



MATEMÁTICA

3° AÑO

COLEGIO MADRE MAZZARELLO
LIC. SANTIAGO SUÁREZ

MATEMÁTICA

3° AÑO

Docente: Lic. Santiago Suárez

Nombre del Estudiante:

Curso:

Teléfono:

AÑO 2024

ÍNDICE

1	UNIDAD 1	1
1.1	INTRODUCCIÓN	3
1.2	NÚMEROS NATURALES	3
1.2.1	Divisibilidad y factoro	3
1.2.1.2	Criterios de divisibilidad	4
1.2.1.3	MCM y MCD	4
	Actividades	5
1.3	NÚMEROS ENTEROS	6
1.3.1	Suma y resta de enteros	6
1.3.2	Multiplicación y división	6
	Actividades	7
1.4	NÚMEROS RACIONALES	8
1.4.1	Operaciones con fracciones	9
1.4.1.1	Suma y resta	9
1.4.1.2	Multiplicación y división	9
1.4.1.3	Potenciación y radicación	10
	Actividades	11
1.4.2	Aproximación y notación científica	12
	Actividades	12
1.5	NÚMEROS IRRACIONALES	13
1.6	NÚMEROS REALES	13
1.6.1	Intervalos reales	14
1.6.2	Módulo o valor absoluto de un número real	14
	Actividades	15
1.7	ECUACIONES E INECUACIONES	16
1.7.1	Ecuaciones	16
1.7.2	Inecuaciones	16
1.7.3	Inecuaciones con valor absoluto	17
	Actividades	17
2	UNIDAD 2	19
2.1	RAZONES Y PROPORCIONES	21
2.1.1	Razón	21
2.1.2	Proporción	21
2.1.2.1	Propiedad fundamental de las proporciones	21
	Actividades	21
2.2	PROPORCIONALIDAD	22
2.2.1	Magnitudes	22
2.2.2	Proporcionalidad directa	22
2.2.2.1	Regla de tres directa	23
2.2.2.2	Porcentaje	23
2.2.3	Proporcionalidad inversa	24
2.2.3.1	Regla de tres inversa	24
	Actividades	25
2.3	ECUACIONES CON PROPORCIONES	26

	Actividades.....	26
2.4	TEOREMA DE THALES	26
	Actividades.....	27
3	UNIDAD 3.....	29
3.1	TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.....	31
3.1.1	Teorema de Pitágoras.....	31
	Actividades.....	32
3.2	RAZONES TRIGONOMÉTRICAS	33
	Actividades.....	33
3.3	RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	34
3.3.1	Dados un ángulo agudo y uno de sus lados	34
3.3.2	Dados dos de sus lados	34
	Actividades.....	35
3.3.3	Ángulos de elevación y depresión.....	35
	Actividades.....	36
4	UNIDAD 4.....	37
4.1	REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO.....	39
4.1.1	Ejes cartesianos.....	39
5.1.1	Cuadrantes	39
	Actividades.....	39
5.2	FUNCIONES	40
5.2.1	Dominio, Codominio e Imagen de una función.....	40
5.2.2	Formas de representación de una función	41
5.2.3	Cómo identificar si una relación es o no una función	42
	Actividades.....	42
5.3	ANÁLISIS DE GRÁFICOS.....	44
5.3.1	Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.	46
	Actividades.....	46

PROGRAMA ANALÍTICO Y DE EXÁMEN DE MATEMÁTICA

UNIDAD 1: Números Enteros. Números Racionales. Números Irracionales. Números Reales. Operaciones con números y sus propiedades. Aproximación de números por redondeo y truncamiento. Notación científica. Ecuaciones. Inecuaciones. Valor absoluto. Intervalos de números reales.

UNIDAD 2: Razón. Proporción. Relaciones entre magnitudes. Regla de tres directa. Regla de tres inversa. Porcentaje. Proporcionalidad directa. Proporcionalidad inversa. Ecuaciones con proporciones. Teorema de Thales.

UNIDAD 3: Teorema de Pitágoras. Aplicación del Teorema de Pitágoras en problemas geométricos. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Uso de la calculadora científica. Resolución de triángulos rectángulos. Problemas de aplicación de la Trigonometría.

UNIDAD 4: Puntos en el plano. Función. Dominio, Codominio e Imagen. Reconocimiento de Funciones. Análisis de funciones. Máximos y mínimos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Cronograma

Primer cuatrimestre: Unidad 1 y Unidad 2.

Segundo cuatrimestre: Unidad 3, Unidad 4.

Metodología de Enseñanza-Aprendizaje

Lectura de apunte elaborado por el docente. Exposición y explicación de la teoría con ejemplos. Resolución de ejercicios prácticos y de problemas. Resúmenes y esquemas. Preguntas disparadoras y debates. Consulta.

Metodología de Evaluación

Evaluación escrita. Evaluación oral. Presentación de trabajos prácticos.

Criterios de Evaluación

Comprensión del concepto: Capacidad de comprender y explicar conceptos matemáticos fundamentales. Habilidad para aplicar conceptos en diferentes contextos y situaciones.

Resolución de problemas: Habilidad para plantear y resolver problemas matemáticos de manera efectiva y sistemática. Capacidad para identificar y aplicar estrategias apropiadas de resolución de problemas.

Razonamiento y justificación: Habilidad para razonar de manera lógica y deductiva en la resolución de problemas matemáticos. Capacidad para justificar y defender procedimientos y resultados matemáticos de manera clara y coherente.

Precisión y exactitud: Capacidad para realizar cálculos con precisión y exactitud, evitando errores en el proceso. Habilidad para utilizar correctamente términos y símbolos matemáticos en la comunicación de resultados.

Comunicación Matemática: Habilidad para comunicar ideas matemáticas de manera clara y coherente, tanto de forma oral como escrita. Capacidad para interpretar y analizar información matemática presentada en diferentes formatos (gráficos, tablas, etc.).

Colaboración y trabajo en equipo: Capacidad para colaborar con otros estudiantes en la resolución de problemas matemáticos, compartiendo ideas y estrategias. Habilidad para trabajar de manera cooperativa en proyectos matemáticos grupales.

Entrega oportuna de actividades: Capacidad para cumplir con los plazos establecidos para la entrega de tareas, proyectos o trabajos relacionados con las matemáticas. Habilidad para gestionar el tiempo de manera efectiva y organizar el trabajo para garantizar la entrega puntual de las actividades asignadas.

Bibliografía

Cuadernillos de Ingreso a la UNSJ.

Serie Activados, Matemática, Puerto de Palos.

ACUERDO DE CONVIVENCIA

Nosotros, los abajo firmantes, miembros de la comunidad educativa del Colegio Madre Mazzarello con el objetivo de promover una convivencia democrática, pacífica y respetuosa en nuestro entorno escolar, establecemos el siguiente acuerdo de convivencia:

1. **Respeto Mutuo:** Nos comprometemos a tratarnos con respeto, tolerancia y empatía, reconociendo y valorando la diversidad de opiniones, culturas, creencias y características de cada individuo.
2. **Diálogo y Comunicación:** Promoveremos el diálogo abierto y la comunicación efectiva como medios para resolver conflictos de manera pacífica y constructiva, escuchándonos y evitando cualquier forma de violencia, discriminación o intimidación.
3. **Responsabilidad y Cumplimiento:** Asumiremos la responsabilidad por nuestras acciones y decisiones, cumpliendo con las normas establecidas por la institución educativa y contribuyendo al bienestar y orden del ambiente escolar.
4. **Asistencia y Participación en Clases de Matemáticas:** Nos comprometemos a asistir puntualmente a las clases de matemáticas y participar activamente en las actividades propuestas, enfocándonos al prestar atención en clases y contribuyendo así al desarrollo de un ambiente de aprendizaje dinámico y enriquecedor.
5. **Cuidado y Uso Responsable de Materiales:** Nos comprometemos a cuidar y utilizar de manera responsable los materiales y recursos didácticos proporcionados en las clases de matemáticas, reconociendo su importancia para el proceso de enseñanza y aprendizaje.
6. **Uso del Celular:** Nos comprometemos a usar el celular sólo si el profesor lo autoriza. Lo usaremos sólo para actividades referidas a matemática, quedando prohibido el uso para actividades que interrumpan el dictado de la clase.
7. **Participación Activa:** Fomentaremos la participación activa en la vida escolar, colaborando en actividades académicas, deportivas, culturales y sociales, enriqueciendo así nuestro aprendizaje y fortaleciendo el sentido de pertenencia.
8. **Solidaridad y Colaboración:** Demostraremos solidaridad y colaboración hacia nuestros compañeros y miembros de la comunidad educativa, ofreciendo ayuda y apoyo en momentos de necesidad y celebrando los logros y éxitos de cada individuo.
9. **Resolución Pacífica de Conflictos:** En caso de surgir desacuerdos o conflictos, nos comprometemos a buscar soluciones pacíficas y dialogadas, buscando el entendimiento mutuo y el respeto por las diferencias.
10. **Actualización y Revisión:** Este acuerdo será revisado periódicamente por la comunidad educativa, con el fin de adaptarlo a las necesidades y realidades cambiantes, garantizando así su vigencia y efectividad.
11. **Compromiso de Cumplimiento:** Como firmantes de este acuerdo, nos comprometemos a respetar y cumplir sus disposiciones, promoviendo una convivencia armoniosa y constructiva en nuestro entorno escolar.

