



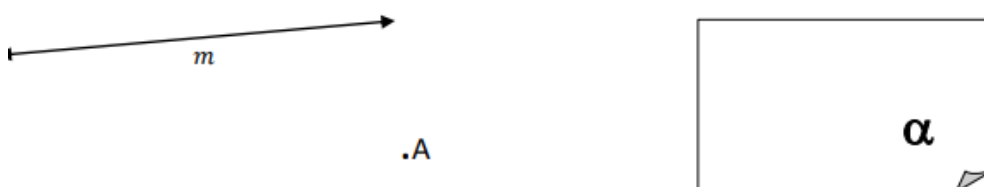
Unidad N°2: Geometría. Figuras Planas

El punto, la recta y el plano son entes fundamentales de la geometría. Existen en nuestro alrededor, pero no se pueden definir.

Los puntos se designan con letras mayúsculas imprenta: A; B, C, D, E, F...

Las rectas con letras minúsculas: a, b, c, d, m, r, s, t...

Y los planos con letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \pi$...



Aunque estos entes fundamentales no tienen existencia física. Nos da idea de punto la marca del lápiz sobre la hoja o un grano de arena; imaginamos una recta en el doblar de un papel o el borde de una mesa; relacionamos la idea de plano con la pared de una habitación o la página de un libro

RECTAS, SEMIRRECTA Y SEGMENTO

- Una **recta** no tiene principio ni fin.



- Un punto divide a una recta en dos **semirrectas**.



- La parte de la recta que hay entre dos puntos, es un **segmento**.

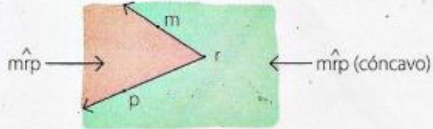




Ángulos. Clasificación

Teoría

Un **ángulo** es la región del plano delimitada por dos semirrectas de origen en común.



El plano queda dividido en dos ángulos: uno cóncavo y el otro convexo.

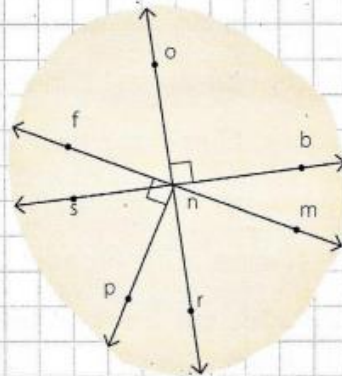
Un ángulo es **cóncavo** cuando su amplitud es mayor que 180° y menor que 360° ; si no, es **convexo**.

Los ángulos convexos también se clasifican según su amplitud.

Amplitud	Clasificación
$\hat{\alpha} = 0^\circ$	Nulo
$0^\circ < \hat{\alpha} < 90^\circ$	Agudo
$\hat{\alpha} = 90^\circ$	Recto
$90^\circ < \hat{\alpha} < 180^\circ$	Obtuso
$\hat{\alpha} = 180^\circ$	Llano
$\hat{\alpha} = 360^\circ$	Un giro

2 Escribir la clasificación de los siguientes ángulos.

- a) $\hat{fno} \rightarrow$
- b) $\hat{bnr} \rightarrow$
- c) $\hat{snm} \rightarrow$
- d) $\hat{mr} \rightarrow$
- e) $\hat{fnm} \rightarrow$
- f) $\hat{mnp} \rightarrow$





Ángulos complementarios y suplementarios

Teoría

Dos ángulos son **complementarios** cuando la suma de sus amplitudes es igual a 90° .

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \rightarrow \hat{\alpha} \text{ y } \hat{\beta} \text{ son complementarios}$$

$\hat{\alpha}$ es el complemento de $\hat{\beta}$
 $\hat{\beta}$ es el complemento de $\hat{\alpha}$

Dos ángulos son **suplementarios** cuando la suma de sus amplitudes es igual a 180° .

