



Unidad N° 1: CONJUNTO E INTERVALOS REALES

TEORÍA DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN:

Un conjunto es cualquier colección de objetos bien definida cuyos objetos se llaman elementos del conjunto, donde un elemento debe estar solo una vez y el orden de los mismos no nos interesa para definir el conjunto.

Ejemplos:

1-Conjunto de las vocales

2- Conjunto de todos los pájaros negros

Se puede observar que los conjuntos pueden tener infinitos elementos o finitos como muestran los ejemplos, por ello surge dos formas de definir un conjunto.

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Una manera de describir un conjunto con números finitos de elementos es enumerar o nombrar todos sus elementos entre llaves y esta forma se denomina por **EXTENSION**.

Ejemplo:

Conjunto de las vocales {a, e, i, o, u}

Además, se usan las letras mayúsculas como A, B, C, ..., para indicar conjuntos y letras minúsculas como a, b, c, x, y para indicar los elementos del conjunto.

El hecho de que x sea un elemento del conjunto A se simboliza $x \in A$, que se lee x pertenece al conjunto A.

El hecho de que x no sea un elemento del conjunto A se simboliza $x \notin A$, que se lee x no pertenece al conjunto A.

Por ejemplo para $A = \{a, e, i, o, u\}$ se verifica $a \in A$, $e \in A$, $u \in A$ pero $m \notin A$

Algunas veces es imposible enunciar todos los elementos de un conjunto, se busca una propiedad que identifique a todos sus elementos, esta forma de definir un conjunto se denomina por **COMPRESION** y se escribe:

$\{x/x \text{ "se enuncia la propiedad"}\}$

Ejemplos

$B = \{x/x \text{ es un entero positivo menor que } 4\}$ por comprensión

$B = \{1, 2, 3\}$ por extensión.

De acuerdo a la cantidad de elementos los conjuntos se clasifican en:

CONJUNTO VACIO: Es aquel conjunto que no posee elemento alguno, se simboliza \emptyset .

COJUNTO UNIVERSAL: Se denota con U y es aquel conjunto que contiene todos los posibles elementos del tema en estudio.

De acuerdo a la relación existente entre los conjuntos tenemos:

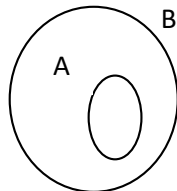
SUBCONJUNTO

Cuando todos los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B, esto es que si $x \in A$ entonces $x \in B$, se dice que A es un subconjunto de B y se escribe simbólicamente: $A \subseteq B$. Si A no es un subconjunto de B, se escribe $A \not\subseteq B$.

Para visualizar la relación existente entre 2 o más conjuntos se usa una representación gráfica que se denomina Diagrama de Venn en honor al británico John Venn.

Así, si $A \subseteq B$ se tiene:

$A \subseteq B$



IGUALDAD DE CONJUNTOS

La relación entre subconjuntos permite definir la igualdad entre conjuntos de la siguiente forma:

$$A = B \text{ si y solo si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

Es decir dos conjuntos son iguales si cada uno es subconjunto del otro.

Ejemplo:

Dado los conjuntos $A = \{-2; 2\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 - 4 = 0\}$

Si resolvemos la ecuación $x^2 - 4 = 0$ las soluciones son 2 y -2. Se concluye que ambos conjuntos son iguales $A=B$.

OPERACIONES CON CONJUNTOS

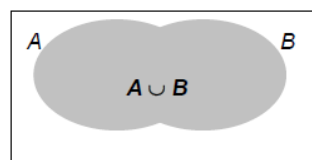
Las operaciones con conjuntos permiten obtener nuevos conjuntos.

