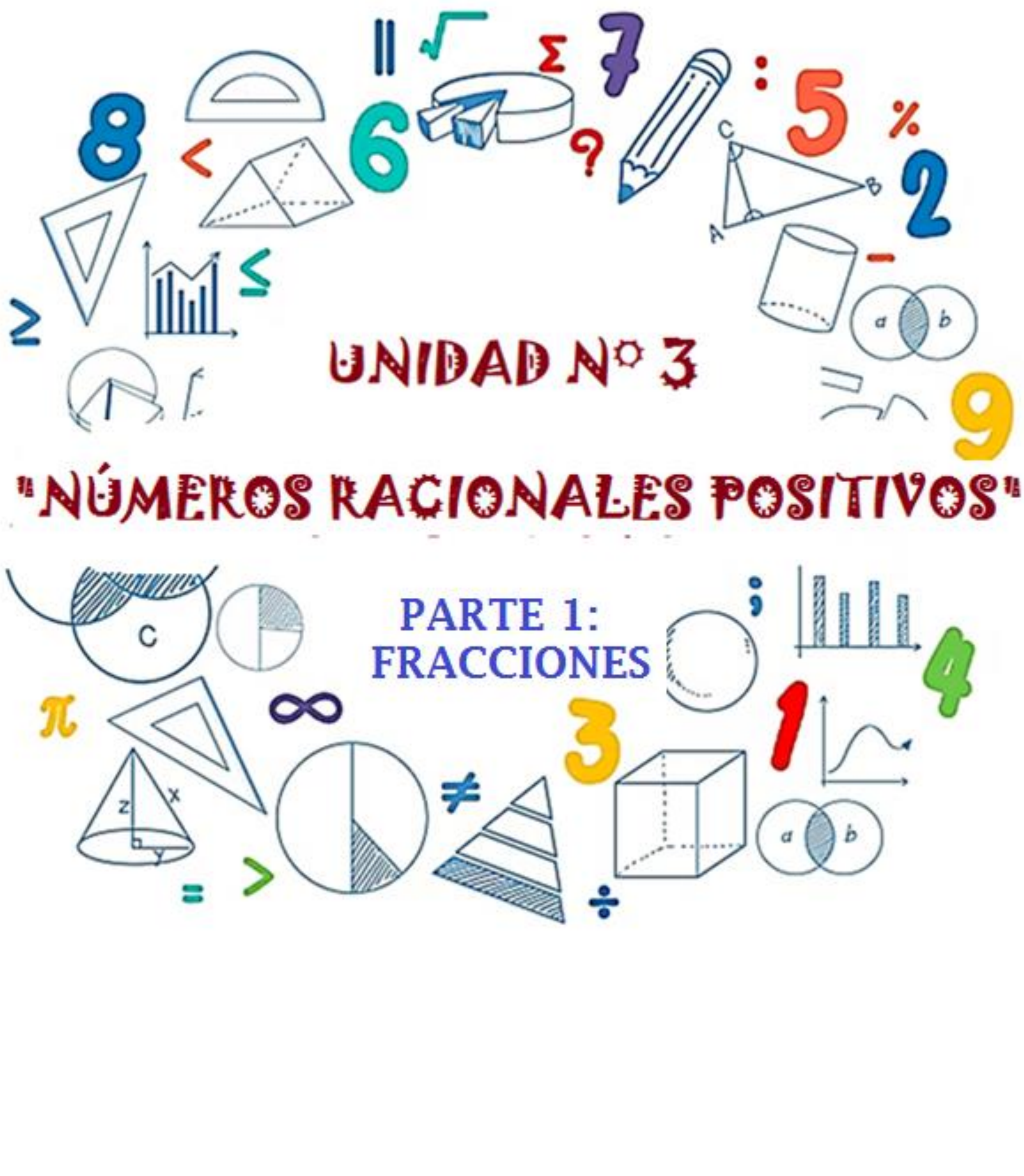

UNIDAD Nº 3
"NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS"
PARTE 1:
FRACCIONES

NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS:
ALGO DE HISTORIA…

En algunas situaciones, cuando el hombre necesitó medir, descubrió que las medidas no se ajustaban a cantidades exactas de las unidades que utilizaba, comenzó a dividir o fraccionar las unidades en partes iguales. Así empezó hacer uso de números que permiten expresar partes o trozos de la unidad: "los **Números Racionales**".