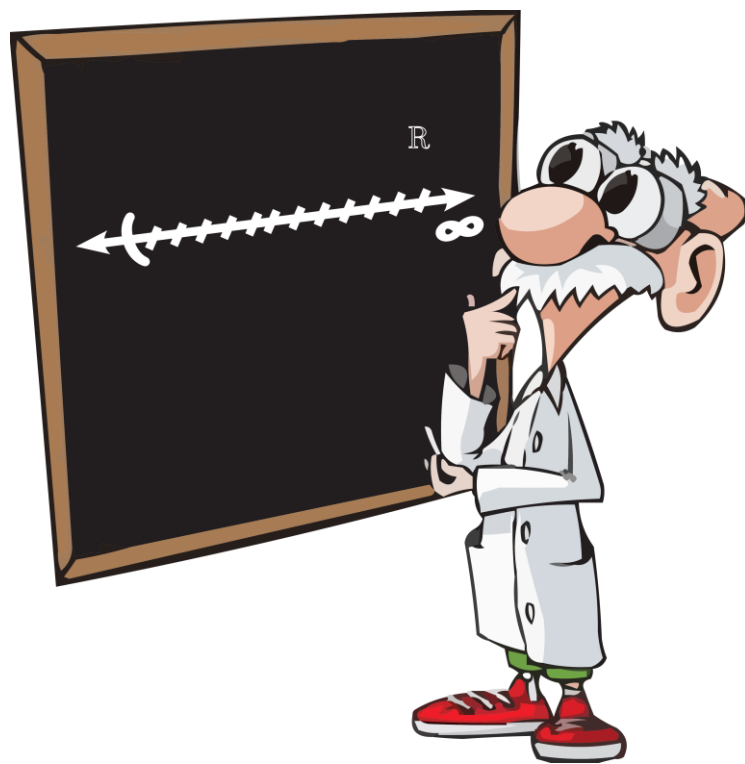
Firma del Docente

Firma de Padres o Tutores

Firma del Estudiante

UNIDAD 1

NÚMEROS REALES



CONTENIDO:

Números Enteros. Números Racionales. Números Irracionales. Números Reales.

Operaciones con números y sus propiedades.

Aproximación de números por redondeo y truncamiento. Notación científica.

Valor absoluto. Ecuaciones. Inecuaciones. Intervalos de números reales.

1.1 INTRODUCCIÓN

En el tejido matemático, los **conjuntos** actúan como hilos conductores que dan forma a la lógica y la organización conceptual. Definidos como **colecciones de elementos**, los conjuntos establecen las bases para explorar dimensiones abstractas de la realidad.

En particular, los conjuntos numéricos destacan como cimientos esenciales de la aritmética. Estos conjuntos, compuestos por números con propiedades específicas, representan herramientas fundamentales para entender y cuantificar nuestro entorno. Desde los números naturales hasta los complejos, cada conjunto numérico desempeña un papel crucial en la expresión y comprensión de magnitudes, impulsando el progreso intelectual a lo largo de la historia.

Así, en esta unidad, nos sumergiremos en el intrigante universo de los conjuntos numéricos, repasando y explorando su importancia y sus aplicaciones en la comprensión matemática del mundo que nos rodea.

1.2 NÚMEROS NATURALES

Los números naturales fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos y representan cantidades no negativas. Formalmente, el conjunto de los números naturales se simboliza

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

Las propiedades clave de los números naturales incluyen:

1. **Infinitud Ascendente:** El conjunto de números naturales es infinito y se extiende indefinidamente.
2. **Orden:** Los números naturales están ordenados de manera creciente. Para cualquier par de números naturales m y n , si $m < n$, entonces m precede a n .
3. **Posee primer elemento:** existe el primer elemento 1, el cual cumple que, para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $1 \leq m$.
4. **La Suma es operación binaria interna:** La suma de dos números naturales es siempre un número natural. Por ejemplo, $2 + 3 = 5$.
Además, la resta no es cerrada. No todos los pares de números naturales tienen una solución en el conjunto de números naturales cuando se trata de la resta. Por ejemplo, $2 - 3$ no pertenece al conjunto de números naturales.
5. **El Producto es operación binaria interna:** El producto de dos naturales es siempre otro número natural. Por ejemplo $2 \cdot 3 = 6$.
Además, la división no es cerrada. No todos los pares de números naturales tienen una solución en este conjunto con la división. Por ejemplo, $2 : 3$ no pertenece al conjunto de los números naturales.

Ahora repasaremos algunos contenidos sobre los naturales que nos servirán próximamente.

1.2.1 Divisibilidad y factoro

Un número a es divisible por otro b , cuando $a : b$ es exacta, es decir, tiene resto igual a 0 .

Por ejemplo: 15 es divisible por 3 15 es múltiplo de 3 3 es divisor de 15

1.2.1.2 Criterios de divisibilidad

Un número es divisible por:

- **2**, cuando es par.
- **3**, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- **4**, cuando sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 4.
- **5**, cuando termina en 0 o en 5.
- **6**, cuando es divisible por 2 y por 3 a la vez.
- **9**, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de nueve.
- **10**, cuando termina en 0.

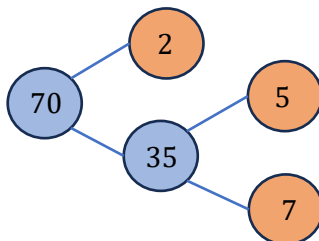
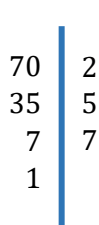
Ejemplo

76; 174
153; 6 231
12; 300
80; 315
138; 942
198; 909
50; 230

Un número es **primo** cuando tiene dos divisores: el 1 y el mismo número. Por ejemplo, 5 es primo, ya que tiene como divisores el 1 y el 5.

Un número es **compuesto** cuando tiene más de dos divisores. Por ejemplo, 12 es compuesto, ya que tiene los siguientes divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Un número compuesto se puede **descomponer** de manera única en factores primos. A la descomposición se la denomina **factorización**. Para factorizar un número, se pueden utilizar los siguientes esquemas:



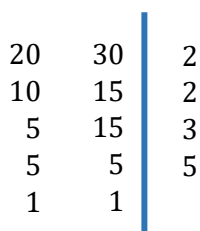
Descomposición

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

1.2.1.3 MCM y MCD

El **múltiplo común menor** (mcm) entre dos números es el menor de los múltiplos que tienen en común esos números, sin tener en cuenta el 0. Para hallar el **mcm**:

- 1) Se descomponen simultáneamente los números.
- 2) Se multiplican los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

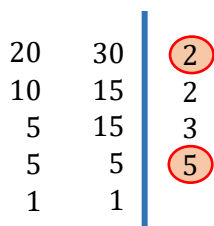


Luego

$$mcm(20; 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

El **máximo común divisor** (mcd) entre dos números es el mayor de los divisores que tienen en común esos números. Para hallar el **mcd**:

- 1) Se descomponen simultáneamente los números.
- 2) Se identifican los comunes.
- 3) Se multiplican los factores comunes con su menor exponente.



Luego

$$mcd(20; 30) = 2 \cdot 5 = 10$$

Actividades

Ejercicio 1. Unir con flechas.

- | | |
|--|------------------------------|
| a) Si la última cifra de un número es 5, entonces... | • es múltiplo de 4. |
| b) Si un número es par, entonces... | • es múltiplo de 5. |
| c) Si un número es múltiplo de 9, entonces... | • uno de sus divisores es 2. |
| d) Si la última cifra de un número es 0, entonces... | • uno de sus divisores es 3 |

Ejercicio 2. Completar el siguiente cuadro marcando con una cruz.

Es divisible por	2	3	4	5	6	9	10
328							
60							
99							
150							
792							
6132							

Ejercicio 3. Factorizar los siguientes números. Hallar el mcm y el mcd.

- a) 88 y 92
- b) 100 y 45
- c) 112 y 78
- d) 24 y 96
- e) 56, 30 y 42
- f) 20, 30 y 36
- g) 60, 108 y 36
- h) 24, 48 y 72
- i) 27, 45 y 18

Ejercicio 4. Resolver aplicando mcm y mcd.

- a) María organiza las actividades de su casa de la siguiente manera: cada 5 días limpia el patio, cada 4 días limpia los vidrios y cada 8 días limpia la vereda. ¿Cada cuantos días realiza las tres actividades simultáneamente?
- b) Claudia colecciona estampillas. Tiene 75 de Italia, 135 de Francia y 45 de España. Quiere armar sobres iguales que contengan la mayor cantidad posible de cada país. ¿Cuántas debe colocar en cada sobre? ¿Cuántos sobres necesitará?
- c) Dos carteles luminosos se encienden simultáneamente. Uno de ellos se enciende cada 24 segundos y el otro cada 36 segundos. ¿En qué momento se vuelven a encender al mismo tiempo?
- d) Se necesita alambrar un terreno con forma de cuadrilátero cuyos lados miden: 320 m, 80 m, 160 m y 200 m. Los postes deben estar a la misma distancia uno de otro y cada vértice debe tener uno. ¿Cuál es la mayor distancia a la que pueden colocarse los postes?

1.3 NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros, está formado por los enteros negativos, el cero y los enteros positivos. Al igual que los naturales son fundamentales para la matemática. Formalmente, el conjunto de los números enteros se simboliza como:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots \}$$

Las propiedades clave de los números enteros incluyen:

- 1) **Infinitud Bidireccional:** El conjunto de números enteros es infinito en ambas direcciones, extendiéndose negativa y positivamente de manera indefinida.
- 2) **Orden:** Los números enteros están ordenados de manera creciente y decreciente. Para cualquier par de números enteros m y n , si $0 < m - n$, entonces $n < m$.
- 3) **No posee primer ni último elemento:** No existe un elemento que preceda a todos los enteros, ni elemento que suceda a todos.
- 4) **Cero como Elemento Neutro:** Existe el elemento neutro 0, el cual cumple que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, se verifica que $0 + m = m$ y $m + 0 = m$.
- 5) **Operaciones Binarias Internas:** Tanto la suma como la resta y el producto son operaciones binarias internas en \mathbb{Z} .

La suma de dos números enteros es siempre otro número entero, por ejemplo, $-2 + 3 = 1$.