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ \rightarrow \hat{\alpha} \text{ y } \hat{\beta} \text{ son suplementarios}$$

$\hat{\alpha}$ es el suplemento de $\hat{\beta}$
 $\hat{\beta}$ es el suplemento de $\hat{\alpha}$

5 Unir cada par de ángulos con la propiedad correspondiente.

a) $\hat{\alpha} = 30^\circ \text{ y } \hat{\beta} = 2 \cdot \hat{\alpha}$

d) $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 45^\circ$

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios

b) $\hat{\alpha} = 120^\circ \text{ y } \hat{\beta} = \hat{\alpha} : 2$

e) $\hat{\alpha} = 90^\circ \text{ y } \hat{\beta} = 0^\circ$

c) $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 90^\circ$

f) $\hat{\alpha} = 75^\circ \text{ y } \hat{\beta} = \hat{\alpha} : 5$

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios

6 Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.

- a) El complemento de un ángulo nulo es un ángulo recto.
- b) No existe el complemento de un ángulo obtuso.
- c) Dos ángulos iguales son siempre complementarios.
- d) Dos ángulos suplementarios pueden ser iguales.
- e) El complemento de un ángulo agudo es agudo.
- f) El suplemento de un ángulo recto también es recto.
- g) No existe el suplemento de un ángulo llano.

7 Calcular el ángulo pedido en cada caso.

- a) El complemento de un ángulo de $32^\circ 28' 46''$.
- b) El suplemento de un ángulo de $119^\circ 42' 13''$.
- c) El complemento del doble de un ángulo de 28° .
- d) El suplemento de la tercera parte de un ángulo de 312° .



Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice

Teoría

Dos ángulos son **adyacentes** cuando tienen un lado en común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.



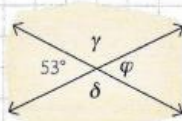
Los ángulos adyacentes son **suplementarios**.

Dos ángulos son **opuestos por el vértice** cuando sus lados son semirrectas opuestas.



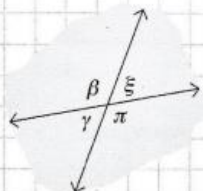
Los ángulos opuestos por el vértice son **iguales**.

8 Hallar la amplitud de $\hat{\gamma}$, $\hat{\varphi}$ y $\hat{\delta}$, justificando la respuesta.

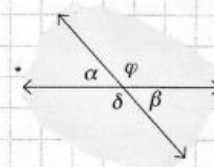


9 Plantear la ecuación y hallar la amplitud de los cuatro ángulos de las siguientes figuras.

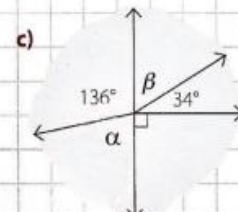
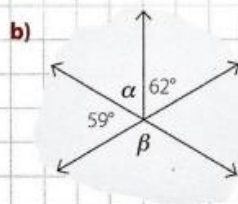
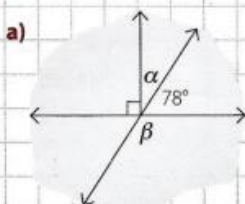
a)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 5x \\ \hat{\beta} = 10x \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 6x - 28^\circ \\ \hat{\beta} = 2x + 4^\circ \end{cases}$$



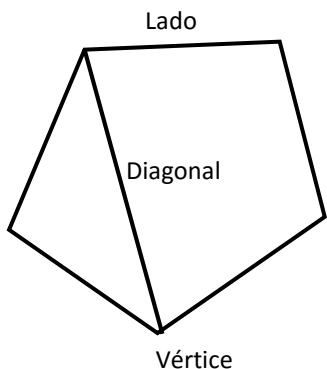
13 Hallar el valor de los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ en cada una de las siguientes figuras.





Polígonos

Un Polígono es la región del plano limitada por tres o más rectas que se intersecan de a dos.