¿CÓMO SURGIERON LOS NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS?

Los números racionales, surgen al observar que la división, no es siempre posible. Por ejemplo,

$$4 : 5$$

Carece de sentido en los números naturales, ya que su resultado no es un número natural.

Los números **racionales positivos** son aquellos que pueden escribirse como el cociente (división) entre dos números naturales a y b.

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{Numerador} \\ \longrightarrow \text{Denominador} \end{array}$$

Es decir que, todo número racional pueden escribirse mediante una **fracción**.

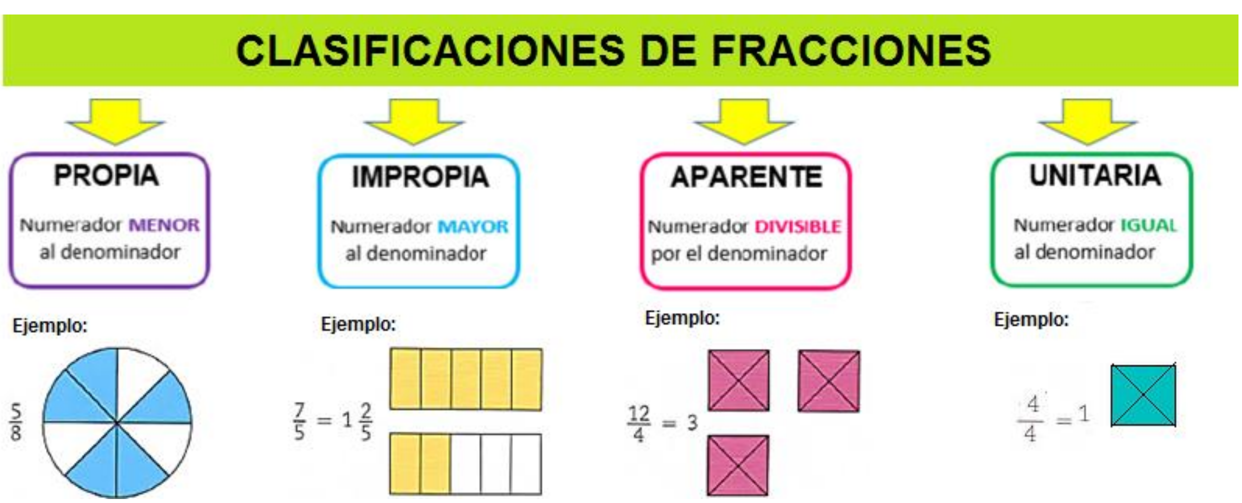
Nota: existen números racionales negativos, y se definen en los números enteros, los cuales no serán trabajados este año.

FRACCIÓN

- **<u>Fracción:</u>** es una manera de representar un número racional, y representa una parte de un entero.

Numerador $\longleftarrow a \longrightarrow$ Cantidad de partes iguales que se toma de un entero
Denominador $\longleftarrow b \longrightarrow$ Cantidad de partes iguales en que se divide el entero

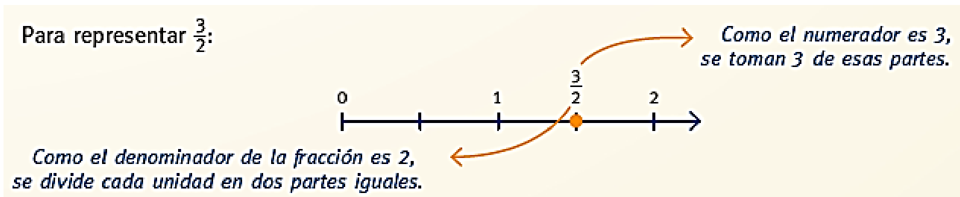
Según el numerador y el denominador las fracciones se clasifican en:



REPRESENTACIÓN DE FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA.

Para **representar una fracción en la recta numérica**, primero dividimos la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador, luego nos desplazamos a partir del cero a la derecha tantos partes según indique el numerador.