La resta también es cerrada en \mathbb{Z} , por ejemplo, $2 - 3 = -1$.

El producto de dos números enteros es siempre otro número entero, por ejemplo, $-2 \cdot 3 = -6$.

Sin embargo, la división no es siempre cerrada en \mathbb{Z} . No todos los pares de números enteros tienen una solución en este conjunto cuando se trata de la división. Por ejemplo, $2 : 3$ no pertenece al conjunto de los números enteros.

Ahora repasaremos algunos contenidos sobre los enteros que nos servirán próximamente.

1.3.1 Suma y resta de enteros

Si los números tienen el **mismo signo**, se **suman** sus módulos y al resultado le corresponde ese mismo signo.

Por ejemplo: $6 + 4 = 10$ $-7 - 2 = -9$

Si los números tienen **distinto signo**, se **restan** sus módulos y al resultado le corresponde el signo del número con mayor módulo.

Por ejemplo: $6 - 4 = 2$ $-7 + 2 = -5$

Una **suma algebraica** es una sucesión de sumas y restas.

Para resolver una suma algebraica, a la suma de los términos positivos se le resta la suma de los módulos de los términos negativos.

$$\begin{aligned} 3 + 5 - 8 - 2 + 10 - 7 &= (3 + 5 + 10) - (8 + 2 + 7) \\ &= 18 - 17 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.3.2 Multiplicación y división

Para **multiplicar** (o **dividir**) **números enteros** se deben tener en cuenta las siguientes reglas de los signos.

Regla de los signos	Ejemplos	
$+$ · $+$ = $+$	$2 \cdot 3 = 6$	$6 : 3 = 2$
$-$ · $-$ = $+$	$(-2) \cdot (-3) = 6$	$(-6) : (-3) = 2$
$+$ · $-$ = $-$	$2 \cdot (-3) = -6$	$6 : (-3) = -2$
$-$ · $+$ = $-$	$(-2) \cdot 3 = -6$	$(-6) : 3 = -2$

Actividades

Ejercicio 5. Resolver las siguientes sumas algebraicas.

- $-3 + 9 - 5 =$
- $-9 + 5 - 4 - 6 + 1 =$
- $-52 + 62 - 32 - 12 =$
- $-20 + 5 - 13 - 4 + 8 =$
- $114 + 61 - 41 - 113 =$

Ejercicio 6. Leer atentamente y completar la tabla.

La amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura máxima y la mínima.

Ciudad	Temperatura Mínima	Temperatura Máxima	Amplitud térmica
París	2°C	9°C	
Roma	-4°C	5°C	
Madrid	-3°C	7°C	
Ámsterdam	5°C	10°C	

Ejercicio 7. Resolver las siguientes operaciones.

- $[-18 + (-3 + 5 - 7) \cdot (-4) - (-5 + 6) : (-1)] =$
- $15 - [35 + (-5 + 6) \cdot (-2) - (-21 + 5 - 4)] - (-9) \cdot 3 =$
- $-52 + [12 - (-56 + 23 - 14) - (-4)] - (-56) : (3 - 1) =$
- $[(-25 + 5 - 10) : (-10 - 5) + (-5 + 8) \cdot 4] - (-6 + 36) =$
- $[-56 + (-9 - 5) \cdot (-7) + (-5) \cdot (-6 + 5)] + (-81) : (-7 - 2) =$

Ejercicio 8. Completar el siguiente cuadro.

a	b	c	d	$a \cdot b + c \cdot d$	$a \cdot (b + c) - d$	$a - (b : c) \cdot d$
3	8	4	7			
-3	10	2	-5			
-6	-20	4	4			
-12	27	-9	-3			
-1	-100	4	-5			

Ejercicio 9. Escribir verdadero o falso.

- El producto de dos números enteros negativos es menor que cero.
- El opuesto de un número entero es siempre menor que cero.
- El producto entre un número a y -1 es igual al opuesto de a .
- El cociente entre un número entero (distinto de cero) y su opuesto es 1.
- La diferencia entre un número y su opuesto es igual a cero.
- Si el producto entre dos números enteros da 0, los dos son iguales a 0.
- En el cálculo $a - b$, si a es positivo y b es negativo, el resultado es negativo.
- Si el cociente entre dos números enteros es igual a 0, alguno de ellos es 0.

1.4 NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales son otro conjunto fundamental en matemáticas, que incluye a los números enteros y a una amplia gama de otros números. Un número racional es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde a es un número entero y b es un número natural, que se llaman numerador y denominador, respectivamente. Formalmente, el conjunto de los números racionales se denota como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

Observación: Como b es natural, es distinto de cero.

Dos **fracciones** son equivalentes cuando representan el mismo número racional. Para obtener fracciones equivalentes se pueden usar los siguientes procedimientos.

Amplificación

$$\frac{4}{3} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{8}{6}$$

Se **multiplica** el numerador y el denominador por un mismo número natural distinto de cero.

Simplificación

$$\frac{12}{16} \xrightarrow{:4} \frac{3}{4}$$

Se **divide** el numerador y el denominador por un mismo número que sea divisor de ambos.

Una **fracción** es **irreducible** cuando el numerador y el denominador son coprimos. Es decir, la fracción no se puede simplificar.

Una **fracción** es **decimal** cuando el denominador es 10, 100, 1000, etc.

Todo número racional se puede escribir como una **expresión decimal**. Para encontrar la expresión decimal se puede dividir el numerador por el denominador. Las expresiones decimales se clasifican en:

- **Exactas:** tienen un número finito de cifras decimales.

$$\frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{1}{100} = 0,001$$

- **Periódicas:** tienen cifras decimales que se repiten infinitamente. Pueden ser *periódicas puras* (todas sus cifras decimales son periódicas) o *periódicas mixtas* (tienen una parte decimal no periódica seguida de otra periódica).

Pura

$$1, \overline{2} = \frac{12 - 1}{9} = \frac{11}{9}$$

Se escribe en el numerador todas las cifras, periódicas y no periódicas, y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras tenga el período.

Mixta

$$1,5\overline{23} = \frac{1523 - 15}{990} = \frac{1508}{990} = \frac{754}{495}$$

Se escribe en el numerador todas las cifras, periódicas y no periódicas, y se resta la parte no periódica. En el denominador se escriben tantos nueves como cifras periódicas y ceros como cifras no periódicas tenga la expresión.

1.4.1 Operaciones con fracciones

1.4.1.1 Suma y resta

Mismo denominador

Para **sumar** (o **restar**) fracciones con el **mismo denominador**, se suman (o restan) los numeradores y se escribe el mismo denominador.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Por ejemplo

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{1+6}{5} = \frac{7}{5} \qquad \frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}$$

Distinto denominador

Para **sumar** (o **restar**) fracciones con **diferentes denominadores**, primero se encuentra el **mínimo común múltiplo (mcm)** de los denominadores. Luego, cada fracción se convierte a una fracción equivalente con el mcm como denominador común. Esto se hace dividiendo el mcm por el denominador original de cada fracción y multiplicando el resultado por el numerador correspondiente. Finalmente, se suman o restan los numeradores ajustados y se coloca el resultado sobre el denominador común. A continuación, se muestra un diagrama que ilustra este procedimiento:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m:b) \cdot a \pm (m:d) \cdot c}{m} \qquad m = \text{mcm}(b, d)$$

Por ejemplo

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{10} = \frac{15+2}{20} = \frac{17}{20}$$

1.4.1.2 Multiplicación y división

Multiplicación

Para **multiplicar** dos o más fracciones, se multiplican entre si los numeradores y los denominadores. Antes de realizar la operación se puede simplificar cualquier numerador con cualquier denominador.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{12}_6} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

División

Para **dividir** dos fracciones, se *multiplica* el numerador de la primera con el denominador de la segunda y se coloca en el numerador del resultado, luego se *multiplica* el denominador de la primera con el numerador de la segunda y se coloca en el denominador del resultado (se multiplica “cruzado”). Antes de realizar la operación se puede simplificar cada fracción por separado y, además, numerador con numerador, denominador con denominador.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Por ejemplo

$$\frac{2}{3} \div \frac{6}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 6} = \frac{\cancel{8}^4}{\cancel{18}_9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

1.4.1.3 Potenciación y radicación

Para aplicar potenciación (radicación) en fracciones se distribuye la potencia (raíz) en el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

Por ejemplo

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

$$\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$$

Propiedades

Propiedad	Ejemplo
$a^0 = 1, a \neq 0$	$(-5)^0 = 1$
$0^n = 0, n \neq 0$	$0^{-3} = 0$
$a^1 = a$	$4^1 = 4$
$1^n = 1$	$1^5 = 1$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(-7)^{-3} = \left(-\frac{1}{7}\right)^3 = -\frac{1}{343}$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$

Actividades

Ejercicio 10. Escribir la fracción irreducible.

a) $\frac{15}{50} =$

d) $0,6 =$

b) $\frac{63}{180} =$

e) $2,35 =$

c) $\frac{45}{100} =$

f) $1,22 =$

Ejercicio 11. Escribir la fracción correspondiente a cada expresión decimal.

a) $0,1\bar{2} =$

b) $0,\bar{25} =$

c) $1,3\bar{62} =$

d) $32,\bar{1} =$

Ejercicio 12. Completar la tabla.