- Los segmentos que unen vértices consecutivos son los
- La suma de las longitudes de los lados se denomina
- La unidad de medida de longitud es el metro (*m*).
- Dos lados consecutivos del polígono se unen en un punto llamado
- Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono se llaman

Triángulos

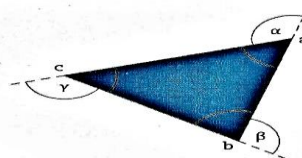
Elementos de un triángulo. Propiedad triangular

Teoría

Un **triángulo** es un polígono de tres lados.

- Vértices: *a*, *b* y *c*
- Lados: \overline{ab} , \overline{bc} y \overline{ac}
- Ángulos interiores: \hat{a} , \hat{b} y \hat{c}
- Ángulos exteriores: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$

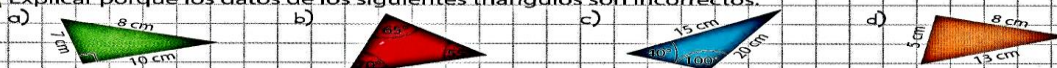
$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$



Propiedad triangular

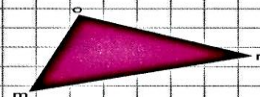
- La longitud de cada lado es **menor que la suma** de las longitudes de los otros dos y **mayor que su diferencia** (positiva).
- Al lado de **mayor longitud**, se opone el ángulo de **mayor amplitud**, y viceversa.

1. Explicar porqué los datos de los siguientes triángulos son incorrectos.



2. Completar con los valores que correspondan.

- a) $\overline{om} = 7 \text{ cm} \wedge \overline{mr} = 5 \text{ cm} \Rightarrow$ $< \overline{or} <$
- b) $\overline{or} = 2 \text{ cm} \wedge \overline{om} = 11 \text{ cm} \Rightarrow$ $< \overline{mr} <$
- c) $\overline{om} =$ $\wedge \overline{mr} = 8 \text{ cm} \Rightarrow 5 \text{ cm} < \overline{or} < 21 \text{ cm}$



3. Colocar $>$, $<$ o $=$ según corresponda.

a)	b)	c)	d)
\overline{ab} <input type="text"/> \overline{bc} \overline{bc} <input type="text"/> \overline{ac} \overline{ac} <input type="text"/> \overline{ab}	\overline{mp} <input type="text"/> \overline{op} \overline{om} <input type="text"/> \overline{mp} \overline{op} <input type="text"/> \overline{om}	\hat{s} <input type="text"/> \hat{g} \hat{m} <input type="text"/> \hat{s} \hat{g} <input type="text"/> \hat{m}	\hat{n} <input type="text"/> \hat{v} \hat{v} <input type="text"/> \hat{q} \hat{q} <input type="text"/> \hat{n}



Clasificación de triángulos

Teoría

Los triángulos se clasifican según la longitud de sus lados o la amplitud de sus ángulos.

Según sus lados → **Escaleno**: los tres lados tienen distinta longitud.
 → **Isósceles**: tiene por lo menos dos lados iguales. → **Equilátero**: los tres lados son iguales.

Los triángulos equiláteros son isósceles.

Según sus ángulos → **Rectángulo**: tiene un ángulo recto.
 → **Oblicuángulo**: no tiene ángulos rectos. ↗ **Acutángulo**: los tres ángulos son agudos.
 ↘ **Obtusángulo**: tiene un ángulo obtuso.

4 Colocar **P** (posible) o **I** (imposible) según corresponda.

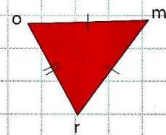
- Un triángulo rectángulo puede ser obtusángulo.
- Un triángulo isósceles puede ser rectángulo.
- Un triángulo equilátero puede tener solo dos ángulos iguales.
- Un triángulo rectángulo puede ser equilátero.
- Un triángulo isósceles puede ser obtusángulo.

5 Calcular y responder.

- El perímetro de un triángulo isósceles es de 46 cm y el lado desigual es 5 cm más corto que cada uno de los iguales. ¿Cuánto mide cada lado?
- En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos difieren en 24° . ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo agudo?
- Los lados de un triángulo escaleno son tres números impares consecutivos. Si el perímetro es de 87 cm, ¿cuánto mide cada lado?
- En un triángulo isósceles oblicuángulo, cada ángulo agudo es la tercera parte del obtuso. ¿Cuál es la amplitud de cada ángulo?

