

## Unidad N° 2: Función FUNCIÓN

Una **función** es una relación que a cada valor de la variable independiente,  $x$  le corresponde “un único valor” de la variable dependiente,  $y$ .

Simbólicamente una función se expresa:

$$y = f(x) \text{ Se lee: “ } y \text{ es función de } x \text{” o “ } y \text{ es igual a } f \text{ de } x \text{”}$$

Lo que significa que el valor que toma “ $y$ ” depende del valor que le damos a “ $x$ ”.

### DOMINIO E IMAGEN

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se escribe: Dom  $f$

La imagen de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se simboliza: Im  $f$ .

Las funciones se pueden clasificar según el tipo de operaciones que se realizan con la variable en : algebraica y trascendentes.

La clasificación de funciones permite agruparlas en familias de funciones.

#### Familia de Funciones Algebraicas

Son aquellas en que la variable está afectada a las operaciones de: suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz.

Se clasifican en:

- Racionales:** la variable está afectada a todas las operaciones menos la radicación. Pueden ser Polinómicas y Fraccionarias.
- Irracionales:** sobre la variable se efectúan toda clase de operaciones algebraicas.

#### Familia de Funciones Trascendentes

Se clasifican en: Trigonómicas, Exponenciales y Logarítmicas.

Ejemplos:

$$f(x) = x^3 - 3x + 8 \text{ Función Algebraica Racional Entera}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \text{ Función Algebraica Racional Fraccionaria}$$

$$h(x) = \sqrt{x - 5} \text{ Función Algebraica Irracional}$$

$$i(x) = 3 \cos(x - 1) \text{ Función Trascendentes Trigonometrica}$$

$$j(x) = 7^{x-1} \text{ Función Trascendentes Exponencial}$$

$$m(x) = \log_2(x + 2) \text{ Función Trascendentes Logarítmica}$$

## RESTRICCIONES AL DOMINIO

Las más comunes son:

- ↳ **Los denominadores:** “Deben ser distintos de cero”. Ya que la división por cero no existe.
- ↳ **Las raíces de índice par:** “El argumento de las raíces debe ser mayor o igual a cero” ya que no existen las raíces pares de números negativos en el campo de los números reales.
- ↳ **Los logaritmos:** “El valor o expresión afectado/a por un logaritmo debe ser mayor a cero”.

**Nota:** si la función no tiene ni denominadores, ni raíces, ni logaritmos, por ahora podemos decir que su dominio son todos los números reales.

Ejemplo:

a) Veamos cual es el dominio de la función  $f(x) = \frac{x+1}{5x+6}$

El denominador debe ser distinto de cero  $\rightarrow 5x + 6 \neq 0$

$$5x \neq -6$$

$$x \neq -\frac{6}{5}$$

Luego  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

b) Determinar el dominio de  $f(x) = \sqrt{x+2}$

El argumento debe ser mayor o igual a cero  $\rightarrow x + 2 \geq 0$

$$x \geq -2$$

Luego  $\text{Dom } f = [-2; \infty)$

c) Calcular el dominio de  $f(x) = \log_2(x-6)$

La expresión  $x + 6 > 0$

$$x > -6$$

Luego  $\text{Dom } f = (-6; \infty)$

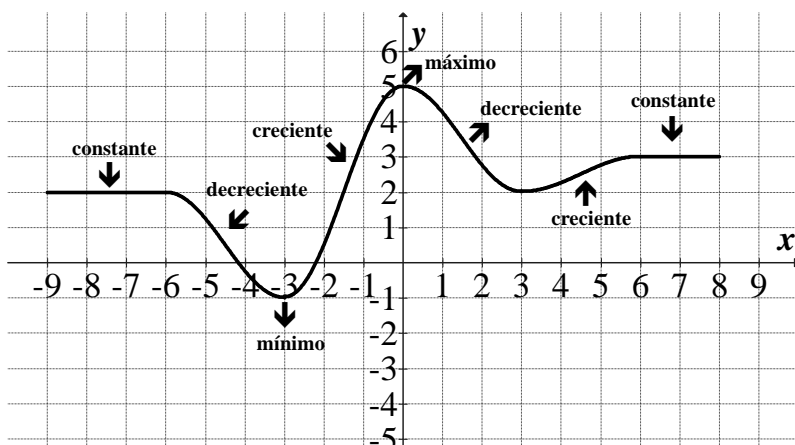
## CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para estudiar las variaciones de una función hay que mirarla de izquierda a derecha.

Una función es **creciente** cuando al “aumentar  $x$ , aumenta  $y$ ”.

Una función es **decreciente** cuando al “aumentar  $x$ , disminuye  $y$ ”.

Una función es **constante** cuando al “aumentar  $x$ , no varia  $y$ ”.



$$\text{Dom } f = [-9; 8]$$

$$\text{Im } f = [-1; 5]$$

$$\text{Creciente} = (-3; 0) \cup (3; 6)$$

$$\text{Decreciente} = (-6; -3) \cup (0; 3)$$

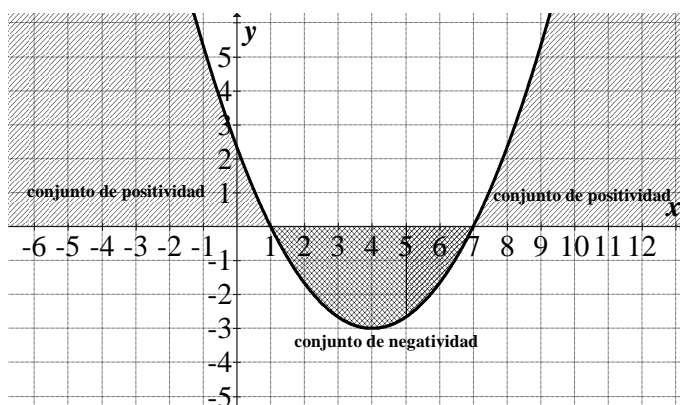
$$\text{Constante} = (-9; -6) \cup (6; 8)$$

$$\text{Máximo} = (0; 5)$$

$$\text{Mínimo} = (-3; -1)$$

Una función es **creciente** o **decreciente** por tramos, el punto que toma el “mayor valor en un tramo creciente” es el **máximo** de la función, el punto que toma el “menor valor en un tramo decreciente” es el **mínimo** de la función.

## POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD



El **conjunto de positividad** ( $C^+$ ) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes positivas.

El **conjunto de negatividad** ( $C^-$ ) de una función está formado por todos los valores del dominio que tienen imágenes negativas.

$$C^+ = (\infty; 1) \cup (7; \infty)$$

$$C^- = (1; 7)$$

## RAÍZ DE UNA FUNCIÓN

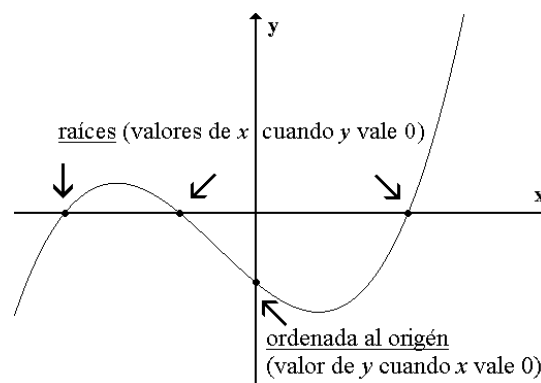
Las raíces de una función son los valores de  $x$  que hacen que  $y$  valga cero.

