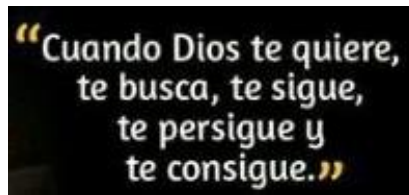




Asignatura: Matemática. **Profesoras:** Paola Sánchez, Cecilia Vallejo.
Cursos: 4° "A", 4° "B".



Potencias de la Unidad Imaginaria

Aplicando las propiedades de potenciación en \mathbb{R} , se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria i .

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Y así sucesivamente se observa que las potencias de i son: 1, i , -1 y $-i$ y se repiten periódicamente

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

El resultado de elevar la unidad imaginaria a un número natural n es igual a elevarlo al resto de la división entre n y 4. Por ejemplo:

$$i^{75} = i^3 = -i$$
$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 4} \\ \underline{3} \\ 18 \end{array}$$

Actividad 1: Une con la respuesta correcta.

a. $\sqrt{3} i^{35} \cdot i^{29} =$

b. $i^{23} : i^{13} =$

c. $i^{30} \cdot i^{12} : i =$

d. $\sqrt{3} i^{18} : i^{13} =$

e. $i^{12} \cdot i^{15} : i^{17} =$

f. $i^{13} : (i^4 \cdot i^{18}) =$

- -1
- $\sqrt{3}i$
- 1
- i
- $\sqrt{3}$
- -i

Módulo de un número complejo

A cada número complejo $z = (a;b)$ le está asociado un vector \vec{v} , con origen en el punto (0;0) y extremo en el punto (a;b).

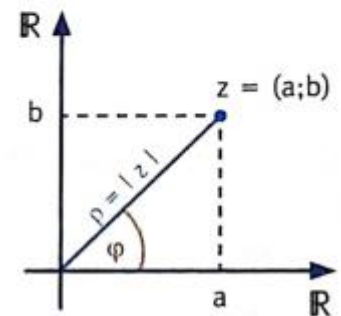
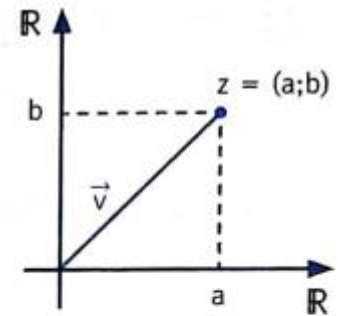
De este modo se puede hacer corresponder un vector a cada número complejo.

El módulo de ese vector es el **módulo del complejo** y se representa con la letra ρ .

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al ángulo $\hat{\phi}$ se lo llama **argumento**.



Operaciones con números complejos

Suma y resta

Para sumar o restar dos o más números complejos, se deben sumar o restar por un lado las componentes reales entre sí y por otro lado, las componentes imaginarias. En símbolos:

Por ejemplo:

Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ calcular: $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

Resolución:

$$z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (-1 - 2i)$$

$$z_1 + z_2 = (-3 - 1) + (5i - 2i)$$

$$z_1 + z_2 = -4 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (-1 - 2i)$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 1) + (5i + 2i)$$

$$z_1 - z_2 = -2 + 7i$$

Actividad 2: Resuelve las siguientes sumas algebraicas.

a. $2i + 8i + (-3i) =$

b. $5i + 1 - \frac{1}{3}i - 5 + 2i =$

c. $(3 - i) - (4 + 3i) + (1 - 2i) =$

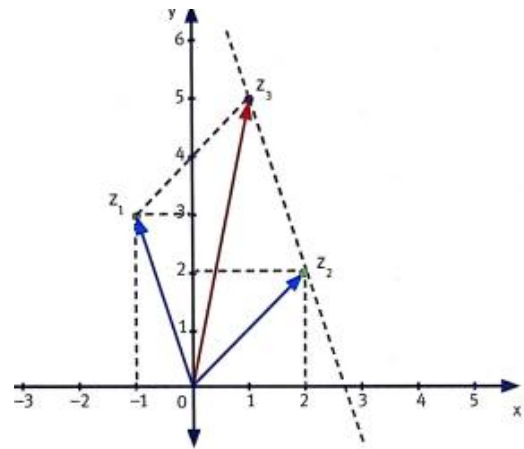
d. $\left(\frac{1}{2} + 2i\right) + \left(-\frac{1}{3} + 4i\right) - \left(\frac{1}{2} - i\right) =$

Suma y resta de enteros en forma gráfica.

Para **sumar gráficamente** dos números complejos ($z_1 + z_2$), se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza la recta paralela al vector asociado a uno de los números complejos (z_1) que pase por el otro (z_2).