Unión "U"

Si A y B son dos conjuntos, se define su **unión** como otro conjunto, que se denota $A \cup B$, que contiene **todos los elementos que pertenecen a A o todos los elementos que pertenecen a B, o a ambos.**

Simbólicamente se expresa: $A \cup B = \{x/ x \in A \text{ o } x \in B\}$

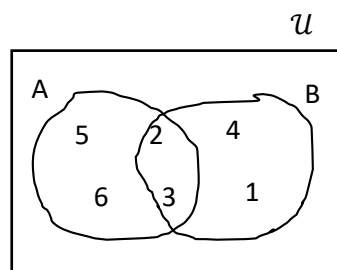
Gráficamente:



Ejemplo:

Si $A = \{2; 3; 5; 6\}$ $B = \{1; 2; 3; 4\}$ encontrar la unión

$A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$



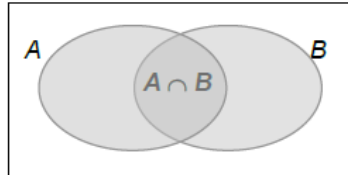
INTERSECCION “∩”

Si A y B son dos conjuntos, se define su **intersección** a otro conjunto, que se denota $A \cap B$, que contiene **todos los elementos que pertenecen a A y todos los elementos que pertenecen a B**.

Es decir que tienen los elementos que pertenecen a A como a B en forma simultánea.

Simbólicamente se expresa: $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$

Gráficamente:



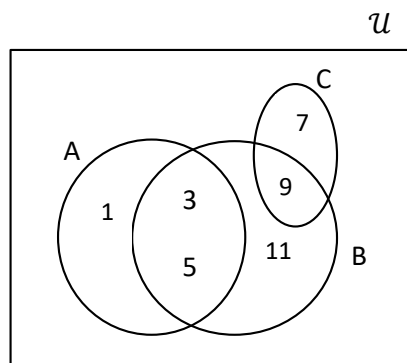
Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1; 3; 5\}$ $B = \{3; 5; 9; 11\}$ $C = \{7; 9\}$. Encontrar:

$A \cap B =$

$A \cap C =$

$B \cap C =$

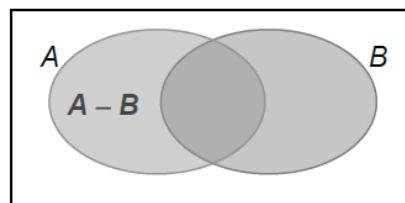


DIFERENCIA “—”

Si A y B son 2 conjuntos, se define **la diferencia de A respecto de B**, se escribe como $A - B$, al conjunto formado por **los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B**.

Simbólicamente se expresa $A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Gráficamente:

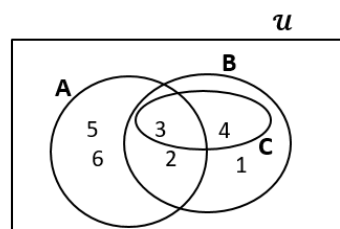


Ejemplo

Con los siguientes conjuntos $A = \{2; 3; 5; 6\}$ $B = \{1; 2; 3; 4\}$ $C = \{3; 4\}$. Encontrar:

a) $A - B =$

b) $B - C =$



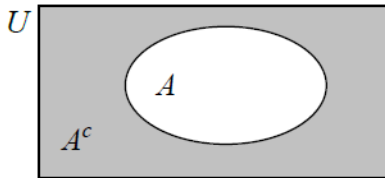
COMPLEMENTO

Si U es el conjunto universal que contiene al conjunto A , se llama **complemento de A** y se simboliza \bar{A} al conjunto formado **por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A** .

Simbólicamente se expresa: $\bar{A} = \{x / x \in U \text{ y } x \notin A\}$

Gráficamente:

El área sombreada, representa el conjunto complemento de A .

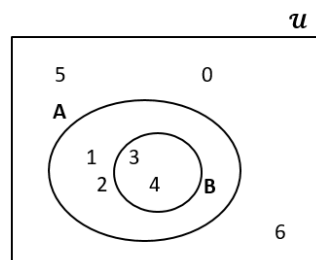


Ejemplo

Si $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{3; 4\}$. Encontrar:

a) $\bar{A} =$

b) $\bar{B} =$



ACTIVIDADES

1) Dados los conjuntos:

A: conjunto de los meses del año

B: conjunto de los números enteros

C: conjunto de los enteros positivos divisores de 15

Analizar y escribir \in o \notin según corresponda.