Como  $y$  vale cero “[la gráfica de la función corta el eje de las  \$x\$  en esos puntos](#)”.

## ORDENADA AL ORIGEN DE UNA FUNCIÓN

La ordenada al origen de una función es el valor que toma  $y$  cuando  $x$  vale cero.

De esta forma la ordenada al origen es el “[punto en donde la gráfica de la función corta al eje de la  \$y\$](#) ”.

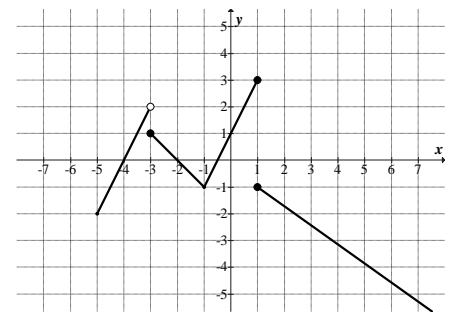
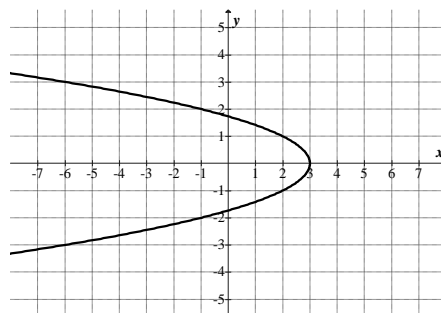
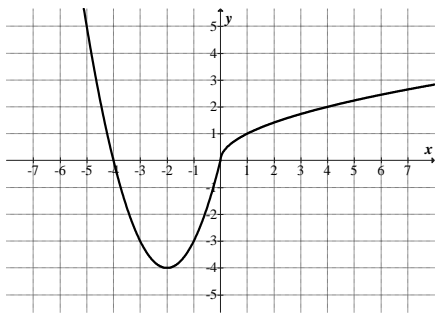


### Para tener en cuenta:

- El gráfico de una función corta al eje de las  $y$  (ordenada al origen) cuando  $x$  vale 0.
- El gráfico de una función corta al eje de las  $x$  (raíz) cuando  $y$  vale 0.
- Como el eje de las  $x$  es la recta real puede suceder que la función no tenga contacto con el eje  $x$ , en cuyo caso la función no tiene raíces reales.

## ACTIVIDADES

- 1) Decidir cuáles de las siguientes gráficas representan funciones y cuáles no. Justificar. Las que sean funciones analizar dominio e imagen.



- 2) Dadas las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = (x - 1)^2$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: g(x) = x^2 - 1$  calcular:

$$f(-2) =$$

$$g(-2) =$$

$$f(2) =$$

$$g(2) =$$

$$f(0) =$$

$$g(0) =$$

$$f(-5) =$$

$$g(-5) =$$

- 3) Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{3}{2x-4}$

b)  $f(x) = \sqrt[4]{-x+3}$

c)  $f(x) = 3x - 2$

d)  $f(x) = \log(1 - 2x)$

e)  $f(x) = \frac{x+2}{-x-3}$

f)  $f(x) = \sqrt{2x-1}$

g)  $f(x) = \frac{x^2-25}{3x+36}$

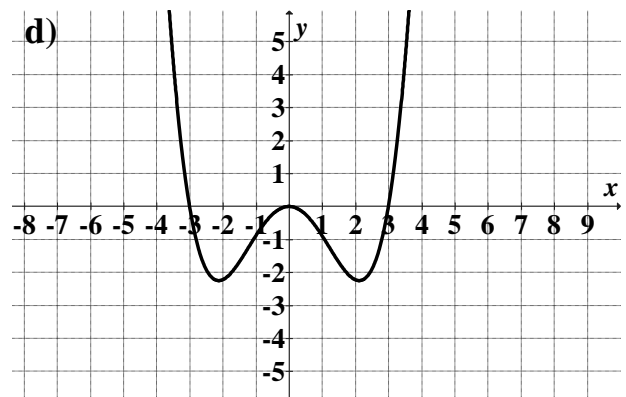
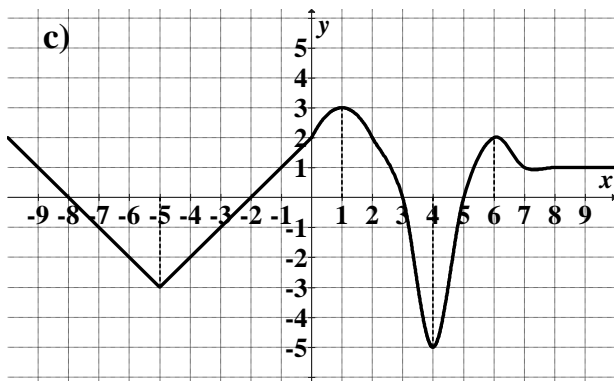
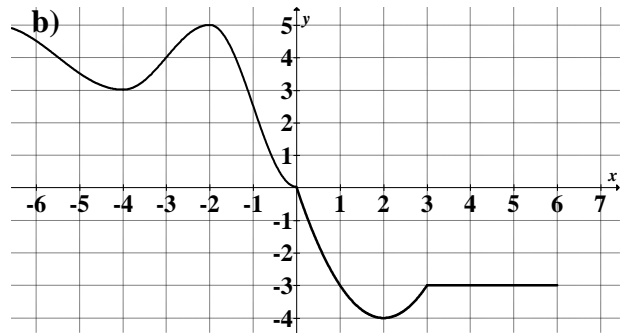
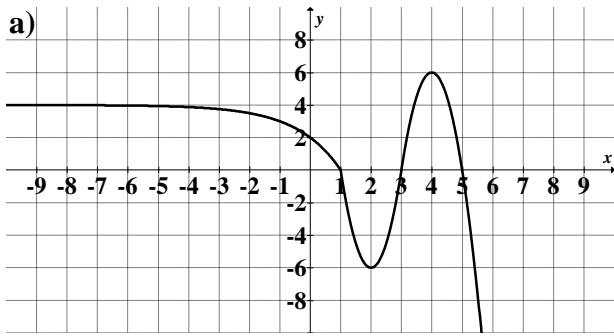
h)  $f(x) = 7x^2 + 5$

i)  $f(x) = \sqrt{12-x}$

j)  $f(x) = \log(3x+5)$

4) Dados los siguientes gráficos de funciones:

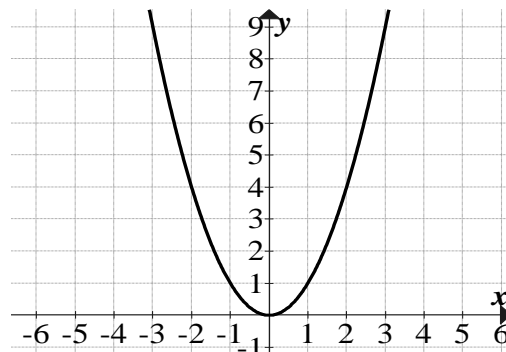
- Indicar el dominio
- Indicar la imagen
- Escribir las raíces de la función
- Escribir intervalos donde la función crece, decrece y es constante
- Escribir los intervalos donde la función sea positiva y negativa



## FUNCIÓN CUADRÁTICA

Llamamos **función cuadrática** a toda función del tipo:

$$y = x^2$$



Esta función está definida para todos los valores de  $x$ . Por lo tanto el **dominio** de las funciones cuadráticas es el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ). Y la **imagen** es  $[0; +\infty)$ .

