente del radicando entre 4 (igual que si fuera una fracción)

$$= 2^{5}\sqrt[3]{2^{2}}$$

División de Radicales.

De igual índice

El cociente de radicales con el mismo índice se resolvería de forma similar, aplicando la segunda propiedad de las raíces:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} =$$

Para realizar este cociente de radicales con el mismo índice, en primer lugar, aplicamos la segunda propiedad de las raíces:

$$= \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} =$$

Una vez aplicada la propiedad, ves que es posible resolver la fracción, que tiene un resultado entero. Para terminar de simplificar el resultado, factorizamos el radicando y después la raíz se anulará con el exponente:

$$= \sqrt[3]{2^3} = 2$$

- *De distintos índice*

Vamos a ver otro ejemplo de cómo resolver un cociente de raíces con distinto índice:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

En primer lugar, reducimos a índice común, calculando el mínimo común múltiplo de los índices:

$$\text{m.c.m.}\,(2,3) = 6$$

Colocamos el nuevo índice en las raíces y nos preparamos para calcular el nuevo exponente de cada radicando:

$$\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}} =$$

Calculamos el número por el que se ha multiplicado índice original, para que el nuevo índice sea 6, dividiendo este índice común entre el índice original de cada raíz:

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{6}{3} = 2$$

Multiplicamos los exponentes de los radicandos por los mismos números:

$$= \frac{\sqrt[6]{x^{3\cdot 1}}}{\sqrt[6]{x^{2\cdot 2}}} = \frac{\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{x^4}} =$$

Ya tenemos las raíces equivalentes con el mismo índice, por lo que empezamos su división, uniéndolas en una sola raíz:

$$= \sqrt[6]{\frac{x^3}{x^4}} =$$

Ahora dividimos las potencias restando los exponentes:

$$= \sqrt[6]{x^{-1}} =$$

Y para terminar, aunque si lo dejas así no pasaría nada, podemos dejar el exponente como positivo, pasándolo al denominador:

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[6]{\mathbf{x}}}$$

Racionalización de denominadores.

Racionalizar un denominador significa transformar una fracción cuyo denominador es un número irracional en otra fracción igual a la dada cuyo denominador sea racional.

Es decir que,

racionalizar significa hacer desaparecer del denominador todo signo radical

Veremos tres casos.

1º Caso: El denominador es una única raíz cuadrada

Racionalizar el denominador de la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

- ✓ Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical que aparece en el denominador

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

- ✓ Realizamos todas las operaciones y simplificaciones posibles y obtenemos un denominador racional

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2º Caso: El denominador es una única raíz de cualquier índice

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7}}$$

Como el radical tiene índice mayor que 2, buscamos un factor conveniente para eliminarlo del denominador.

- ✓ Una regla práctica para eliminar un radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ (con $n > m$) consiste en multiplicar el numerador y el denominador por otro radical de la forma $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7^1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^3}}$$

$$4 - 1 = 3$$

- ✓ Realizamos todas las operaciones y simplificaciones posibles y obtenemos un denominador racional

$$\frac{1}{\sqrt[4]{7^1}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{7^1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^3}}}_{\text{Llevamos a una sola raíz}} = \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\underbrace{\sqrt[4]{7^1 \cdot 7^3}}_{\text{Producto de potencia de igual base se suman los exponentes}}} = \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\cancel{\sqrt[4]{7^4}}} = \frac{\sqrt[4]{7^3}}{7} = \frac{1}{7} \cdot \sqrt[7]{7^3}$$

Llevamos a una sola raíz

Producto de potencia de igual base se suman los exponentes

3º Caso: el denominador tiene dos términos y en él figura alguna raíz cuadrada.

Recordemos que $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.A las expresiones $a+b$ y $a-b$ las llamamos conjugadas.

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}}$$

- ✓ Multiplicamos el numerador y el denominador por la *expresión conjugada* de la que aparece en el denominador

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3}{5+\sqrt{2}} \cdot \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$$

- ✓ Realizamos todas las operaciones y simplificaciones posibles y obtenemos un denominador racional

distributiva

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3}{5+\sqrt{2}} \cdot \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{\overbrace{3\cdot\left(5-\sqrt{2}\right)}}{5^2 - \cancel{\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{15-3\sqrt{2}}{25-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23} = \frac{15}{23} - \frac{3\sqrt{2}}{23}$$

Aplicamos la propiedad

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Actividades

1) Extraer todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales

a) $\sqrt{8} =$

b) $\sqrt{\frac{27}{100}} =$

c) $\sqrt{16 \cdot x^3} =$

d) $\sqrt[2]{9 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot c} =$

e) $\sqrt[3]{-8 \cdot x^6 \cdot y^5} =$

f) $\sqrt[3]{162} =$

g) $\sqrt[3]{\frac{81 \cdot m^7 \cdot n^8}{125}} =$

h) $\sqrt[4]{\frac{32 \cdot x^{10}}{81 \cdot y^{20}}} =$

i) $\sqrt[4]{x^{21}} =$

j) $\sqrt{44 \cdot a \cdot b^2} =$

2) Calcular las siguientes sumas y restas.

a) $5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$

b) $-\frac{3}{2}\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + \sqrt{7} =$

c) $\sqrt{40} + \sqrt{90} - \sqrt{250} =$

d) $7\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{20} - \sqrt{45} =$

e) $5\sqrt[3]{81} - \frac{7}{4}\sqrt[3]{24} =$

f) $2\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} =$

g) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} =$

3) Resolver las siguientes multiplicaciones de igual índice

a) $2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{3} =$

b) $2\sqrt{12} \cdot (-3)\sqrt{75} =$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{45} \cdot \frac{2}{7}\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{20} =$

d) $5\sqrt{12} \cdot 8\sqrt{18} \cdot \sqrt{48} \cdot 6\sqrt{72} =$

4) Resolver las siguientes multiplicaciones de distinto índice

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$

b) $5\sqrt{12} \cdot (-2)\sqrt[6]{81} =$

c) $\frac{5}{4}\sqrt[4]{45} \cdot \frac{2}{15}\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt{30} =$

d) $-\sqrt{12} \cdot 8\sqrt[3]{36} \cdot 2\sqrt{48} =$

5) Resolver las siguientes divisiones de igual índice

a) $20\sqrt{6} : 4\sqrt{3} =$

b) $36\sqrt{13} : (-3)\sqrt{26} =$

c) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{45} : \frac{10}{7}\sqrt[3]{15} =$

d) $15\sqrt{48} : (-3)\sqrt{72} =$

6) Resolver las siguientes divisiones de igual índice:

a) $\frac{5\sqrt{4}}{20\sqrt[3]{16}} =$

b) $3\sqrt[3]{5} : (-3)\sqrt[6]{15} =$

c) $\frac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[3]{2}} =$

d) $15\sqrt{8} : (-100)\sqrt[4]{12} =$

7) Racionalizar los siguientes denominadores

a) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} =$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} =$

c) $\frac{5}{\sqrt{2}} =$

d) $\frac{4}{3-\sqrt{2}} =$

e) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} =$

f) $\frac{1}{\sqrt{5}} =$

g) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} =$