- a) Octubre.....A
- b) 2 de Abril.....A
- c) 5B
- d) -3 C
- e) -6 B
- f) $\sqrt{6}$C
- g) 15C
- h) -5B
- i) LunesA

2) Expresar por extensión los siguientes conjuntos.

a) $A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -5 < x \leq 5\}$

b) $B = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < x < 5\}$

c) $C = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } x = 2 \cdot n - 4 \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n < 4\}$

d) $D = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x = 2 \cdot n + 3 \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } 5 < n \leq 7\}$

e) $E = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x = p + 1 \text{ con } p \in \mathbb{Z} \text{ y } -2 < p < 4\}$

f) $F = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es divisor de } 12\}$

g) $G = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x = 3 \cdot n \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ y } n < 5\}$

3) Expresar por comprensión los siguientes conjuntos.

a) $A = \{s; a; l\}$

b) $B = \{1; 2; 3; 4\}$

c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

d) $D = \{1; 2; 4\}$

e) $E = \{1; 2; 3; 6\}$

f) $F = \{1; 2; 4; 8\}$

4) Dados los conjuntos $A = \{2,4,6,7,8\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par y } x < 10\}$ ¿Cuáles de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $A = B$

b) $A \subseteq B$

c) $B \subseteq A$

d) $A \cup B = \{2,4,6,8,10\}$

e) $A \cap B = \{7\}$

f) $A - B = \{7\}$

5) Dados los conjuntos $\mathcal{U} = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -5 \leq x < 12\}$

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } x^2 + 3x = 0\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } 3 < x \leq 10\}$$

i. Definir por extensión los conjuntos dados.

ii. Calcular:

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $B - A =$

d) $\mathcal{U} - A =$

e) $A - B =$

f) $A \cap \bar{B} =$

g) $\bar{A} \cup \bar{B} =$

6) Dados los conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } x \text{ es divisor de } 6\}$$

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 \leq x < 6\} \quad \text{y}$$

$$B = \{z/z \in \mathbb{N} \text{ y } z = x - 1 \text{ con } x \in A\}.$$

a) Definir por extensión los conjuntos dados.

b) Calcular:

i. $A \cap B =$

ii. $A \cup B =$

iii. $B - A =$

iv. $\mathcal{U} - B =$

v. $\overline{A \cap B} =$

vi. $\overline{A} \cup B =$

7) Si:

$$\mathcal{U} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$$

$$A = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < x < 4\}$$

$$B = \{z/z \in \mathbb{N} \text{ y } z = 2x - 3 \text{ y } x \in A\}$$

i. Definir por extensión los conjuntos dados.

ii. Calcular:

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $B - A =$

d) $\mathcal{U} - B =$

e) $A - B =$

f) $B \cap \overline{A} =$

g) $\overline{A \cup B} =$

8) Dados los conjuntos $A = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es divisor de } 12\}$ y

$$B = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x = 3n \text{ } n \in \mathbb{N}, \text{ con } n < 5\}$$

a) Expresar ambos conjuntos por extensión

b) Encontrar:

i. $A \cap B =$

ii. $B - A =$

iii. $A \cup B =$

9) Sea $\mathcal{U} = \{x/x \text{ es un dígito}\}$;

$$A = \{x/x \text{ es un dígito impar}\};$$

$$B = \{1; 2; 5; 6; 9\} \text{ y}$$

$$C = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } 2 < x \leq 7\}$$

Expresar por extensión los conjuntos, calcular y representar gráficamente:

a) $B - A =$

b) $\mathcal{U} - B =$

c) $C - A =$

e) $\bar{A} \cup \bar{B} =$

d) $A \cap \bar{B} =$

f) $A - C =$

10) Dados los conjuntos:

$$\mathcal{U} = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -5 \leq x < 8\};$$

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } x \cdot (x + 3) = 0\} \quad \text{y}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } 3 < x \leq 7\}$$