Tiene un eje de simetría vertical.

La función es creciente en:  $(0, +\infty)$

La función es decreciente en:  $(-\infty, 0)$

Desplazamiento vertical  $y = f(x) + k$

$$y = x^2 + 3$$

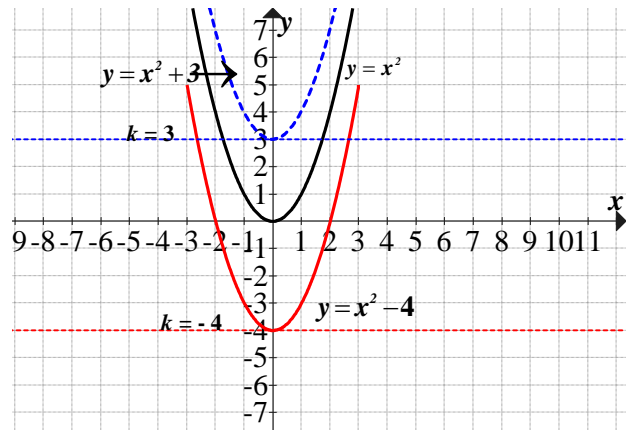
Al **sumar** 3 unidades, hace que la gráfica se desplace 3 unidades hacia **arriba**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[3; +\infty)$

Crec:  $(0, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, 0)$



$$y = x^2 - 4$$

Al **restar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades hacia **abajo**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[-4; +\infty)$

Crec:  $(0, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, 0)$

Desplazamiento horizontal  $y = f(x - h)$

$$y = (x + 4)^2$$

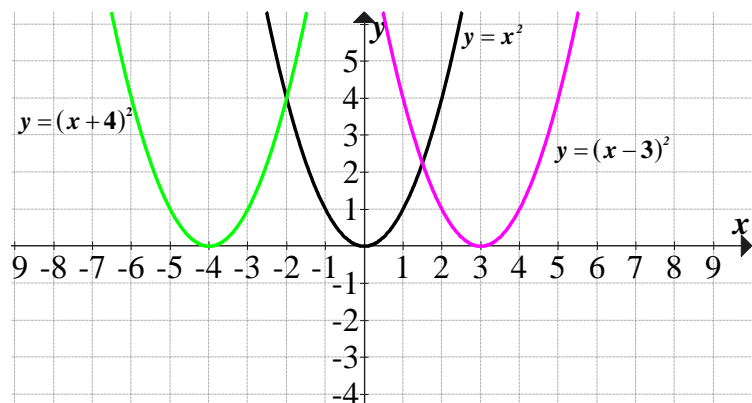
Al **sumar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[0; +\infty)$

Crec:  $(-4, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, -4)$



$$y = (x - 3)^2$$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[0; +\infty)$

Crec:  $(3, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, 3)$

## Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = (x + 4)^2 - 2$$

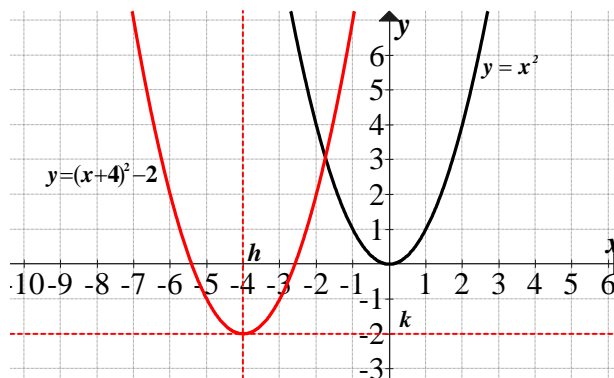
Al **sumar** 4 unidades y **restar** 2 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda** y 2 unidades hacia **abajo**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[-2; +\infty)$

Crec:  $(-4, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, -4)$



## ACTIVIDADES

5) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:

a)  $y = (x + 2)^2 - 3$

b)  $y = (x + 1)^2$

c)  $y = -x^2$

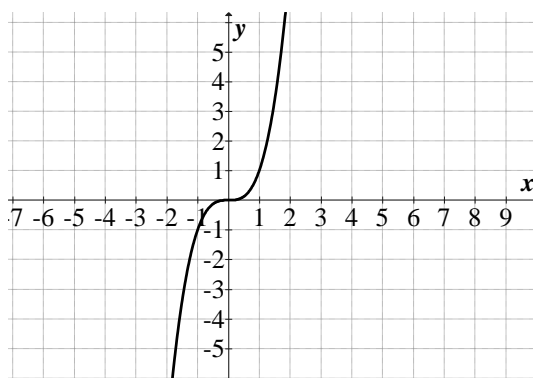
d)  $y = -(x - 2)^2$

e)  $y = -(x - 3)^2 + 2$

## FUNCIÓN CÚBICA

Llamamos **función cúbica** a toda función del tipo:

$$y = x^3$$



Esta función está definida para todos los valores de  $x$ . Por lo tanto el **dominio** de las funciones cuadráticas es el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ).

Y la **imagen** es el conjunto de los números reales.

La función es creciente en:  $\mathbb{R}$

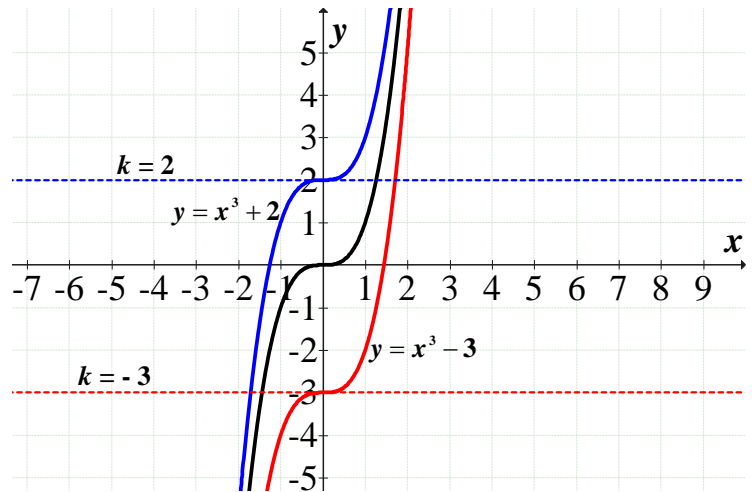
Desplazamiento vertical  $y = f(x) + k$

$$y = x^3 + 2$$

Al **sumar** 2 unidades, hace que la gráfica se desplace 2 unidades hacia **arriba**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $\mathbb{R}$



$$y = x^3 - 3$$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades hacia **abajo**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $\mathbb{R}$