Fracción irreducible						$\frac{29}{9}$
Fracción decimal			$\frac{75}{100}$			
Expresión decimal	0,5	$0,\bar{5}$		$0,\bar{75}$	3,2	

Ejercicio 13. Resolver las siguientes operaciones.

a) $(3 - 0,4) - \left(\frac{7}{15} \cdot \frac{3}{28} + \frac{9}{4}\right) =$

b) $\left(2,5 - \frac{7}{6} : \frac{14}{15}\right) \cdot 0,64 + \frac{8}{9} =$

c) $\left(3 - \frac{4}{49} : \frac{2}{7}\right) \cdot \left(6,\bar{2} \cdot \frac{3}{8} + 4\right) =$

Ejercicio 14. Resolver aplicando propiedades de la potencia.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 : \left(\frac{3}{4}\right)^5 =$

c) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^{-1} =$

Ejercicio 15. Resolver las siguientes operaciones combinadas.

a) $\frac{8}{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{2^3 \cdot 2}{4}} - \frac{2}{5} =$

d) $3^{-2} + \left(\frac{7}{6}\right)^9 : \left(\frac{7}{6}\right)^8 - \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{6}{11} + \frac{34}{121}} =$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} - \sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}} =$

e) $\sqrt{\left(\frac{16}{3} + \frac{6}{5}\right) : \frac{6}{5}} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\right) + \frac{35}{3} : 14 =$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{9} + \frac{5}{27}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{9} + 2\right) : \frac{10}{3} =$

f) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + \left(\frac{15}{8} - \frac{3}{4} \cdot 2\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$

1.4.2 Aproximación y notación científica

Para aproximar una expresión decimal a una cifra determinada n , se pueden usar los siguientes métodos.

Truncamiento

Se dejan las primeras n cifras decimales y se suprimen las otras cifras.

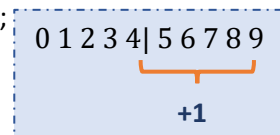
5,324 truncado a los décimos es 5,3~~24~~
 5,324 truncado a los centésimos es 5,32~~4~~

Redondeo

Hay que observar la cifra siguiente a la cifra n :

- si es mayor o igual que 5, se suma 1 a la cifra n y se eliminan las cifras que le siguen;
- si es menor que 5, se deja la cifra n igual y se eliminan las cifras que le siguen.

1,762 redondeado a los décimos es 1,8.
 1,762 redondeado a los centésimos es 1,76.



Notación científica

La *notación científica* se utiliza para escribir números muy grandes o pequeños de forma abreviada. Un número está escrito en notación científica cuando está expresado como el producto entre una potencia de 10 y un número cuyo módulo es mayor o igual que 1 y menor que 10.

$$210000 = 2,1 \cdot 10^5$$

$$74100000 = 7,41 \cdot 10^7$$

$$0,0000035 = \frac{3,5}{10^6} = 3,5 \cdot 10^{-6}$$

$$0,000000741 = \frac{7,41}{10^7} = 7,41 \cdot 10^{-7}$$

Actividades

Ejercicio 16. Completar la siguiente tabla.

Fracción	Expresión Decimal	Truncamiento a los décimos	Truncamiento a los centésimos	Redondeo a los décimos	Redondeo a los centésimos
$\frac{6}{125}$					
	0,625				
$\frac{141}{50}$					
	$5,\bar{3}$				
$\frac{3}{200}$					

Ejercicio 17. Escribir como notación científica.

- 520 =
- 0,00375 =
- 860000 =
- 0,000000135 =
- 64000000 =
- 0.00000000465 =

1.5 NÚMEROS IRRACIONALES

Los números irracionales son expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional no se puede expresar como fracción (cociente entre un entero y un natural). Formalmente, el conjunto de los números irracionales se denota

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ no se puede expresar como fracción, } x \notin \mathbb{Q}\}$$

Por ejemplo

$$\pi = 3,14159265 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

$$e = 2,71828182846$$

Se pueden generar números irracionales escribiendo las cifras decimales a partir de alguna regla de formación, para que no sean periódicas.

$$0,12356789 \dots$$

$$1,112233445566778899 \dots$$

$$-0,135791113151719 \dots$$

1.6 NÚMEROS REALES

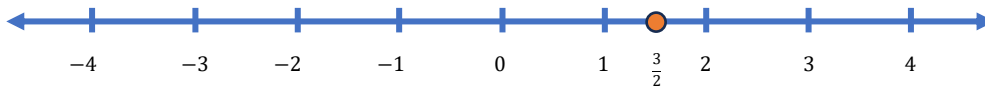
Finalmente, el conjunto de los números reales está formado por la unión de los números racionales con los números irracionales. Formalmente se denota

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Nota: El símbolo “ \cup ” denota la unión de conjuntos.

El conjunto de los números reales es:

- **Denso:** entre dos números reales existe otro número real.
- **Continuo:** a cada punto de la recta (real) le corresponde un único número real.



A un punto de la misma se le asigna el 0, luego se elige un segmento unidad y se ubican los números restantes. A cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa.

Se puede ver la relación de **inclusión** de los conjuntos numéricos en el siguiente esquema

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \\ \mathbb{I} \end{array} \right\} \mathbb{R}$$

1.6.1 Intervalos reales

Se denomina **intervalo real** a toda **semirrecta** o **segmento** de la recta real. Es decir que son **subconjuntos** de números reales. Algebraicamente se designa un intervalo por sus extremos encerrados entre paréntesis o corchetes:

- paréntesis, si los extremos no están incluidos;
- corchetes, si se incluyen los extremos.

Tipo	Lenguaje simbólico	Intervalo	En la recta
Abierto	$a < x < b$	$(a; b)$	
Cerrado	$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	
Semiabierto	$a \leq x < b$ $a < x \leq b$	$[a; b)$ $(a; b]$	
Infinito	$a < x$ $a \leq x$ $x < b$ $x \leq b$	$(a; \infty)$ $[a; \infty)$ $(-\infty; b)$ $(-\infty; b]$	

Ejemplos

Tipo	Lenguaje simbólico	Intervalo	En la recta (dibujar)
Abierto	$-1 < x < 3$	$(-1; 3)$	
Cerrado	$2 \leq x \leq 7$	$[2; 7]$	
Semiabierto	$-3 \leq x < 1$ $0 < x \leq 4$	$[-3; 1)$ $(0; 4]$	
Infinito	$2 < x$ $-5 \leq x$ $x < -2$ $x \leq 6$	$(2; \infty)$ $[-5; \infty)$ $(-\infty; -2)$ $(-\infty; 6]$	

1.6.2 Módulo o valor absoluto de un número real

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero sobre la recta real. Para todo número real x , su módulo se expresa: $|x|$. Formalmente se simboliza

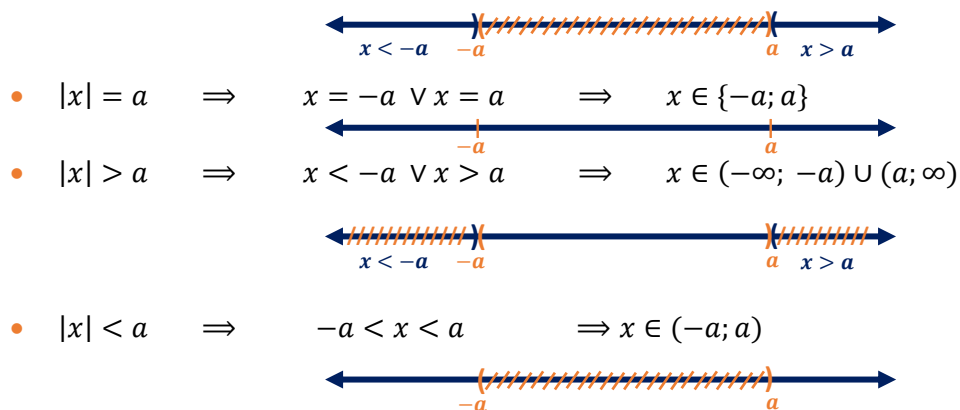
$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo: $|-3| = 3$, $|0| = 0$ y $|2| = 2$

Propiedades

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

El siguiente gráfico nos ayudará a entender las siguientes propiedades.



Actividades

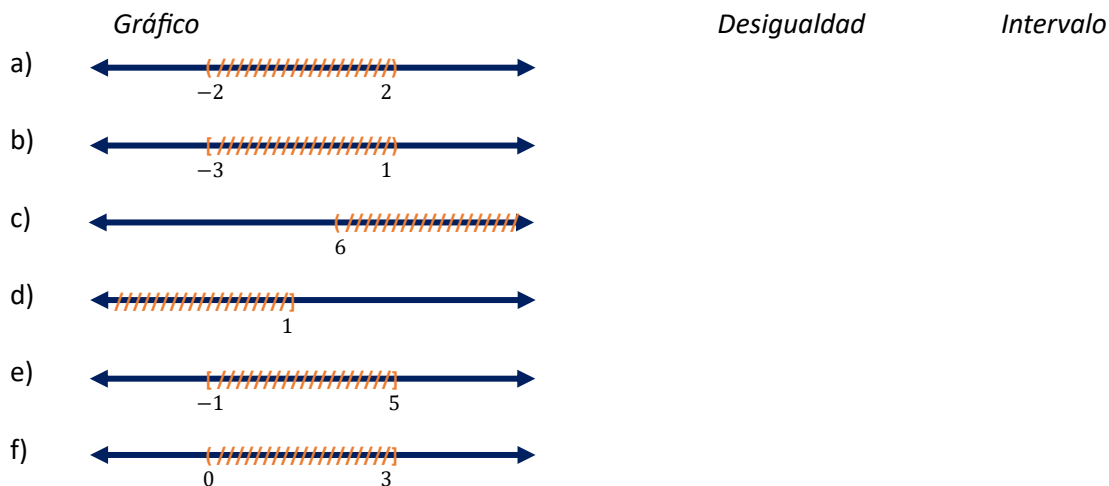
Ejercicio 18. Marcar con una X según corresponda.

Número	Naturales	Enteros	Racionales	Irracionales	Reales
4					
$\frac{1}{3}$					
$\sqrt{5}$					
$\sqrt{9}$					
$1,3\bar{4}$					

Ejercicio 19. Escribir los intervalos correspondientes y representar en la recta.