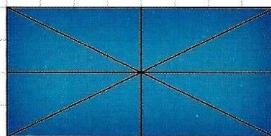
6 Plantear la ecuación y hallar la longitud de cada lado.

$$\begin{cases} \overline{or} = 2x + 5 \text{ cm} \\ \overline{mr} = 3x + 2 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 65 \text{ cm} \end{cases}$$



Desafío

7 Decir cuántos triángulos hay en la siguiente figura.





Propiedades de los ángulos de un triángulo

Teoría

- El ángulo interior y el exterior son suplementarios.

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$$

$$\hat{\delta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$$

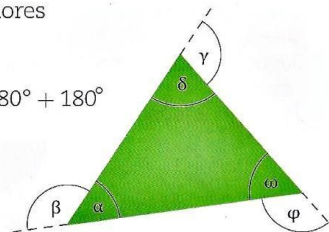
$$\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$$

- La suma de los ángulos exteriores es igual a 360°

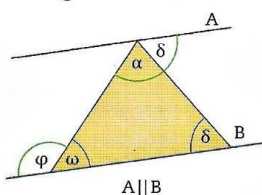
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\delta} + \hat{\gamma} + \hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$\underbrace{\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\omega}}_{180^\circ} + \underbrace{\hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\phi}}_{180^\circ} = 360^\circ$$

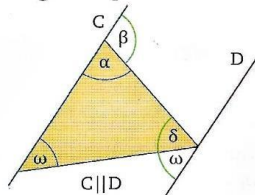
$$\hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\phi} = 360^\circ$$



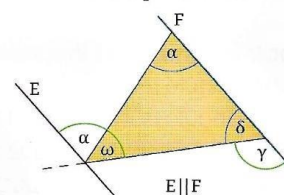
- Cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes con él. Los ángulos verdes de cada figura son iguales por ser alternos internos entre paralelas.



$$\hat{\phi} = \hat{\alpha} + \hat{\delta}$$



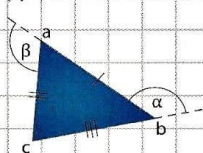
$$\hat{\beta} = \hat{\delta} + \hat{\omega}$$



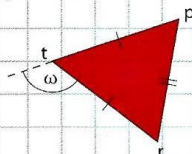
$$\hat{\gamma} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}$$

8 Calcular la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes triángulos.

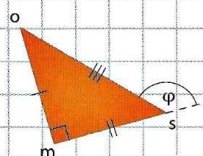
a) $\begin{cases} \hat{\alpha} = 126^\circ 38' 19'' \\ \hat{\beta} = 98^\circ 27' 52'' \end{cases}$



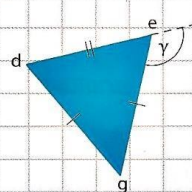
c) $\hat{\omega} = 103^\circ 31' 14''$



b) $\hat{\phi} = 132^\circ 25' 47''$

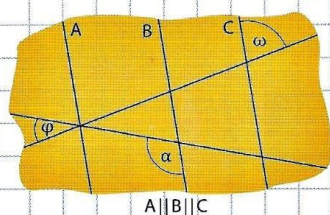


d) $\hat{\gamma} = 117^\circ 53' 21''$



9 Calcular la amplitud de $\hat{\alpha}$.

$$\begin{cases} \hat{\omega} = 84^\circ 28' 42'' \\ \hat{\phi} = 29^\circ 37' 47'' \end{cases}$$