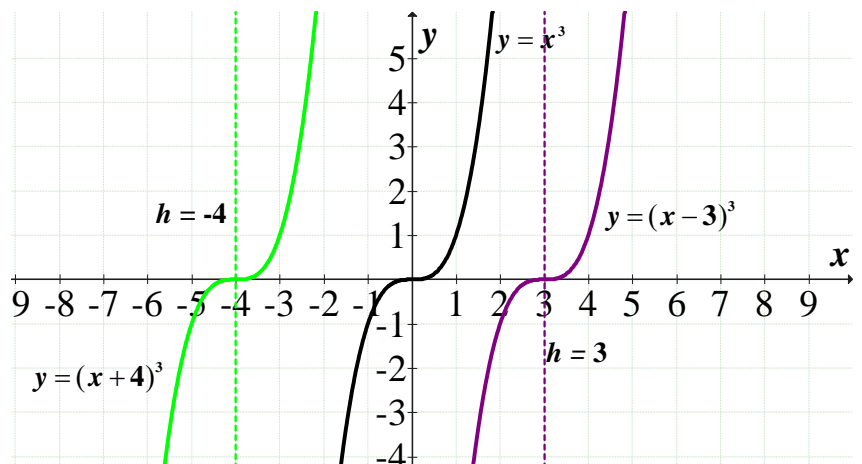
Desplazamiento horizontal  $y = f(x - h)$

$$y = (x + 4)^3$$

Al **sumar** 4 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **izquierda**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $\mathbb{R}$



$$y = (x - 3)^3$$

Al **restar** 3 unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $\mathbb{R}$

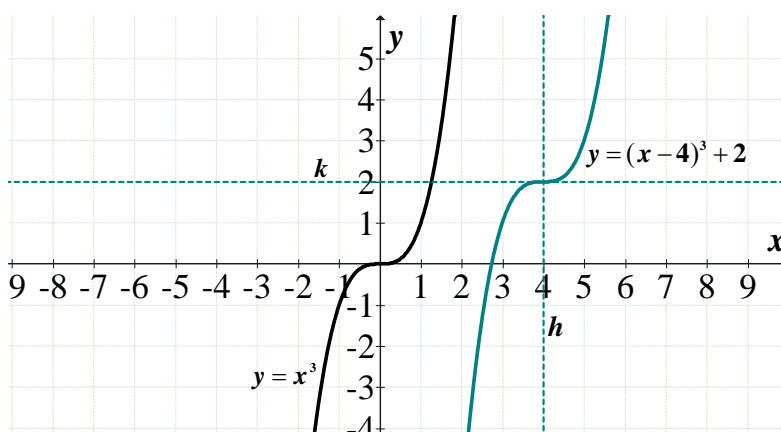
## Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = (x - 4)^3 + 2$$

Al **restar** 4 unidades y **sumar** 2 unidades, la gráfica se desplaza 4 unidades a la **derecha** y 2 unidades hacia **arriba**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $\mathbb{R}$



## ACTIVIDADES

6) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:

a)  $y = (x - 2)^3 - 3$

b)  $y = -x^3$

c)  $y = -(x - 1)^3$

d)  $y = (x + 2)^3$

e)  $y = -(x + 3)^3 - 2$

Links de videos sugeridos para ver:

<https://www.youtube.com/watch?v=QoG2Vs7LY9c>

## **Función Valor Absoluto**

**Recordemos** que el **valor absoluto** de un número real cualquiera  $x$ , que simbolizamos  $|x|$ , es la

**distancia entre  $x$  y cero.**  $|x| = f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

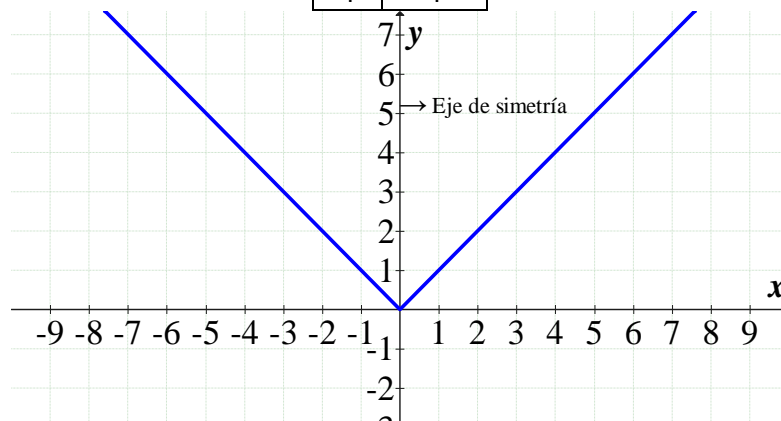
**Ejemplo:**

$$|69| = 69; \quad |-69| = -(-69) = 69$$

$$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}; \quad \left|-\frac{7}{3}\right| = -\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{7}{3}$$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

$x$	$y =  x $
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



Está definida para todo  $x$ , o sea, en el intervalo  $(-\infty ; +\infty)$ .

Es decir, que el **dominio** es el conjunto de los números reales y la **imagen** es  $(0 , +\infty)$ .

Tiene un eje de simetría vertical.

La gráfica es:

- ✓ creciente en:  $(0 , +\infty)$
- ✓ decreciente en:  $(-\infty , 0)$

### Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$$y = |x| - 3$$

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[-3 , +\infty)$

Crec:  $(0 , +\infty)$

Decrec:  $(-\infty , 0)$

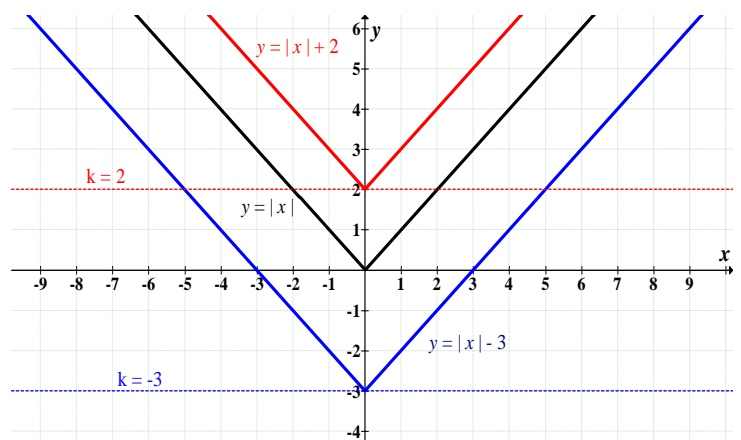
$$y = |x| + 2$$

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[2 , +\infty)$

Crec:  $(0 , +\infty)$

Decrec:  $(-\infty , 0)$



### Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

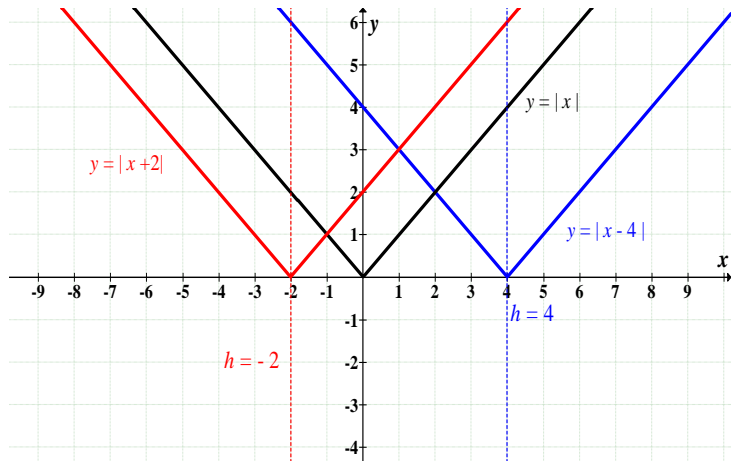
$$y = |x + 2|$$

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[0, +\infty)$

Crec:  $(-2, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, -2)$



$$y = |x - 4|$$

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[0, +\infty)$

Crec:  $(4, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, 4)$

### Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = |x - 3| + 1$$

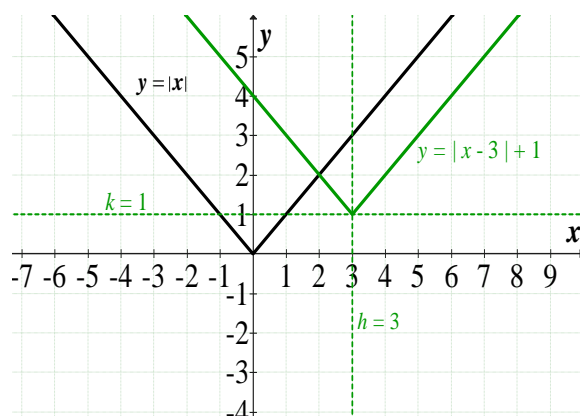
Al **restar 3** unidades y **sumar 1** unidades, la gráfica se desplaza 3 unidades a la **derecha** y 1 unidades hacia **arriba**.