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} =$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 4\} =$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3,5 < x < 0\} =$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} =$
- e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\} =$

Ejercicio 20. Dadas las representaciones, escribir la desigualdad y el intervalo correspondiente.



1.7 ECUACIONES E INECUACIONES

1.7.1 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para uno, algunos o ningún valor de la/s variable/s. Por ejemplo

$$x + 3 = 0$$

$$8 - 2x = 0$$

$$x + 5 = x - 2$$

$$a + 2b + c = 0$$

Resolver una ecuación es encontrar, si existen, el o los valores de las variables que verifican la igualdad planteada. Dichos valores determinan el conjunto solución de la ecuación.

Una ecuación de primer grado o **lineal** es aquella cuya forma general es: $ax + b = 0$, siendo a y b números reales y $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} -6 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{4}{5}x + 2\right) : \frac{1}{2} \\ -6x + 2 &= -\frac{8}{5}x + 4 \\ -6x + \frac{8}{5}x &= 4 - 2 \\ -\frac{22}{5}x &= 2 \\ x &= -\frac{5}{11} \end{aligned}$$

Para resolver ecuaciones lineales en las que aparecen módulos que incluyen la incógnita, se deben tener presentes tanto la definición de este concepto como sus propiedades.

$$\begin{aligned} &|x + 5| = 8 \\ x + 5 = -8 \quad \vee \quad x + 5 = 8 \\ x = -8 - 5 \quad \vee \quad x = 8 - 5 \\ x = -13 \quad \vee \quad x = 3 \\ S &= \{-13; 3\} \end{aligned}$$

Recuerda:

$$|x| = a \Rightarrow x = -a \vee x = a$$

$$\Rightarrow x \in \{-a; a\}$$

1.7.2 Inecuaciones

Las desigualdades que contienen variables se llaman **inecuaciones**.

Resolver una inecuación es encontrar todos los valores de la incógnita que la verifican, y el conjunto solución es un intervalo real o el conjunto vacío. Una inecuación se resuelve como una ecuación, salvo en el caso en que se **divida o se multiplique** a ambos miembros por un **número negativo**, lo que **invierte** el sentido de la desigualdad.

$\begin{aligned} -5 \cdot x &> 7 \\ x < 7 : (-5) \\ x < -\frac{7}{5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\frac{2}{5} \cdot x &\leq -4 \\ x \geq -4 : (-\frac{2}{5}) \\ x &\geq -10 \end{aligned}$	$\begin{aligned} -2 \cdot x &< 9 \\ x > 9 : (-5) \\ x &> -\frac{9}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \cdot x &\geq -2 \\ x \leq -2 : (-\frac{3}{4}) \\ x &\leq -\frac{8}{3} \end{aligned}$
$S = \left(-\infty; -\frac{7}{5}\right)$	$S = [10; \infty)$	$S = \left(-\frac{9}{2}; \infty\right)$	$S = \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right]$

1.7.3 Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver este tipo de inecuaciones se deben recordar las propiedades y las definiciones.

Veamos un ejemplo

$$\begin{aligned}
 |3x - 5| &< 4 \\
 -4 < 3x - 5 &< 4 && \text{Aplicamos la propiedad} \\
 -4 + 5 < 3x < 4 + 5 \\
 \frac{1}{3} < x < \frac{9}{3} \\
 \frac{1}{3} < x < 3 \\
 S &= \left(\frac{1}{3}; 3\right)
 \end{aligned}$$

Recuerda:
 $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
 $\Rightarrow x \in (-a; a)$

Gráficamente:



Veamos otro ejemplo

$$\begin{aligned}
 |1 - 3x| &> 2 && \text{Aplicamos la propiedad} \\
 1 - 3x < -2 & \vee & 1 - 3x > 2 \\
 -3x < -2 - 1 & \vee & -3x > 2 - 1 \\
 x > (-3): (-3) & \vee & x < 1: (-3) \\
 x > 1 & \vee & x < -\frac{1}{3} \\
 S &= \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; \infty)
 \end{aligned}$$

Recuerda:
 $|x| > a \Rightarrow x < -a \vee x > a$
 $\Rightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$

Gráficamente:



Actividades

Ejercicio 21. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2x + 8 = 5$ b) $\frac{x - 1}{4} = \frac{2x}{-3}$ c) $-\frac{7}{5} + 2x = 0$

Ejercicio 22. Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto. Escribir el conjunto solución.

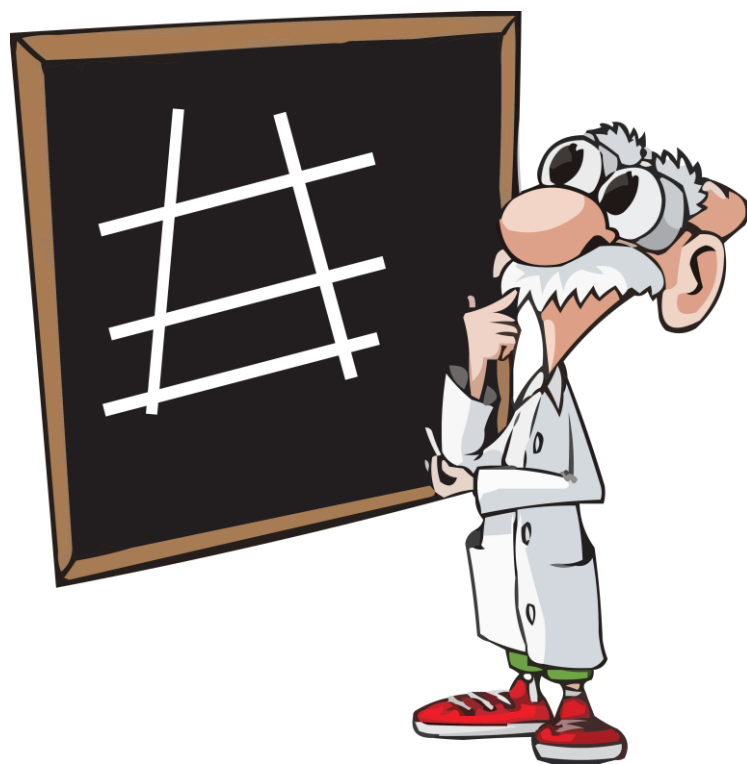
a) $|x - 3| = 6$ b) $|2x + 5| = 3$ c) $\left|\frac{2 + 3x}{3}\right| = 1$

Ejercicio 23. Resolver las siguientes inecuaciones. Escribir el conjunto solución. Graficar en la recta.

a) $\left|2x - \frac{1}{2}\right| < 3$ b) $\left|\frac{1 - 3x}{2}\right| \geq 2$ c) $\left|\frac{2 + 3x}{3}\right| < 1$

UNIDAD 2

PROPORCIONALIDAD



CONTENIDO:

Razón. Proporción. Relaciones entre magnitudes.
Regla de tres directa. Regla de tres inversa. Porcentaje.
Proporcionalidad directa. Proporcionalidad inversa.
Ecuaciones con proporciones. Teorema de Thales.

2.1 RAZONES Y PROPORCIONES

2.1.1 Razón

Se denomina **razón** entre dos números a y b (con $b \neq 0$) al cociente entre esos números.

$$\begin{array}{l} \text{Antecedente} \longrightarrow \\ \text{Consecuente} \longrightarrow \end{array} \frac{a}{b} = r \longrightarrow \text{Razón}$$

Por ejemplo, supongamos que hicimos una encuesta entre 12 personas sobre su color favorito y obtuvimos que 4 personas prefieren azul, 3 personas prefieren rojo y 5 personas prefieren blanco. Como comparación podemos decir que

- 4 personas de cada 12 prefieren azul
- 3 personas de cada 12 prefieren rojo
- 5 personas de cada 12 prefieren blanco

luego, las razones respectivas son: $\frac{4}{12}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{5}{12}$

2.1.2 Proporción

Cuatro números a, b, c y d (con b y d distintos de cero) forman una **proporción** cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos segundos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \text{Se lee "a es a b como c es a d"}$$

Donde a y d se denominan **extremos**, b y c se denominan **medios** de la proporción.

Por ejemplo

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} = 1,5$$

2.1.2.1 Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\begin{array}{c} a \quad c \\ \diagdown \quad \diagup \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \diagup \quad \diagdown \\ b \quad d \end{array} \longrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Se multiplica "cruzado"

Actividades

Ejercicio 1. Escribir la razón correspondiente entre las cantidades.

- "3 de cada 4 músicos, además de cantar, tocan instrumentos".
- "8 de cada 12 niños han sido vacunados en los últimos meses".
- "4 de cada 9 personas tiene un teléfono celular de alta tecnología".
- "De los 37 números de la ruleta, 18 son rojos".
- "De los 90 números del bingo, 45 son impares".

Ejercicio 2. Indicar si las siguientes expresiones forman una proporción. Escribir V (verdadero) o F (falso). Justificar aplicando la propiedad fundamental.

$$\frac{20}{4} = \frac{40}{8}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{45}{62}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{14}{8}$$

$$\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{7}{14}$$

2.2 PROPORCIONALIDAD

2.2.1 Magnitudes

Una **magnitud** es una propiedad que se puede **medir** numéricamente.

Por ejemplo, la longitud de una prueba de atletismo, la capacidad de una botella de agua, el peso de una fruta o una verdura, la superficie de un terreno, el tiempo que dura una canción, etcétera.

Se pueden establecer relaciones entre dos magnitudes. Por ejemplo, el peso de la verdura y el dinero que se paga por ella, la velocidad de un auto y el tiempo que se demora en llegar a un destino, la edad y la estatura de una persona, etc.

En el primer ejemplo, si aumentamos el peso de la verdura que compramos es obvio pensar que el dinero que pagamos también lo hace. Lo mismo sucede si disminuyen. En este caso se dice que la relación es “directamente proporcional”.

