



COLEGIO SANTA ROSA DE LIMA

Trabajo Práctico de Matemática

Año: 2024

Tema: Límites

Curso: 6° B

Profesora: Muñoz, María Lourdes

Alumno:

Las siguientes actividades tienen por objetivo afianzar el cálculo de límites de funciones escalares, y el cálculo de límites con indeterminaciones especiales. La misma debe ser entregada el día **23/10/2024 por nodos**, en formato de **Trabajo práctico**, con la resolución correspondiente. El mismo tiene carácter evaluativo.

Se evaluará:

- Presentación en tiempo y forma.
- Prolijidad.
- Interpretación y cumplimiento de consignas.
- Resolución correcta.

Teoría y ejemplos a tener en cuenta:

Propiedad	Ejemplo
$\lim_{x \rightarrow a} k = k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow 5} 7 = 7$
$\lim_{x \rightarrow a} x = a$	$\lim_{x \rightarrow 5} x = 5$
$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (mx + b) &= \lim_{x \rightarrow a} mx + \lim_{x \rightarrow a} b \\ &= ma + b \\ m \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (-5x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-5x) + \lim_{x \rightarrow 1} 3 \\ &= -5 \cdot 1 + 3 = -2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [2^x + 5x] &= \lim_{x \rightarrow 1} 2^x + \lim_{x \rightarrow 1} 5x \\ &= 2 + 5 = 7 \end{aligned}$



$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ $= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 3} [6 - x^2] = \lim_{x \rightarrow 3} 6 - \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 6 - 9$ $= -3$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} [3x \cdot 4^x] = \lim_{x \rightarrow 2} 3x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} 4^x = 6 \cdot 16$ $= 96$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x}{\lim_{x \rightarrow -2} x^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$	$\lim_{x \rightarrow 1} [2x]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow 1} 2x \right]^3 = 8$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow 2} [x + 1]^x = \left[\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) \right]^{\lim_{x \rightarrow 2} x} = 3^2$ $= 9$

Actividad 1:

Halle los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 4} (-3x + 5)$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 7)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 5)$

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{2x-4}{x+2}}$

Indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$



Una **indeterminación algebraica** se da cuando no es posible determinar el resultado. Por ejemplo, en ciertas ocasiones, al calcular el límite de una función se puede obtener $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$a. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)} = \frac{0}{0}$$

$$b. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} - \sqrt{3})} = \frac{0}{0}$$

Para calcular el límite de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en funciones racionales, se debe trabajar de forma algebraica para poder simplificar la expresión y “salvar” así la indeterminación.

Se puede factorizar el numerador y el denominador y / o racionalizar la expresión. Es posible trabajar con expresiones equivalentes, porque para

obtener el límite no importa el valor en el punto. $a. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

Ejercicio 2. Calcule los siguientes límites.

$$a. \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$$

$$b. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{6x^2 + 4x}$$

$$d. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$$



Indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

La indeterminación algebraica $\frac{\infty}{\infty}$ surge al calcular el límite de ciertas funciones racionales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para calcular este tipo de límites, se divide numerador y denominador de la función por x^n , siendo n el mayor de los grados de ambos polinomios; se simplifica todo lo posible y luego se aplican las propiedades de los límites.

- El grado del polinomio numerador es igual al grado del polinomio

denominador.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+3x+7}{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2+3x+7}{x^2}}{\frac{2x^2-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{6+0+0}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

- El grado del polinomio numerador es menor al grado del polinomio

denominador.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2-5x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{2} = \frac{0-0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

- El grado del polinomio numerador es mayor al grado del polinomio

denominador.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+x-8}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^4+x-8}{x^4}}{\frac{x^2+3x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{1}{x^3}-\frac{8}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = \frac{5+0-0}{0+0} = \frac{5}{0} = \infty$$

Generalizando:

Sean $f(x)$ y $g(x)$, dos funciones polinómicas (o polinomios), entonces:

<p>Relación entre el grado de $f(x)$ y el grado de $g(x)$</p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$
--	---



Grado $f(x) =$ Grado $g(x)$	$\frac{\text{coeficiente principal } f(x)}{\text{coeficiente principal } g(x)}$
Grado $f(x) <$ Grado $g(x)$	0
Grado $f(x) >$ Grado $g(x)$	∞

Ejercicio 8. Calcule los siguientes límites

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+1}{x+1}$

“Abrazando nuestra historia, construimos con audacia nuevos caminos de humanización”

Santa Rosa