Dom:  $\mathbb{R}$

Im:  $[1; +\infty)$

Crec:  $(3, +\infty)$

Decrec:  $(-\infty, 3)$



## ACTIVIDADES

7) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una:

- $y = |x - 5|$
- $y = -|x|$
- $y = |x| + 5$
- $y = |x + 4|$
- $y = -|x + 1| - 3$

- f)  $y = |x - 2| + 4$
- g)  $y = |x - 4| - 2$
- h)  $y = -|x - 4|$
- i)  $y = -|x| + 1$
- j)  $y = -|x - 1| + 2$

## **Funciones racionales**

Llamamos funciones racionales a las funciones de la forma:

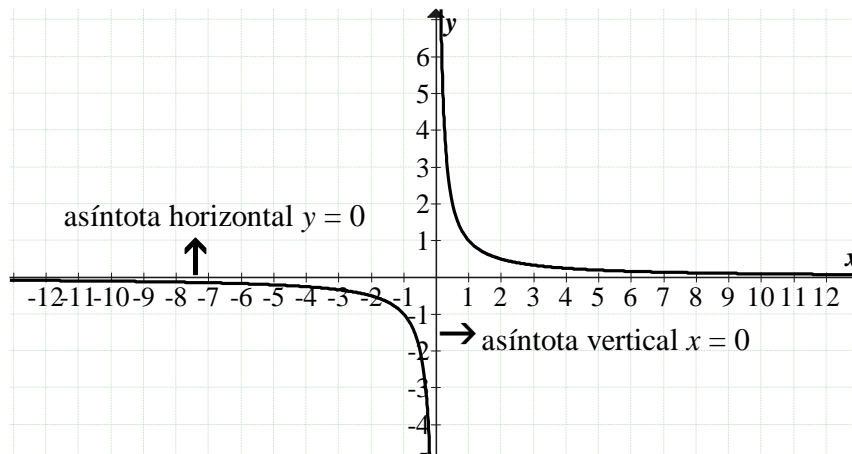
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } P(x), Q(x) \text{ polinomios de una sola indeterminada } x, \text{ siendo } Q(x) \text{ no nulo.}$$

Estudiaremos dos tipos de funciones racionales:

1)  $y = \frac{1}{x}$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

$x$	$f(x)$
-8	-0,125
-4	-0,25
-2	-0,5
-1	-1
-0,50	-2
-0,25	-4
0	No se puede dividir por cero
0,25	4
0,50	2
1	1
2	0,5
4	0,25
8	0,125



Como el denominador tiene que ser distinto de cero,

el **dominio** es:  $\mathbb{R} - \{0\}$ , o  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

La **imagen** es:  $\mathbb{R} - \{0\}$ , o  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Tiene una **asíntota vertical**  $x = 0$ .

**Asíntota horizontal**  $y = 0$ .

$C^+$ :  $(0; +\infty)$ .

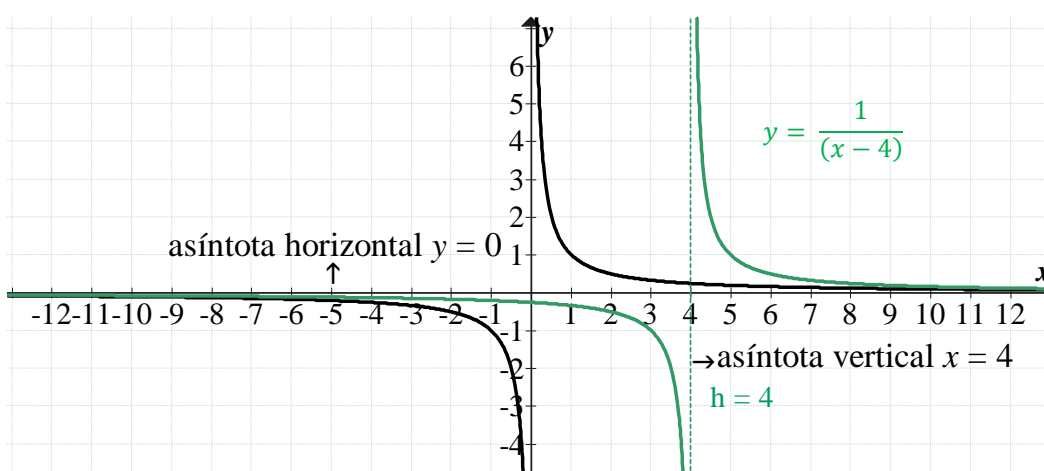
$C^-$ :  $(-\infty; 0)$ .

La función es **decreciente**.

No posee **raíces**, y no tiene **ordenada al origen**.

**Desplazamiento horizontal**  $y = f(x - h)$

$$y = \frac{1}{(x - 4)} \quad h = 4$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{4\}$

Im:  $\mathbb{R} - \{0\}$

A v:  $x = 4$

A h:  $y = 0$

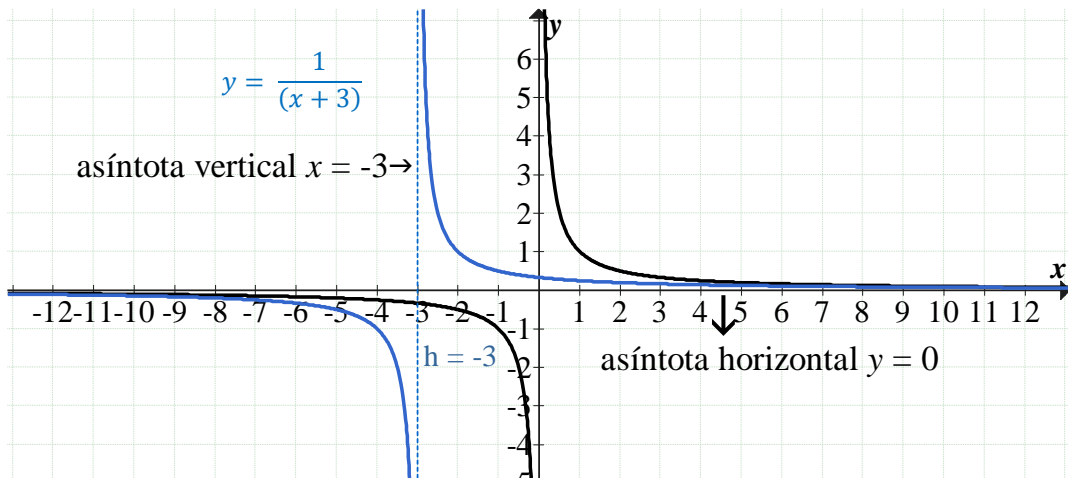
$C^+$ :  $(4; +\infty)$ .