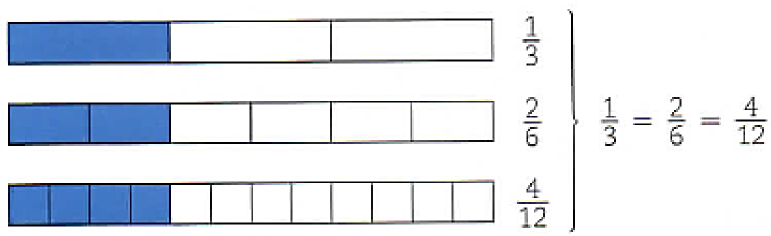
Ejemplo:



FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos o más fracciones son **equivalentes** cuando representan la misma parte de un entero

Ejemplo:



En este ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\ y\ \frac{4}{12}$ son fracciones equivalentes

MÉTODOS PARA OBTENER FRACCIONES EQUIVALENTES.

Para obtener fracciones equivalentes podemos aplicar el método de amplificación o de simplificación.

- **Amplificación:** consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un mismo número natural.

  Ejemplo:

  $$\frac{2}{5} = \frac{2\,.\,3}{5\,.\,3} = \frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

- **Simplificación:** consiste en dividir el numerador y el denominador por un mismo número natural distinto y de uno.

  Ejemplo:

  $$\frac{32}{40} = \frac{32:8}{40:8} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Cuando no existe un número natural distinto de uno, que divida al numerador y denominador de una fracción, se la denomina **fracción irreducible**.

ACTIVIDADES.

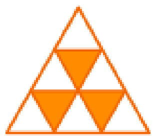
1) Obtén tres fracciones equivalentes a las dadas, utilizando el método de amplificación.

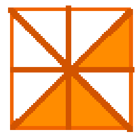
a. $\frac{3}{8} =$ **b.** $\frac{4}{6} =$ **c.** $\frac{7}{4} =$ **d.** $\frac{9}{5} =$

2) Simplifica las siguientes fracciones hasta obtener la fracción irreducible.

a. $\frac{84}{48} =$ **b.** $\frac{72}{96} =$ **c.** $\frac{248}{52} =$ **d.** $\frac{36}{108} =$

3) Escribe la fracción irreducible que corresponde a cada representación gráfica.

a. 

b. 

c. 

4) Representa en una misma recta numérica los siguientes grupos de fracciones. **Ayuda:** puedes utilizar uno de los métodos para obtener fracciones equivalentes.

a) $\frac{3}{2}$ $\frac{15}{8}$ $\frac{11}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{4}$

5) *Desafío:* determina la fracción irreducible que representa cada color de la siguiente figura.

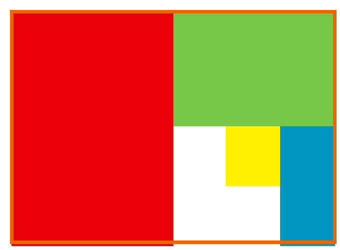
a. Rojo: —

b. Verde: —

c. Azul: —

d. Amarillo: —

e. Blanco: —



ORDEN Y COMPARACIÓN DE FRACCIONES.

Para comparar fracciones se pueden utilizar distintos procedimientos.

- **Si las fracciones a comparar tienen igual denominador**, sólo se deben comparar los numeradores.
  Ejemplo:

$$\frac{23}{12} > \frac{9}{12}, \text{ porque } 23 > 9$$

- **Si las fracciones a comparar tienen distintos denominadores**, se pueden buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y luego comparar los numeradores.
  Ejemplo: compara $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{7}$

$$\frac{3}{5} \text{ y } \frac{5}{7} \begin{array}{l} \nearrow \frac{3}{5} = \frac{21}{35} \\ \searrow \frac{5}{7} = \frac{25}{35} \end{array} \Rightarrow \frac{25}{35} > \frac{21}{35} \Rightarrow \frac{5}{7} > \frac{3}{5}$$

  Nota: puedes determinar el múltiplo común menor entre los denominadores dados.