Expresar por extensión los conjuntos, calcular y representar gráficamente:

a) $A - B =$

b) $B - A =$

c) $\mathcal{U} - B =$

d) $\overline{B - A} =$

e) $\bar{A} \cap \bar{B} =$

11) Dados los conjuntos $\mathcal{U} = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -6 < x \leq 6\};$

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 \leq x < 6\}$$

$$B = \{z/z \in \mathbb{N} \text{ y } z = x + 1 \text{ con } x \in A\}$$

$$C = \{x/x \in \mathbb{Z} \text{ y } (x - 3)(x + 5)(x - 1) = 0\}$$

a) Definir por extensión los conjuntos dados.

b) Calcular y representar gráficamente:

i. $A \cup B =$

ii. $A \cup C =$

iii. $C \cap A =$

iv. $A \cap B =$

v. $\bar{A} =$

vi. $A - B =$

vii. $B - A =$

viii. $\bar{B} =$

Intervalos

La representación gráfica del conjunto de los números reales es en la recta numérica.

Dos números Reales a y b con $a < b$ se lee: " a menor que b ".

Ejemplo:

- a) Expresar lo números reales que son menores que dos.

Se escribe $x < 2$.

- b) Expresar los números reales mayores que -1 y menores que 3 . Se escribe $-1 < x < 3$

Los intervalos son subconjuntos de los números reales comprendidos entre dos valores fijos llamados extremos del intervalo, los extremos pueden o no pertenecer al intervalo.

Estas expresiones son subconjuntos de los números reales, llamados intervalos de la recta real.

DISTINTOS TIPOS DE INTERVALOS

Intervalos abiertos: Llamamos intervalo abierto $(a; b)$ al conjunto de los números \mathbb{R} mayores que a y menores que b , donde a y b son los extremos que NO pertenecen al intervalo, se escribe:

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} \quad \text{---} (\text{---}) \text{---}$$

Intervalo cerrado: Llamamos intervalo cerrado $[a; b]$ al conjunto de los números \mathbb{R} mayores que a y menores que b , donde a y b son los extremos que SI pertenecen al intervalo, se escribe:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} \quad \text{---} [\text{---}] \text{---}$$

Se puede realizar las combinaciones con los extremos llamados **intervalos semiabiertos**.

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} \quad \text{---} (\text{---}] \text{---}$$

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} \quad \text{---} [\text{---}) \text{---}$$

Intervalos infinitos:

$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$

$$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

$$[a; \infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

Nota: los intervalos no se expresan por extensión.

OPERACIONES CON INTERVALOS

La forma de trabajar será gráficamente y luego se expresará el resultado como intervalo.

Por ejemplo:

Dados los intervalos $A = (-\infty; 5]$ y $B = [-3; 7)$



Hallar:

$$A \cup B = (-\infty; 7) \quad (\text{todo})$$

$$A \cap B = [-3; 5] \quad (\text{los dos colores})$$

$$A - B = (-\infty; -3) \quad (\text{solo color lila}) \text{ observen que el } -3 \text{ pertenece al intervalo B, por eso colocamos)$$

$$B - A = (5; 7) \quad (\text{solo lo de color azul}) \text{ acá como el 5 pertenece al intervalo A, colocamos ($$

VALOR ABSOLUTO

Definición: Al valor absoluto del número real “ x ” denotaremos por $|x|$, y se define mediante la siguiente regla:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|68| = 68$$

$$|-68| = -(-68) = 68$$

$$\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

$$\left|-\frac{2}{3}\right| = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

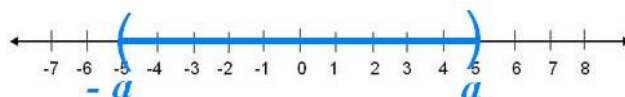
Propiedades

En los ejercicios utilizamos las propiedades del valor absoluto; son muchas, pero nosotros trabajaremos solo con dos

- 1) El valor absoluto de x es menor que un número a ; esto significa que el valor de x está comprendido entre $-a$ y a

Es decir, el x pertenece al intervalo abierto $(-a; a)$ En símbolos:

$$|x| < a \text{ entonces } -a < x < a \text{ esto significa } x \in (-a; a)$$

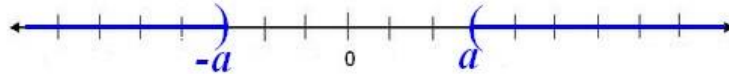


- 2) El valor absoluto de x es mayor que un número a ; esto significa que el valor de x es menor que $-a$ o x es mayor que a .