$C^-$ :  $(-\infty; 4)$ .

Raíces: no posee

Ordenada al origen:  $y = -0,25$

$$y = \frac{1}{(x+3)} \quad h = -3$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{-3\}$

Im:  $\mathbb{R} - \{0\}$

A v:  $x = -3$

A h:  $y = 0$

$C^+$ :  $(-3 ; +\infty)$ .

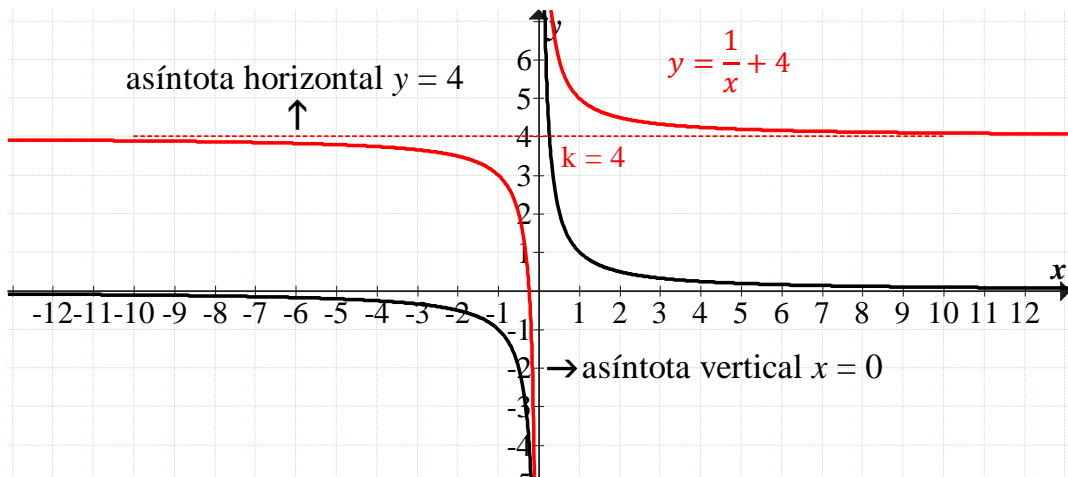
$C^-$ :  $(-\infty ; -3)$ .

Raíces: no posee

Ordenada al origen:  $y = 0,33\dots$

Desplazamiento vertical  $y = f(x) + k$

$$y = \frac{1}{x} + 4 \quad k = 4$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{0\}$

Im:  $\mathbb{R} - \{4\}$

A v:  $x = 0$

A h:  $y = 4$

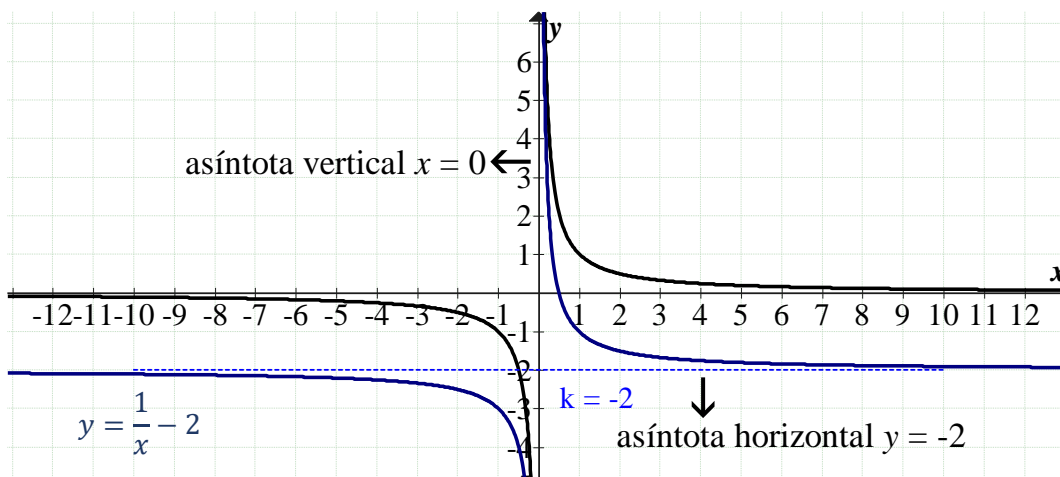
$C^+$ :  $(-\infty ; -0,25) \cup (0 ; +\infty)$ .

$C^-$ :  $(-0,25 ; 0)$

Raíces:  $x = -0,25$

Ordenada al origen: no posee

$$y = \frac{1}{x} - 2 \quad k = -2$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{0\}$

$C^+$ :  $(0; 0,50)$ .

Im:  $\mathbb{R} - \{-2\}$

$C^-$ :  $(-\infty, 0) \cup (0,50; +\infty)$

A v:  $x = 0$

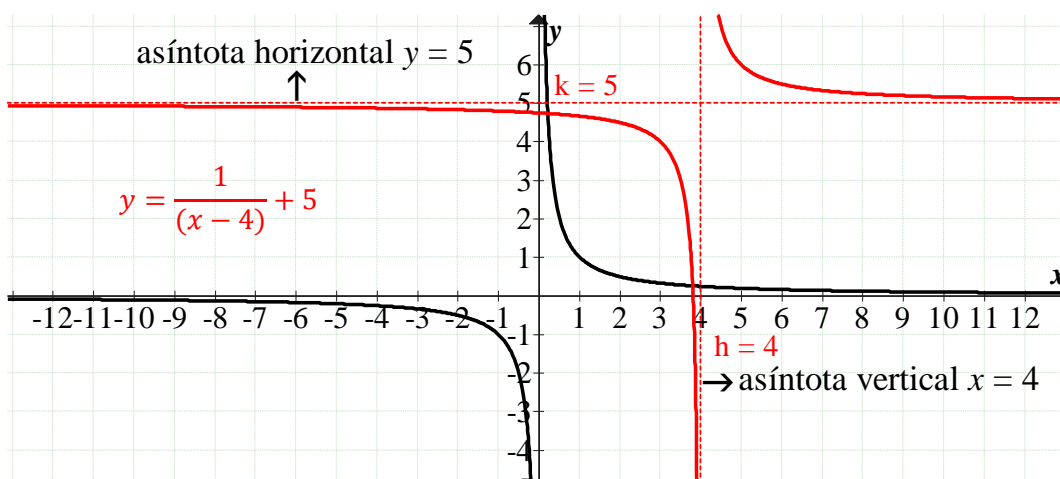
Raíces:  $x = 0,50$

A h:  $y = -2$

Ordenada al origen: no posee.

**Desplazamiento horizontal y vertical**  $y = f(x - h) + k$

$$y = \frac{1}{(x - 4)} + 5 \quad h = 4 \quad k = 5$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{4\}$

$C^+$ :  $(-\infty; 3,80) \cup (4; +\infty)$ .

Im:  $\mathbb{R} - \{5\}$

$C^-$ :  $(3,80; 0)$ .