En el segundo ejemplo, si el vehículo aumenta su velocidad entonces el tiempo de demora disminuye. En este caso la relación es “inversamente proporcional”.

En el último caso, si bien a medida que la edad aumenta la estatura también lo hace, llega un momento que la estatura detiene su crecimiento mientras que la edad sigue aumentando. En este caso *no hay relación*. Como podemos ver, no siempre existe proporcionalidad. Ahora, definiremos formalmente estos conceptos.

2.2.2 Proporcionalidad directa

Dos variables se relacionan en forma **directamente proporcional** cuando el cociente entre los valores que se corresponden es constante. El número que se obtiene al dividir las cantidades se denomina **constante de proporcionalidad k** .

$$\frac{y}{x} = k \text{ entonces } y = k \cdot x$$

Por ejemplo, la distancia recorrida por un automóvil que se mueve a velocidad constante se relaciona en forma directamente proporcional con el tiempo que transcurre.

Tiempo (en horas)	Distancia recorrida (en kilómetros)	Constante $\frac{y}{x} = k$
1	50	$\frac{50}{1} = 50$
2	100	$\frac{100}{2} = 50$
3	150	$\frac{150}{3} = 50$
4	200	$\frac{200}{4} = 50$

2.2.2.1 Regla de tres directa

La *regla de tres simple directa* se aplica cuando tenemos una relación de cantidades con *proporcionalidad directa*. Esto significa que cuando una magnitud aumenta, la otra también lo hace proporcionalmente. Imagina que se conocen tres elementos de una proporción y el problema consiste en hallar el cuarto, y que la proporción se verifique. Veamos un ejemplo.

En una panadería, con 15 kilos de harina hacen 75 prepizzas. ¿Cuántos kilos de harina serían necesarios para hacer 90 prepizzas?

Solución:

	Prepizzas	Harina
1. Plantear	75	15
	90	x
2. Formar proporción respetando las posiciones	$\frac{75}{90} = \frac{15}{x}$	
	$75 \cdot x = 15 \cdot 90$	
3. Resolver	$x = \frac{15 \cdot 90}{75}$	
	$x = 18$	
4. Responder	<u>Respuesta:</u> Serían necesarios 18kg de harina	

2.2.2.2 Porcentaje

El **porcentaje** es la relación que existe entre un número y 100. Se denota acompañado del símbolo %.

Por ejemplo, supongamos que el 85% de los alumnos del colegio tiene hermanos. Esto significa que 85 de cada 100 alumnos tiene hermanos. La representación numérica es

$$\frac{85}{100} = 0,85 \quad \xrightarrow{\text{Los centésimos indican el porcentaje}} \quad 85\%$$

Consideremos otro ejemplo. ¿Cuál es el 25% de 120? Para resolverlo podemos usar regla de tres directa, sabiendo que el 100% es el "total", en este caso como el total es 120 podemos plantear y resolver.

$$\begin{array}{l} 25 \longrightarrow x \\ 100 \longrightarrow 120 \end{array}$$
$$\frac{25}{100} = \frac{x}{120}$$
$$x = \frac{25 \cdot 120}{100} = 30$$

Respuesta: El 25% de 120 es 30.

2.2.3 Proporcionalidad inversa

Dos variables se relacionan en forma **inversamente proporcional** cuando el producto entre los valores que se corresponden es constante.

$$x \cdot y = k \text{ entonces } y = \frac{k}{x}$$

Por ejemplo, la medida de la base de un rectángulo de área igual a 40 cm^2 se relaciona en forma inversamente proporcional con la medida del altura.

Base (en cm)	Altura (en cm)	Constante $x \cdot y = k$
1	40	$1 \cdot 40 = 40$
2	20	$2 \cdot 20 = 40$
4	10	$4 \cdot 10 = 40$

2.2.3.1 Regla de tres inversa

La *regla de tres simple inversa* se aplica cuando tenemos una relación de cantidades con *proporcionalidad inversa*. Esto significa que cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye proporcionalmente. Imagina que se conocen tres elementos de una proporción y el problema consiste en hallar el cuarto, y que la proporción se verifique. Veamos un ejemplo.

Supongamos que tres canillas tardan 10 horas en llenar un depósito de agua. ¿Cuántas horas tardarán 5 canillas en hacerlo? (Notemos que, si aumenta la cantidad de canillas, el tiempo que se tarda en llenarse disminuye).

Solución:

	<i>Canillas</i>		<i>Horas</i>
1. <i>Plantear</i> →	3	→	10
	5	→	x
2. <i>Formar proporción</i> → ¡¡Se invierte una fracción!!	$\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$ ↻		
	$x = \frac{3 \cdot 10}{5}$		
3. <i>Resolver</i> →	$x = 6$		
4. <i>Responder</i> →	<u>Respuesta:</u> Tardan 6 horas.		

Actividades

Ejercicio 3. Resolver aplicando regla de tres directa.

- Lucas controla el rendimiento de su auto. Con un tanque lleno (28 litros) puede recorrer 275 km. ¿Cuántos litros necesitará para un viaje de 550 km?
- Para alimentar a su perro, Adriana cocina 200 gramos de arroz cada 3 días. Así la bolsa que compra le alcanza para 45 días. ¿Cuál es el contenido de la bolsa?
- Una máquina fabrica 1200 tornillos en seis horas, ¿cuánto tiempo le llevará a la máquina fabricar 10000 tornillos, teniendo en cuenta que las condiciones de fabricación son las mismas?

Ejercicio 4. Resolver aplicando regla de tres inversa.

- Un grupo de amigos decide alquilar una casa con pileta para festejar un cumpleaños y pagar entre todos el alquiler. Ellos calcularon que si van 20 personas deberán pagar U\$S 2 cada uno. Si van 8 personas, ¿Cuánto tendrá que pagar cada una? ¿Cuánto cuesta el alquiler de la casa?
- Si viajo a 90 km/h, tardo 7 horas en llegar de mi casa a Córdoba. ¿A qué velocidad debo ir para llegar en 5 horas?
- Para envasar cierta cantidad de litros de aceite se necesitan 12 envases de 10 litros cada uno. ¿Cuántos envases hacen falta si cada uno tiene 1,5 litros de capacidad?

Ejercicio 5. Resolver los siguientes problemas con porcentaje.

- Julio cobra U\$S 800 de sueldo, de los cuales U\$S 120 gasta en impuestos, ¿qué porcentaje de su sueldo gasta en impuestos?
- ¿Qué número es el 32% de 128?
- En un grupo de 20 amigos, 12 practican deporte, ¿qué porcentaje practica deporte?

Ejercicio 6. Completar la tabla, indicar tipo de proporcionalidad y calcular la constante.

- Natalia y Damián preparan bocaditos para vender. Los envasan en cajas de 15 unidades.

Cajas	Bocaditos
4	
5	
10	
12	
20	

Proporcionalidad:

Constante:

- Eduardo necesita 40 litros de pintura para pintar su casa. Según las capacidades en litros de las latas ¿cuántas tiene que comprar?

Capacidad de cada lata	Cantidad de latas
2	
5	
10	
20	

Proporcionalidad:

Constante:

2.3 ECUACIONES CON PROPORCIONES

Resolver una ecuación con proporciones involucra aplicar la propiedad fundamental de proporciones y luego resolver. Veamos un ejemplo.

Ejemplo

$$\frac{3}{4-x} = \frac{9}{2x+2}$$

Aplicamos la propiedad

$$3 \cdot (2x + 2) = 9 \cdot (4 - x)$$

$$6x + 6 = 36 - 9x$$

$$6x + 9x = 36 - 6$$

$$15x = 30$$

$$x = 30 : 15$$

$$x = 2$$

Actividades

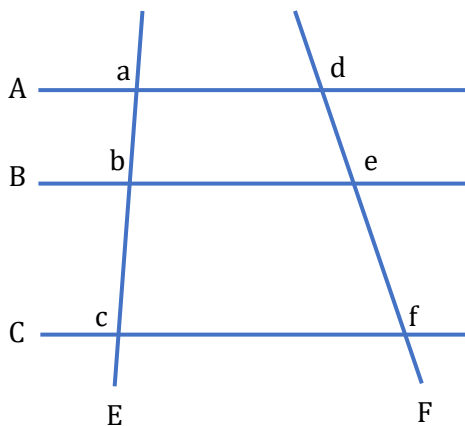
Ejercicio 7. Resolver las siguientes ecuaciones.

a)
$$\frac{7x + 3}{10x + 14} = \frac{1}{2}$$

b)
$$\frac{9 - 4x}{16x + 16} = \frac{2}{5}$$

2.4 TEOREMA DE THALES

Si tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de las medidas de los segmentos determinados en una de ellas es igual a la razón de las medidas de los segmentos correspondientes en la otra.



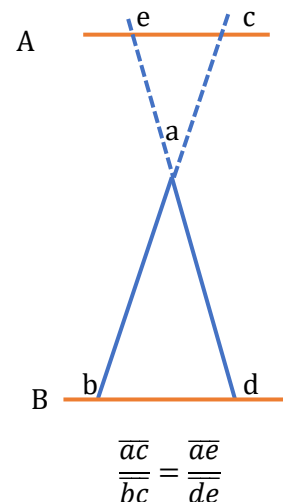
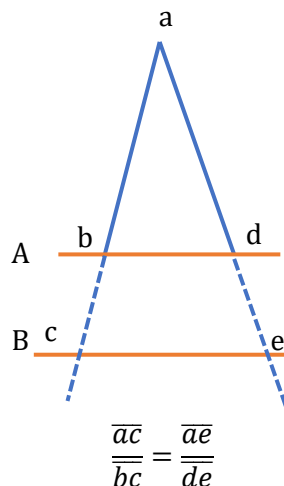
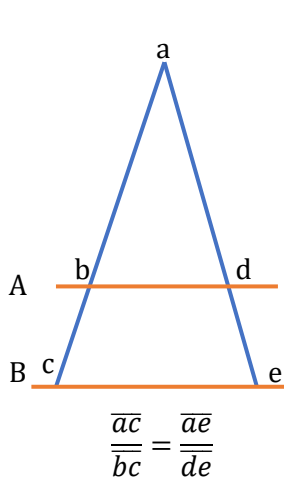
$A \parallel B \parallel C$

E y F son transversales

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}}$$

Al \overline{ab} le corresponde el \overline{de} en la otra transversal. Por eso es que se denominan **segmentos correspondientes**.