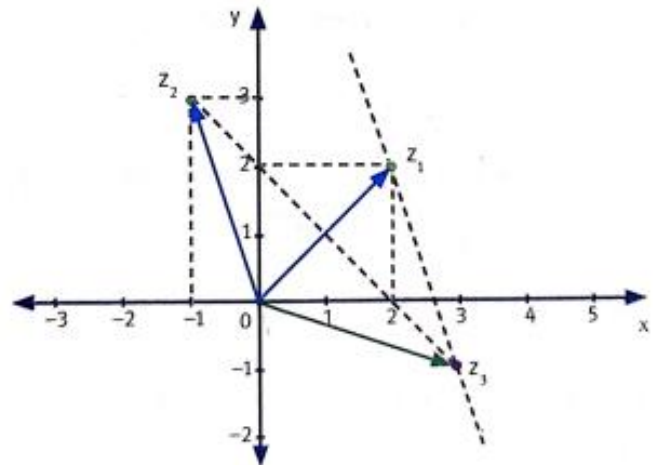
2. Se traza un vector con origen en z_2 con el mismo módulo y sentido que z_1 . El extremo de ese vector determina z_3 ($z_1 + z_2$).



Para **restar gráficamente** dos números complejos ($z_1 - z_2$), se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza la recta paralela al vector asociado a uno de los números complejos (z_2) que pase por el otro (z_1).

2. Se traza un vector con origen en z_1 con el mismo módulo y sentido opuesto a z_2 . El extremo de ese vector determina z_3 ($z_1 - z_2$).



Multiplicación.

Para multiplicar dos números complejos en forma binómica se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y/o resta.

Ejemplo: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ calcular: $z_1 \cdot z_2$

Resolución:

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (-1 - 2i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -3 \cdot (-1 - 2i) + 5i \cdot (-1 - 2i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 + 6i - 5i - 10i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 + i - 10 \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3 + i + 10$$

$$z_1 \cdot z_2 = 13 + i$$

Actividad 3: Resuelve.

a. $(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i) = \underline{\hspace{2cm}}$

b. $(4 - 5i) \cdot (-2 - i) = \underline{\hspace{2cm}}$

c. $(\sqrt{7} + \sqrt{5}i) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5}i) = \underline{\hspace{2cm}}$

d. $\left(5; \frac{3}{2}\right) \cdot \left(4; \frac{1}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

División

Para dividir dos números complejos en forma binómica se multiplica al dividendo y al divisor por el conjugado del divisor, y luego se resuelven las operaciones resultantes

Ejemplo: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 + 2i$ calcular: $z_1 \div z_2$

$$\text{Resolución: } \frac{-3 + 5i}{-1 + 2i} = \frac{-3 + 5i}{-1 + 2i} \cdot \frac{-1 - 2i}{-1 - 2i} = \frac{-3 \cdot (-1 - 2i) + 5i \cdot (-1 - 2i)}{(-1)^2 - (2i)^2} = \frac{13 + i}{1 - 4i^2} = \frac{13 + i}{1 + 4} = \frac{13 + i}{5} = \frac{13}{5} + \frac{1}{5}i$$

Actividad 4: Resuelve.

a) $\frac{4+2i}{4-2i} =$

b) $\frac{2+i}{3-2i} =$

c) $\frac{(6+2i) \cdot (5+3i)}{2+2i} =$

Actividad 5: Desarrolla las siguientes potencias.

a) $(3 - 5i)^2 =$

b) $(-1 + 3i)^2 =$

c) $(2 - i)^2 =$

Operaciones combinadas.

Las operaciones combinadas entre números complejos se resuelven respetando la jerarquía de cada una de ellas.

- 1.º Se resuelven las potencias y raíces;
- 2.º se resuelven las multiplicaciones y divisiones;
- 3.º se resuelven las sumas y restas.

Los paréntesis alteran el orden de resolución de las operaciones.

$\frac{(3+i) \cdot (4-2i)}{(5+i)^2} = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot (-2i) + i \cdot 4 + i \cdot (-2i)}{5^2 + 2 \cdot 5 \cdot i + i^2}$ Se resuelven la multiplicación y el cuadrado del binomio.

$= \frac{12 - 6i + 4i + 2}{25 + 10i - 1}$

$= \frac{14 - 2i}{24 + 10i} \cdot \frac{24 - 10i}{24 - 10i}$

Se resuelve la división.

$= \frac{14 \cdot 24 + 14 \cdot (-10i) - 2i \cdot 24 - 2i \cdot (-10i)}{24^2 + 10^2}$

$= \frac{336 - 140i - 48i - 20}{576 + 100}$

$= \frac{316 - 188i}{676}$

$= \frac{316}{676} - \frac{188i}{676}$

$= \frac{79}{169} - \frac{47}{169}i$

Actividad 6: Resuelve los siguientes cálculos combinados.

a) $\frac{3 - i}{2i^{12} - 5i^3} =$

b) $\frac{2 - i^{14}}{2 + i} =$

c) $\frac{i^3 + 3i^2 + i}{-1 - i^7} =$

Antes de terminar, responde las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué aprendiste en esta guía? ¿Qué relación tiene con lo trabajado en la guía anterior?
- b) ¿Qué dificultades tuviste para comprender el tema?
- c) ¿Cuál de las operaciones te resultó más compleja? ¿Por qué?