A v:  $x = 4$

Raíces:  $x = 3,80$

A h:  $y = 5$

Ordenada al origen:  $y = 4,75$

# ACTIVIDADES

8) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento; asíntotas vertical y horizontal, intervalos de positividad y de negatividad; raíces y ordenada al origen de cada una:

a)  $y = \frac{1}{(x-2)} - 1$

e)  $y = -\frac{1}{(x-4)}$

b)  $y = \frac{1}{(x+3)} + 2$

f)  $y = \frac{1}{(x+2)}$

c)  $y = -\frac{1}{x}$

g)  $y = -\frac{1}{x} + 1$

d)  $y = -\frac{1}{(x+2)} + 1$

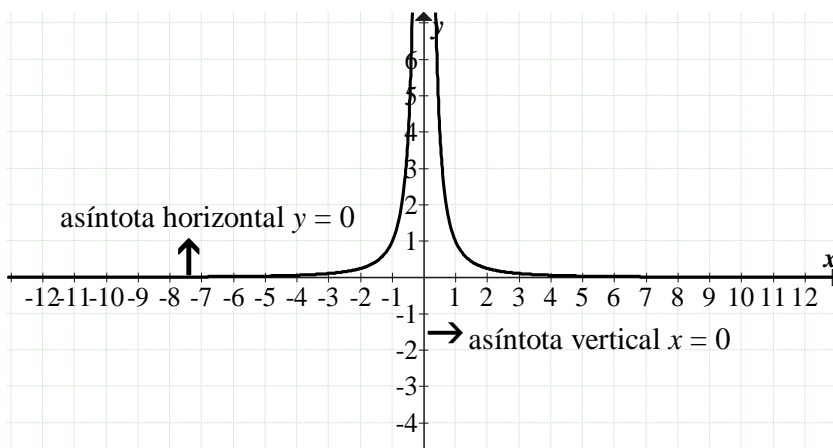
h)  $y = \frac{1}{x} + 3$

## Veremos ahora la función racional

2)  $y = \frac{1}{x^2}$

Para construir la gráfica hacemos la siguiente tabla:

x	f(x)
-4	$\frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$
-2	0,25
-1	1
-0,50	4
-0,25	16
0	No se puede dividir por cero
0,25	16
0,50	4
1	1
2	0,25
4	0,0625



Como el denominador tiene que ser distinto de cero,

el **dominio** es:  $\mathbb{R} - \{0\}$ , o  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

La **imagen** es:  $(0; +\infty)$ .

Tiene una **asíntota vertical**  $x = 0$ .

**Asíntota horizontal**  $y = 0$ .

$C^+$ :  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

$C^-$ : no posee.

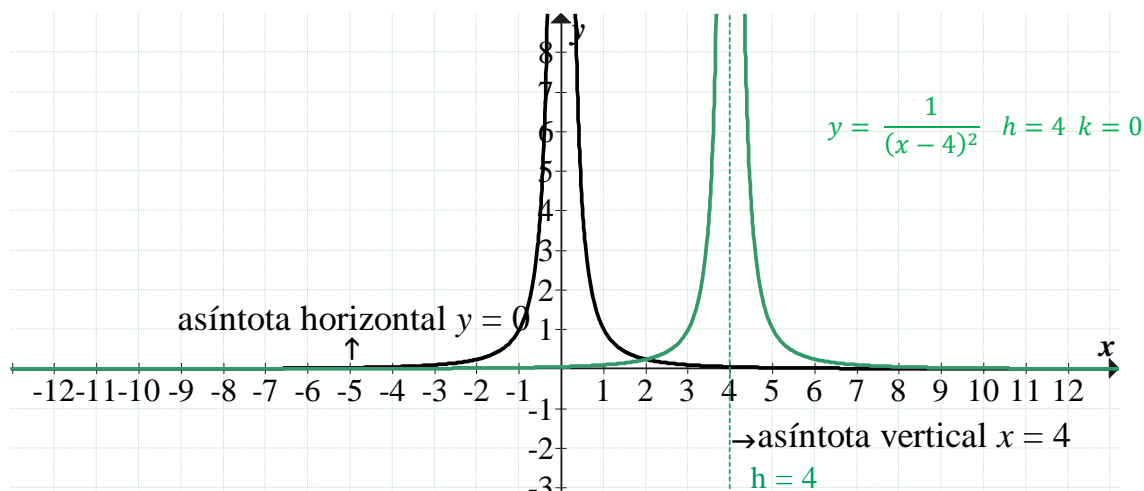
**Creciente**:  $(-\infty; 0)$ .

**Decreciente**:  $(0; +\infty)$ .

No posee **raíces**, y no tiene **ordenada al origen**.

Desplazamiento horizontal  $y = f(x - h)$

$$y = \frac{1}{(x - 4)^2} \quad h = 4$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{4\}$

Im:  $(0; +\infty)$

A v:  $x = 4$

A h:  $y = 0$

Crec:  $(-\infty; 4)$

Decrec:  $(4; +\infty)$

$C^+$ :  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .

$C^-$ : no posee

Raíces: no posee

Ordenada al origen:  $y = 0,0625$

y cuando  $x = 0$

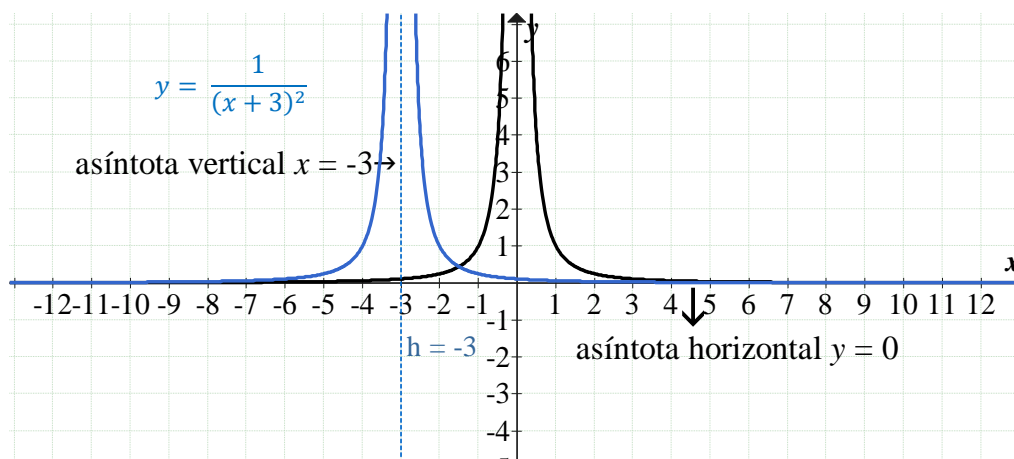
$$y = \frac{1}{(x - 4)^2}$$

$$y = \frac{1}{(0 - 4)^2}$$

$$y = \frac{1}{(-4)^2}$$

$$y = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$y = \frac{1}{(x+3)^2} \quad h = -3 \quad k = 0$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{-3\}$

Im:  $(0; +\infty)$

A v:  $x = -3$

A h:  $y = 0$

Crec:  $(-\infty; -3)$

Decrec:  $(-3; +\infty)$

$C^+$ :  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ .