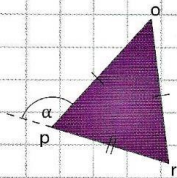


A||B||C

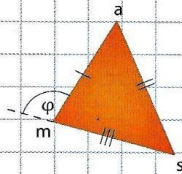


10 Plantear la ecuación y hallar la amplitud de los ángulos interiores de cada triángulo.

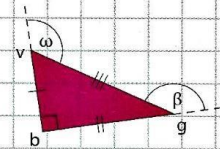
a) $\begin{cases} \hat{p} = 5x \\ \hat{\alpha} = 6x + 4^\circ \end{cases}$



b) $\begin{cases} \hat{a} = 4x + 3^\circ \\ \hat{\phi} = 97^\circ \\ \hat{s} = 5x + 22^\circ \end{cases}$



c) $\begin{cases} \hat{\beta} = 7x - 34^\circ \\ \hat{\omega} = 5x + 4^\circ \end{cases}$



11 Colocar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda.

a) Todos los ángulos exteriores de un triángulo equilátero son iguales.

b) El ángulo exterior de un triángulo puede ser cóncavo.

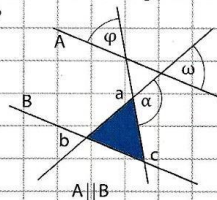
c) Los tres ángulos exteriores de un triángulo pueden ser agudos.

d) El ángulo interior de un triángulo puede ser mayor que el exterior.

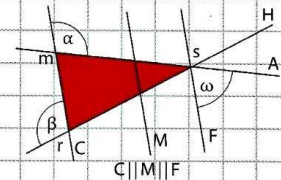
e) El ángulo exterior de un triángulo puede ser igual al interior.

12 Calcular la amplitud de los ángulos interiores del triángulo pintado.

a) $\begin{cases} \hat{\omega} = 5x + 23^\circ \\ \hat{\alpha} = 11x - 5^\circ \\ \hat{\phi} = 3x + 8^\circ \end{cases}$



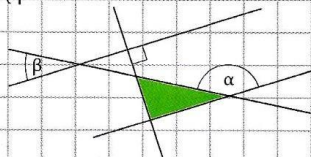
b) $\begin{cases} \hat{\beta} = 4x - 12^\circ \\ \hat{\alpha} = 3x + 7^\circ \\ \hat{\omega} = 2x - 2^\circ \end{cases}$



Desafío

13 Decidir si el triángulo verde es o no rectángulo.

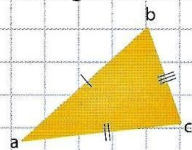
$\begin{cases} \hat{\alpha} = 148^\circ \\ \hat{\beta} = 52^\circ \end{cases}$



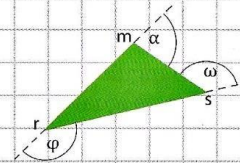


18 Hallar la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes triángulos.

a)
$$\begin{cases} \hat{a} = 4x + 5^\circ \\ \hat{b} = 8x - 3^\circ \\ \hat{c} = 10x + 2^\circ \end{cases}$$

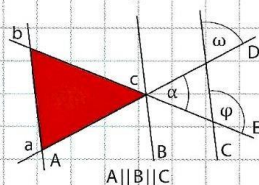


b)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 3x + 7^\circ \\ \hat{\phi} = 6x - 5^\circ \\ \hat{\omega} = 5x + 8^\circ \end{cases}$$



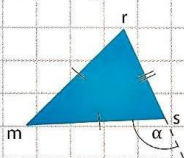
19 Hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo rojo.

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 2x + 9^\circ \\ \hat{\phi} = 126^\circ \\ \hat{\omega} = 5x + 12^\circ \end{cases}$$

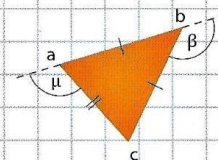


20 Calcular la amplitud los ángulos interiores de los siguientes triángulos.

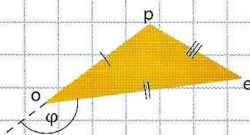
a)
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 4x + 22^\circ \\ \hat{r} = 4x - 2^\circ \end{cases}$$



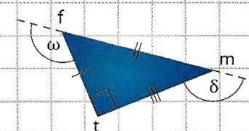
c)
$$\begin{cases} \hat{\beta} = 5x - 4^\circ \\ \hat{\mu} = 4x - 13^\circ \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} \hat{p} = 3x + 24^\circ \\ \hat{\phi} = 8x - 53^\circ \\ \hat{e} = x + 15^\circ \end{cases}$$