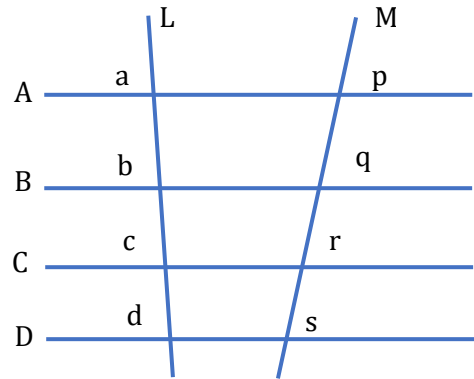
Como consecuencia del teorema de Tales, toda recta paralela al lado de un triángulo que interseque a los otros dos lados o a sus prolongaciones, determina sobre estos **segmentos proporcionales**.



Actividades

Ejercicio 8. Escribir la medida del segmento que falta en cada caso.
 $A \parallel B \parallel C \parallel D$, L y M son transversales.

- $\overline{bc} = 4\text{cm}$; $\overline{pq} = 5\text{cm}$; $\overline{qr} = 3,2$; $\overline{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\overline{bd} = 7\text{dm}$; $\overline{pq} = 2\text{dm}$; $\overline{qs} = 6\text{dm}$; $\overline{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\overline{ab} = 8,5\text{m}$; $\overline{pq} = 6\text{m}$; $\overline{qr} = 7,2\text{m}$; $\overline{bc} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\overline{ad} = 15,5\text{dam}$; $\overline{rs} = 4,5\text{dam}$; $\overline{ps} = 10\text{dam}$; $\overline{cd} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\overline{ac} = 25,3\text{km}$; $\overline{bd} = 28\text{km}$; $\overline{pr} = 19,2\text{km}$; $\overline{qs} = \underline{\hspace{2cm}}$

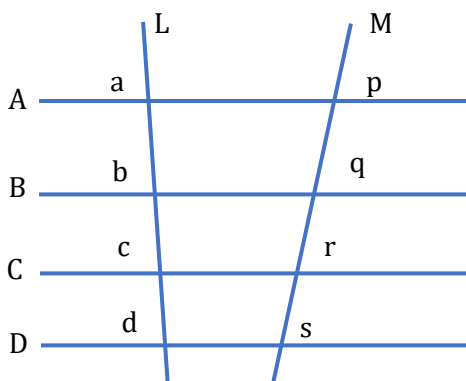


Ejercicio 9. Resolver.

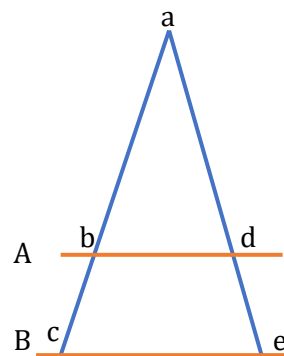
El matemático Thales de Mileto logró medir el altura de una de las pirámides de Egipto, teniendo como dato la sombra de la pirámide, el altura del matemático y la sombra que su cuerpo proyectaba. Tengan en cuenta los datos, realicen un esquema de la situación y calculen el altura de la pirámide.

- Altura de Thales: 1,72m
- Longitud de la sombra de la pirámide: 63,66m
- Longitud de la sombra de Thales: 0,75m

Ejercicio 10. Calcular el valor de la incógnita y la medida de cada segmento.



- Datos:
- $\overline{ab} = 2x + 3$
 - $\overline{qr} = 36$
 - $\overline{bc} = 5x + 8$
 - $\overline{pq} = 14$



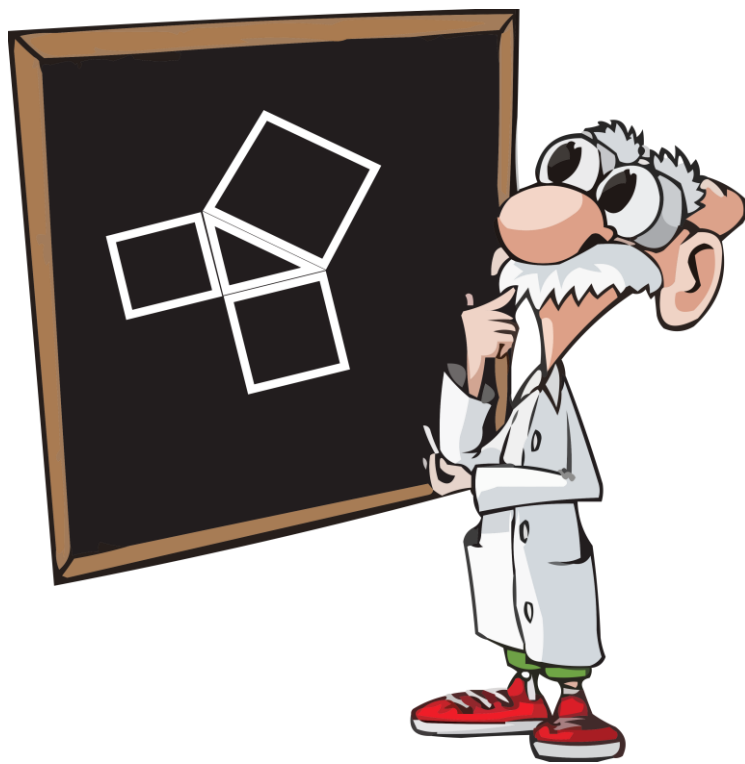
- Datos:
- $\overline{ab} = 3x + 2$
 - $\overline{ad} = 4x - 2$
 - $\overline{bc} = 5$
 - $\overline{de} = 4$
 - $\overline{bd} = 10 - x$
 - $\overline{ce} = 12 + x$

Ejercicio 11. Resolver.

- Gastón mide 1,80m y Carla 1,64m. Ambos se encuentran de espaldas al Sol. Si la sombra que proyecta Gastón mide 85cm, ¿Cuánto mide la sombra que proyecta Carla?
- La sombra de un árbol mide 7m. Si a 4,5m del pie del árbol se encuentra una varilla de 0,5, de longitud cuya sombra mide 1,5m, ¿Cuál es la altura del árbol?

UNIDAD 3

TRIGONOMETRÍA



CONTENIDO:

Teorema de Pitágoras.

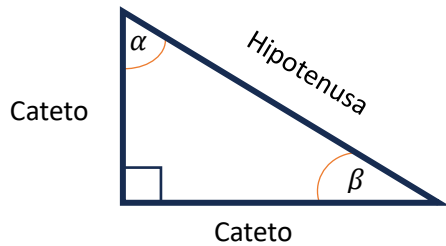
Aplicación del Teorema de Pitágoras en problemas geométricos.

Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Uso de la calculadora científica.

Resolución de triángulos rectángulos. Problemas de aplicación de la Trigonometría.

3.1 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo es **rectángulo** cuando tiene un ángulo recto. En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el opuesto al ángulo recto es la **hipotenusa**, que es el mayor de los tres lados.

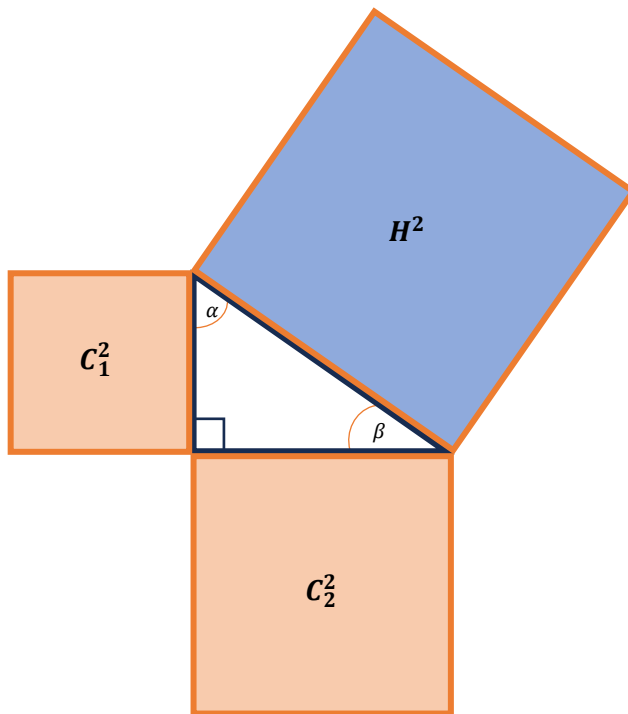


La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90° , es decir, son *complementarios*.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

3.1.1 Teorema de Pitágoras

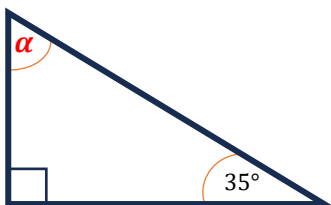
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los dos cuadrados de las medidas de los catetos. Esta relación se denomina relación pitagórica o teorema de Pitágoras.



Teorema de Pitágoras

$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

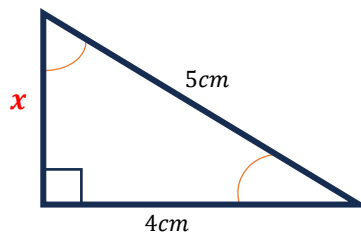
Veamos algunos ejemplos:



Encontrar el valor de α .