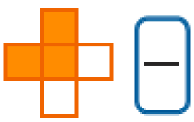
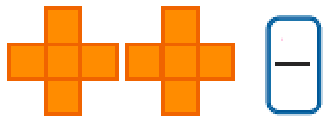
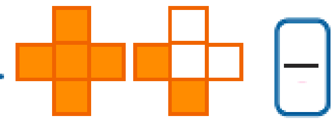
- También se pueden **representar las fracciones en la recta numérica**; la fracción que se encuentra más a la derecha es mayor.

ACTIVIDADES

6) Compara las siguientes fracciones y coloca < o > según corresponda

a) $\frac{5}{9} \square \frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{7} \square \frac{4}{9}$ c) $\frac{3}{5} \square \frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{3} \square \frac{3}{5}$

7) Escribe la fracción que corresponde a cada representación gráfica. Luego ordénalas de mayor a menor y explica porque las ordenaste de esa forma

a.  b.  c. 

8) Compra las siguientes fracciones y ordénalas de menor a mayor.

$$\frac{10}{9} - \frac{5}{6} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{5}{9}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES.

SUMA Y RESTA.

- Si las fracciones tienen **igual denominador**, se suman o restan los numeradores y se mantiene el denominador.

Ejemplos:

a) $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}=\frac{4+9}{7}=\frac{13}{7}$ b) $\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{7-5}{3}=\frac{2}{3}$

- Si las fracciones tienen **distinto denominador** se buscan fracciones equivalentes con un denominador común. Para encontrar un denominador común se determina el múltiplo común menor entre los denominadores.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{2}{12}=$

El mínimo común múltiplo de 4, 3 y 12 es 12. $\longrightarrow$ m.c.m (4, 3 y 12)= 12

Luego las fracciones equivalentes con denominador común son:

$\frac{3^{\times 3}}{4_{\times 3}}=\frac{9}{12}$ $\frac{5^{\times 4}}{3_{\times 4}}=\frac{20}{12}$ $\frac{2^{\times 1}}{12_{\times 1}}=\frac{2}{12}$

Reemplazando las fracciones equivalentes resulta:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{3}+\frac{2}{12}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9+20+2}{12}=\boxed{\frac{31}{12}}$$

Del mismo modo se procede con las resta.

b) $\frac{7}{5}-\frac{2}{3}=$

El mínimo común múltiplo de 5 y 3 es 15. $\longrightarrow$ m.c.m (5 y 3)= 15

$$\frac{7}{5}-\frac{2}{3}=\frac{21}{15}-\frac{10}{15}=\frac{21-10}{15}=\boxed{\frac{11}{15}}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES.

Para **multiplicar** fracciones, se calcula el producto de los numeradores y de los denominadores entre sí.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A\,.\,C}{B\,.\,D}$$

Si es posible, se simplifica el numerador con el denominador.

Ejemplos:

a) $8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{8\,.\,3}{5} = \frac{24}{5}$ b) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7\,.\,3}{5\,.\,4} = \frac{21}{20}$ c) $\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{25}_{5}} = \frac{4\,.\,2}{3\,.\,5} = \frac{8}{15}$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para **dividir** dos fracciones se invierte el divisor y se multiplica.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A\,.\,D}{B\,.\,C}$$

Ejemplos:

a) $\frac{5}{3} : 4 = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5\,.\,1}{3\,.\,4} = \frac{5}{12}$ b) $2 : \frac{7}{9} = 2 \cdot \frac{9}{7} = \frac{2\,.\,9}{7} = \frac{18}{7}$ c) $\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3\,.\,9}{4\,.\,5} = \frac{27}{20}$

Nota: cuando tenemos una cadena de multiplicaciones y divisiones sin paréntesis, se resuelven de izquierda a derecha.