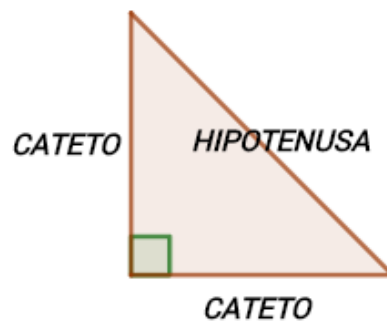
d)
$$\begin{cases} \hat{\omega} = 7x + 12^\circ \\ \hat{\delta} = 5x + 42^\circ \end{cases}$$





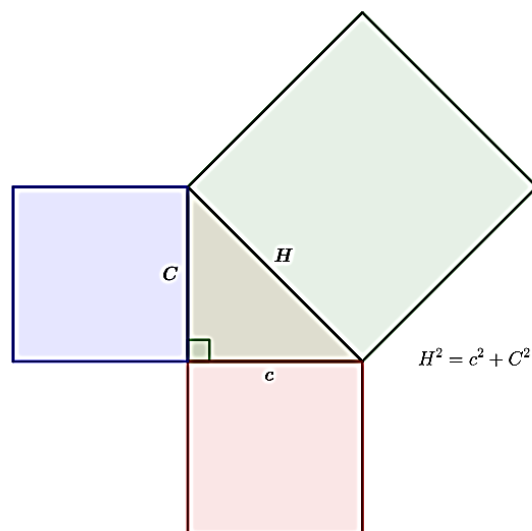
TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo, los lados que determinan el ángulo recto se llaman **Catetos**. El lado opuesto al ángulo de 90° se llama **Hipotenusa**.



En el siglo IV a. C. un matemático griego llamado Pitágoras demostró:

En cualquier triángulo rectángulo se verifica que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



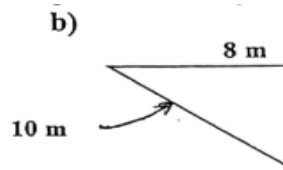
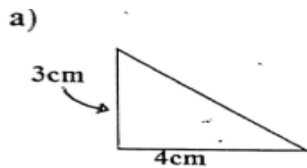
Habitualmente el teorema se enuncia así:

Es decir: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$



Ejercicio N°1: Calcular el lado que falta en los siguientes triángulos:

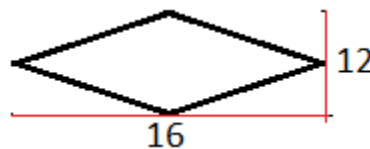


Ejercicio N°2: Leer atentamente y resolver.

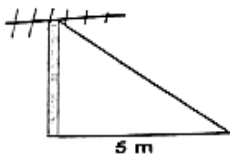
- a) Calcule la longitud de la hipotenusa de un triángulo que tiene catetos de 6 cm y 8 cm.
- b) Calcule la longitud de uno de los catetos del triángulo rectángulo sabiendo que el otro cateto mide 12 cm y su hipotenusa mide 15 cm.
- c) Calcule la medida de la diagonal de un rectángulo cuya base mide 35 cm y altura 12 cm.

Ejercicio N°3: Resolver los siguientes problemas:

- a) Calcular el perímetro del siguiente rombo si sabemos que sus diagonales (alto y ancho) miden 16 y 12.



- b) La antena proyecta una sombra en el suelo de 5 m y el alambre que une su extremo superior con el suelo es de 13 m. ¿Qué altura tiene la antena?



- c) En un triángulo isósceles, uno de sus lados iguales mide 20 cm y la base 24 cm. ¿Cuál es la medida de la altura del triángulo?
- d) Una cometa está atada al suelo con un cordel de 200 metros de longitud. Cuando la cuerda está totalmente tensa, la vertical de la cometa al suelo está a 160 metros del punto donde se ató la cometa. ¿A qué altura está volando la cometa?