Es decir, el x pertenece al intervalo abierto $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$

En símbolos:

$|x| > a$ entonces $x < -a$ o $x > a$ esto significa $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$



- a) si tenemos menor o igual el intervalo será cerrado, lo mismo si es mayor o igual.
 b) v significa “o”, que es la unión

CASO	MODELO	SOLUCIÓN
1	$ a < b$	$-b < a < b$
2	$ a \leq b$	$-b \leq a \leq b$
3	$ a > b$	$a < -b \cup a > b$
4	$ a \geq b$	$a \leq -b \cup a \geq b$

Desigualdades con Valor Absoluto

1. Resuelva: $|8 - 4x| \leq 5$.

$$|X| \leq p$$

Usamos esta regla.

$$|8 - 4x| \leq 5$$

Sustituimos

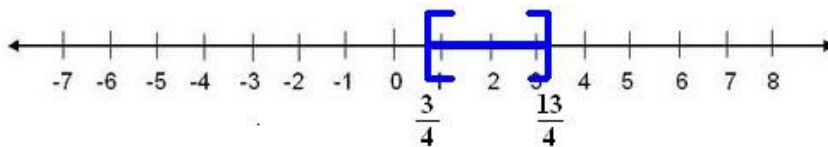
$$-5 \leq 8 - 4x \leq 5$$

$$-13 \leq -4x \leq -3$$

$$\frac{13}{4} \geq x \geq \frac{3}{4}$$

Dividimos por -4 e invertimos los símbolos de desigualdad

$$\left[\frac{3}{4}, \frac{13}{4} \right] = \left\{ x \mid \frac{13}{4} \geq x \geq \frac{3}{4} \right\} \text{ o } \left\{ x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4} \right\}$$



2.

$$|X + 4| > 5$$

$$X + 4 > 5$$

$$X + 4 < -5$$

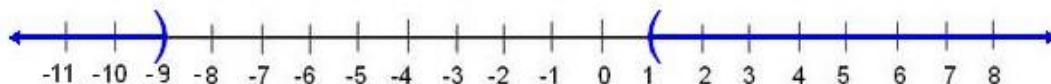
$$X > 5 - 4$$

$$X < -5 - 4$$

$$X > 1$$

$$X < -9$$

$$(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$$



Actividades

1) Resolver las operaciones:

- a) $[-8; 5] \cup (0; 9) =$
- b) $(-\infty; 4] \cap [-2; 7) =$
- c) $\left[-\frac{3}{2}; 5\right) - (0; \infty) =$
- d) $(-\infty; 5] - [2; 7) =$
- e) $[-2; 7] \cap (-4; 6) =$
- f) $(-5; 1) \cup (-3; 4) =$
- g) $(-1; \sqrt{2}] \cap (\sqrt{2}; 5) =$
- h) $(5; \infty) - (2; 5] =$
- i) $(5; \infty) \cup (-3; 5] =$
- j) $(-3; 5] - (5; \infty) =$

2) Dados los conjuntos:

$$X = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } -2 < x \leq 4\}$$

$$Y = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } |x| > 3\}$$

$$Z = \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } x \leq -\frac{1}{2}\right\}$$

Se pide:

- a) Expresar cada conjunto como intervalo.
- b) Efectuar las operaciones $X \cap Y$; $Z - X$.
- c) Escribir el resultado de cada operación anterior como intervalo.

3) Hallar el intervalo correspondiente al conjunto y representarlo gráficamente:

$$A = \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } \left|\frac{-3x+1}{2}\right| > 2\right\}$$

$$B = \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } \left|\frac{x-4}{3}\right| \leq 2\right\}$$

$$C = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } |2x+6| < 4\}$$

$$D = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } |7-4x| \geq 3\}$$