ACTIVIDADES

9) Resuelve mentalmente.

a. $\frac{1}{7} + \frac{8}{7} =$ **b.** $\frac{10}{3} - \frac{4}{3} =$ **c.** $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$ **d.** $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} + \frac{3}{6} =$

10) Resuelve las siguientes sumas y restas de fracciones.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} =$ b) $2 - \frac{7}{5} + \frac{1}{10} =$ c) $\frac{14}{9} - \frac{3}{2} + \frac{5}{6} =$

11) Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones. De ser posible, simplifica antes de resolver.

a) $18 \cdot \frac{5}{24} =$ b) $\frac{15}{8} : 9 =$ c) $\frac{12}{5} \cdot \frac{10}{9} =$ d) $\frac{6}{25} : \frac{12}{5} =$ e) $\frac{10}{21} \cdot \frac{5}{6} \cdot 14 =$ f) $\frac{20}{9} \cdot \frac{12}{25} : \frac{8}{3} =$

POTENCIACIÓN DE UNA FRACCIÓN

La potenciación es la forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. Si aplicamos esta definición a una fracción tenemos:

$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

Podemos ver que para obtener la **potencia de una fracción**, se debe determinar la potencia del numerador y del denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32}$

RADICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Para determinar la **raíz de una fracción** se debe calcular la raíz del numerador y la del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

Recordemos que, la radicación se resuelve como lo muestran los siguientes ejemplos:

$\sqrt{64} = 8$, porque $8^2 = 64$
Se lee "la raíz cuadrada de 64 es 8".

$\sqrt[3]{27} = 3$, porque $3^3 = 27$
Se lee "la raíz cúbica de 27 es 3".

ACTIVIDADES.

12) Resuelve las siguientes potencias y raíces.

a. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$ **b.** $\left(\frac{3}{2}\right)^3 =$ **c.** $\left(\frac{2}{7}\right)^2 =$ **d.** $\sqrt{\frac{16}{121}} =$ **e.** $\sqrt[3]{\frac{125}{64}} =$ **f.** $\sqrt[5]{\frac{3}{24}}$

13) Resuelve las siguientes potencias y raíces**. Sugerencia:** Resuelve las operaciones del interior de los paréntesis y de la raíz hasta obtener un resultado y luego calcula la raíz o la potencia indicada.

a) $\left(\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\right)^2 =$ b) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} =$ c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)^3 =$ d) $\sqrt[4]{\frac{11}{27} - \frac{17}{81}} =$

OPERACIONES COMBINADAS

Para resolver ejercicios donde se encuentran combinadas todas las operaciones vistas, se procede de la siguiente manera.

$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 2 + \frac{7}{5} : \frac{3}{5} =$	**1.** Se separa en términos.
$\frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{7}{5} : \frac{3}{5} =$	**2.** Se resuelven las potencias y raíces.
$\frac{4}{9} + 1 + \frac{7}{3} =$	**3.** Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
$= \frac{34}{9}$	**4.** Se resuelven las sumas y restas.

Si en el ejercicio aparecen paréntesis, los pasos a seguir son:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{121}} \cdot 11 - \frac{5}{6}\right) : \frac{25}{6} =$	**1.** Se separa en términos.
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{13}{6} : \frac{25}{6} =$	**2.** Se resuelven los cálculos que están dentro de los paréntesis.
$\frac{9}{25} + \frac{13}{6} : \frac{25}{6} =$	**3.** Se resuelven las potencias y raíces.
$\frac{9}{25} + \frac{13}{25} =$	**4.** Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
$= \frac{22}{25}$	**5.** Se resuelven las sumas y restas.

Nota: si dentro de los paréntesis tenemos más de una operación se siguen los pasos mencionados anteriormente para resolver.

ACTIVIDADES.

14) Resuelve los siguientes ejercicios combinados.

a. $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{15} =$ **b.** $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{4}\right) =$ **c.** $\frac{5}{2} + \frac{10}{6} : \frac{15}{12} - \frac{1}{3} =$

d. $\sqrt{\frac{25}{121}} \cdot \frac{11}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$ **e.** $\left(\frac{12}{4} \cdot \frac{5}{24}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{27}{64}} =$ **f.** $\frac{5}{9} + \sqrt[4]{\frac{1296}{256}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 =$

Un poquito más difícil:

15) Resuelve.

a) $1 - \sqrt{\frac{1}{3} : \frac{2}{5} - \frac{7}{18}} =$ c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)^2 + \sqrt{1 - \frac{19}{100}} =$ e) $\frac{9}{10} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{3}{8}\right) : \frac{18}{5}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{343}{8}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 =$ d) $\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} - \frac{8}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 =$ f) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right)^3 + \sqrt[3]{\frac{512}{729}} =$