$C^-$ : no posee

Raíz: no posee

Ordenada al origen:  $y = 0,11\dots$

y cuando  $x = 0$

$$y = \frac{1}{(x+3)^2}$$

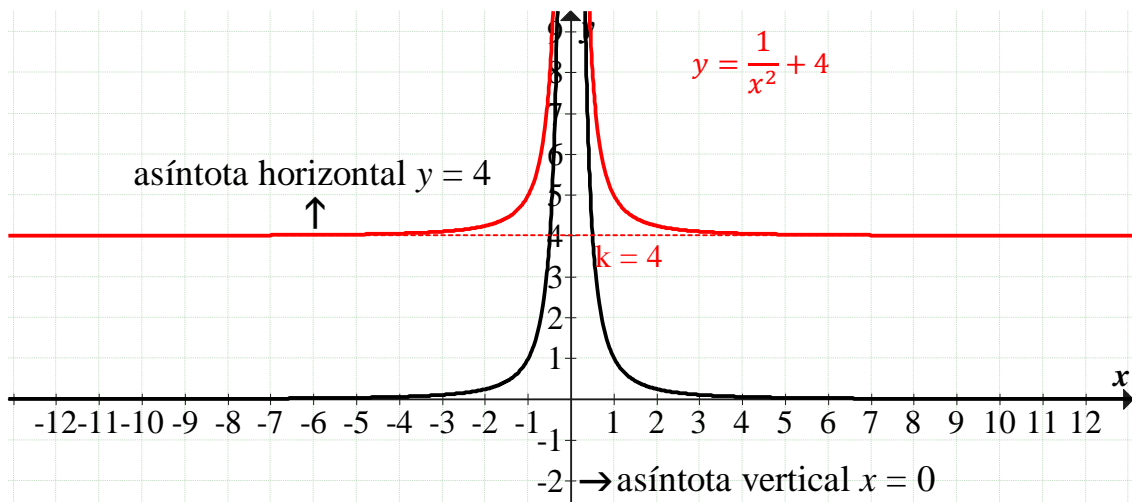
$$y = \frac{1}{(0+3)^2}$$

$$y = \frac{1}{(3)^2}$$

$$y = \frac{1}{9} = 0,11111111$$

**Desplazamiento vertical**  $y = f(x) + k$

$$y = \frac{1}{x^2} + 4 \quad k = 4$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{0\}$

Im:  $(4; +\infty)$

A v:  $x = 0$

A h:  $y = 4$

Crec:  $(-\infty; 0)$

Decrec:  $(0; +\infty)$

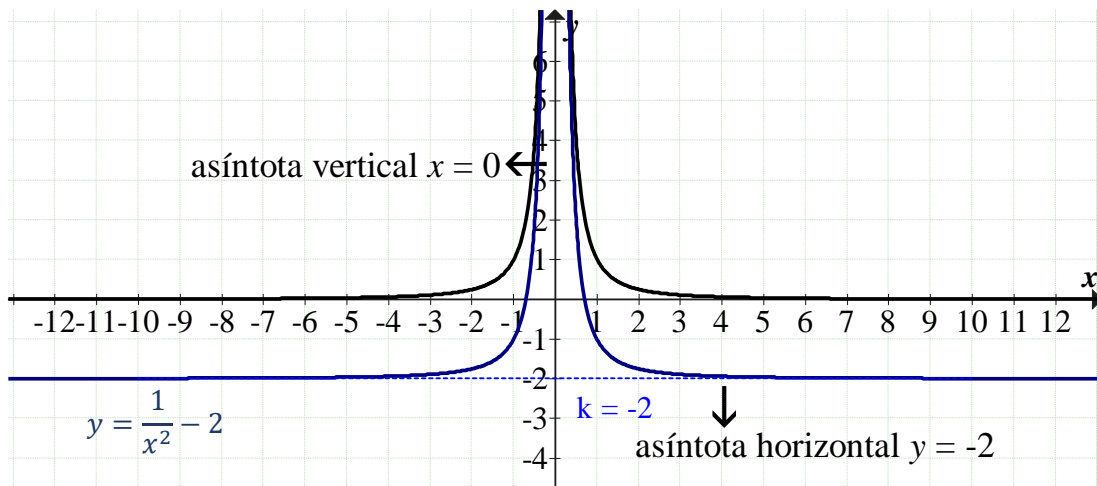
$C^+$ :  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

$C^-$ : no posee

Raíces:  $x =$  no posee

Ordenada al origen: no posee

$$y = \frac{1}{x^2} - 2 \quad k = -2$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{0\}$

Im:  $(-2; +\infty)$

A v:  $x = 0$

A h:  $y = -2$

Crec:  $(-\infty; 0)$

Decrec:  $(0; +\infty)$

$C^+$ :  $(-0,71; 0,71)$ .

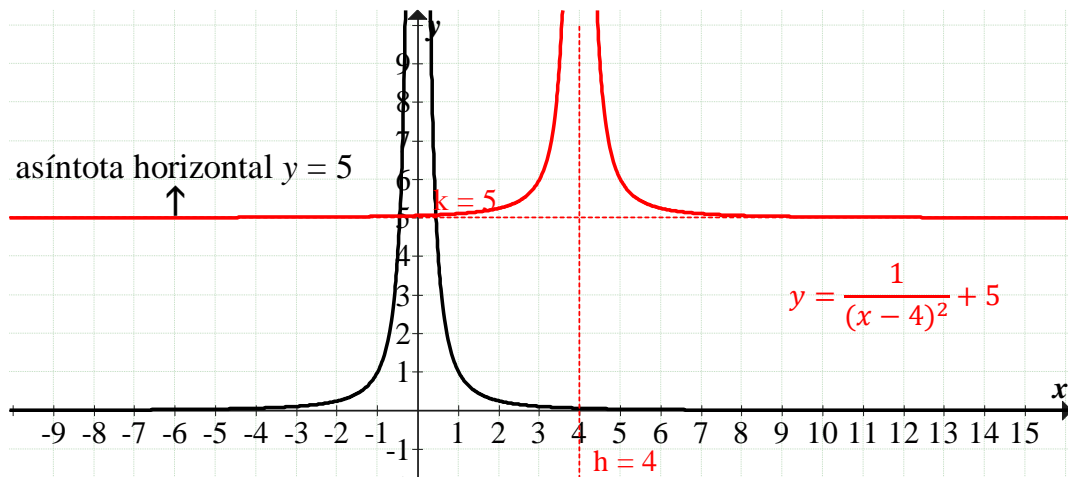
$C^-$ :  $(-\infty, -0,71) \cup (0,71; +\infty)$

Raíces:  $x_1 = -0,71$  y  $x_2 = 0,71$

Ordenada al origen: no posee.

**Desplazamiento horizontal y vertical**  $y = f(x - h) + k$

$$y = \frac{1}{(x - 4)^2} + 5 \quad h = 4 \quad k = 5$$



Dom:  $\mathbb{R} - \{4\}$

Decrec:  $(4; +\infty)$

Im:  $(5; +\infty)$

$C^+$ :  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .

A v:  $x = 4$

$C^-$ : no posee

A h:  $y = 5$

Raíces: no posee

Crec:  $(-\infty; 4)$

Ordenada al origen:  $y = 5,06$

## ACTIVIDADES

9) Realizar las gráficas, con distinto color, de las siguientes funciones indicando dominio; imagen e intervalos de crecimiento y decrecimiento; asíntotas vertical y horizontal, intervalos de positividad y de negatividad; raíces y ordenada al origen de cada una:

a)  $y = \frac{1}{(x+2)^2} - 1$

b)  $y = -\frac{1}{x^2}$

c)  $y = -\frac{1}{x^2} - 3$

d)  $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

e)  $y = -\frac{1}{x^2} - 1$

f)  $y = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$

g)  $y = \frac{1}{x^2} - 2$

h)  $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 2$