Para hallar este valor, usamos la propiedad de la suma de ángulos interiores:

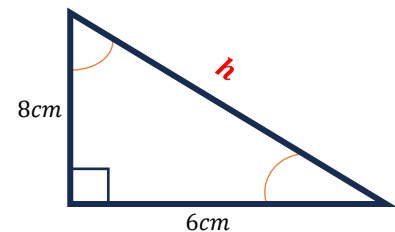
$$\begin{aligned} \alpha + 35 &= 90 \\ \alpha &= 90 - 35 = 55 \\ \alpha &= 55^\circ \end{aligned}$$



Encontrar el valor de x .

Para hallar este valor, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= 5^2 \\ x^2 + 16 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 16 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \sqrt{9} \\ x &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$



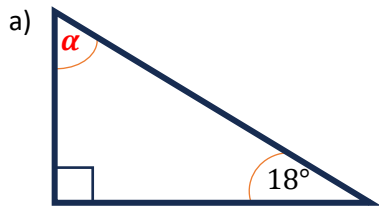
Encontrar el valor de h .

Para hallar este valor, usamos el Teorema de Pitágoras:

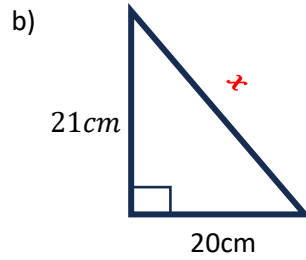
$$\begin{aligned} h^2 &= 8^2 + 6^2 \\ h^2 &= 64 + 36 \\ h^2 &= 100 \\ h &= \sqrt{100} \\ h &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Actividades

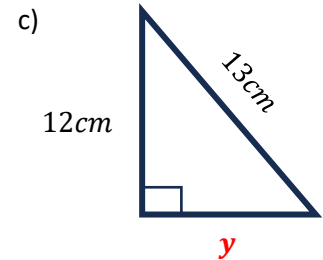
Ejercicio 1. Encontrar el valor de los datos que faltan en cada caso.



$\alpha =$

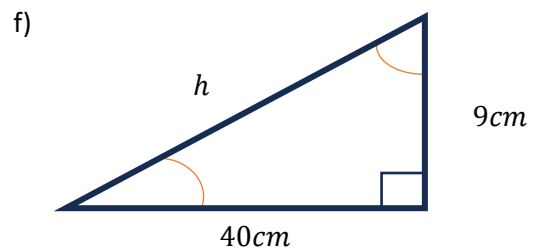
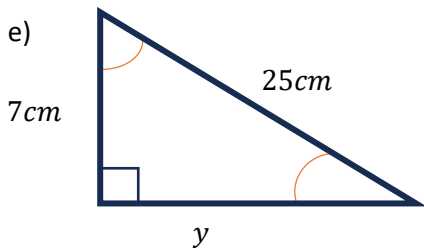
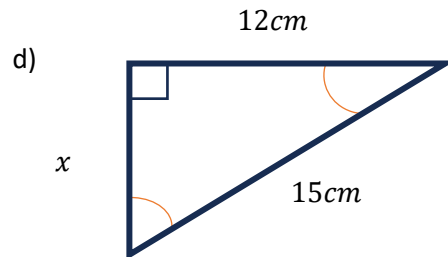
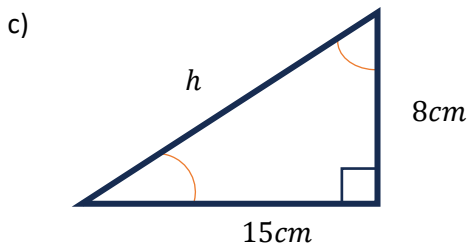
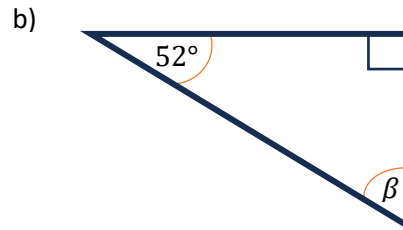
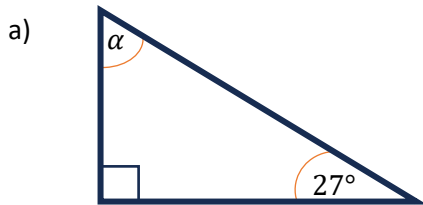


$x =$



$y =$

Ejercicio 2. Dados los siguientes triángulos, hallar el valor de las incógnitas, realizando los cálculos en tu cuaderno.



Ejercicio 3. Resolver los siguientes problemas planteando el dibujo esquemático correspondiente.

a) Un árbol proyecta una sombra de $6m$ de longitud. Si el árbol mide $4,5m$ ¿Qué distancia hay entre la copa del árbol y el final de la sombra?

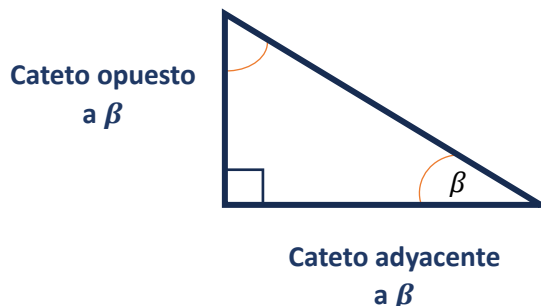
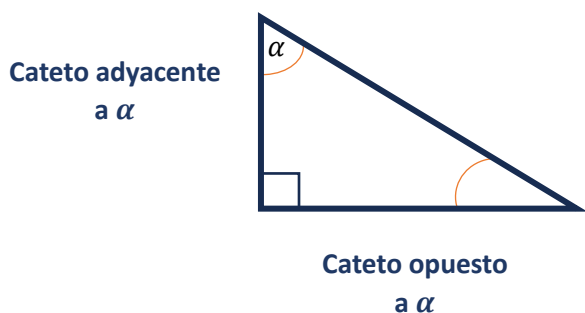


b) Un faro emite un haz de luz de $58m$ de longitud. Si el faro mide $36m$ de alto ¿A qué distancia llega la luz?



3.2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En un triángulo rectángulo, cada cateto recibe un nombre según el ángulo agudo que se considere.



Se llaman razones trigonométricas a aquellas que relacionan longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo. Para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, uno de los catetos es el adyacente y el otro es el opuesto. Sin perder generalidad, consideremos solo el ángulo α para la definición de las razones.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

- **Seno** de un ángulo.

Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Coseno** de un ángulo.

Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- **Tangente** de un ángulo

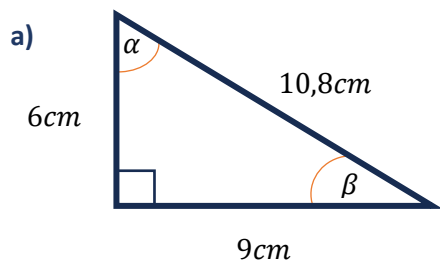
Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Nota: En el caso de conocer el ángulo y querer saber el valor de la función trigonométrica, en la **calculadora científica** podemos usar las teclas **sin**, **cos** y **tan** para calcular el seno, coseno y la tangente respectivamente. Recíprocamente, si lo que queremos saber es el valor del ángulo, usamos la tecla **shift** presionando luego las teclas de las funciones: **shift sin**, **shift cos** y **shift tan**.

Actividades

Ejercicio 4. Calcular las razones trigonométricas en los siguientes triángulos.



$$\text{sen}(\alpha) =$$

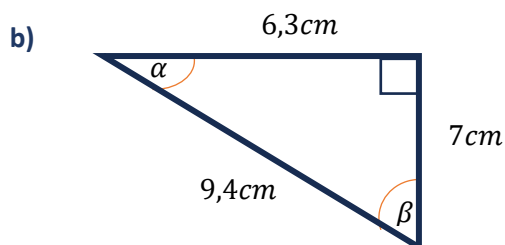
$$\text{sen}(\beta) =$$

$$\text{cos}(\alpha) =$$

$$\text{cos}(\beta) =$$

$$\text{tan}(\alpha) =$$

$$\text{tan}(\beta) =$$



$$\text{sen}(\alpha) =$$

$$\text{sen}(\beta) =$$

$$\text{cos}(\alpha) =$$

$$\text{cos}(\beta) =$$

$$\text{tan}(\alpha) =$$

$$\text{tan}(\beta) =$$

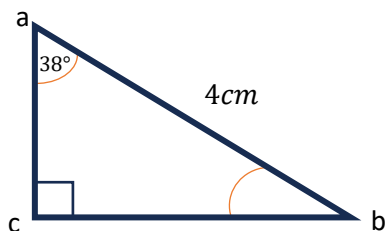
3.3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo significa conocer el valor de sus **tres ángulos** y **sus tres lados**.

Un triángulo queda perfectamente determinado si se conocen tres de sus elementos, siempre que uno de ellos sea un lado.

Para resolver un **triángulo rectángulo**, como el ángulo recto ya está determinado, se debe conocer al menos el valor de uno de sus ángulos agudos y un lado, o el valor de dos de sus lados.

3.3.1 Dados un ángulo agudo y uno de sus lados



Para calcular el ángulo restante \hat{b} , debe aplicarse la propiedad de los ángulos agudos.

$$\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ \Rightarrow \hat{b} = 90^\circ - 38^\circ \Rightarrow \hat{b} = 52^\circ$$

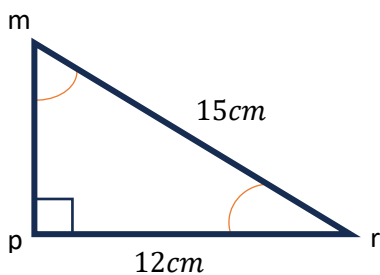
Para calcular el lado \overline{ac} se debe recurrir a la razón trigonométrica que relacione los dos datos conocidos con el lado.

$$\cos \hat{a} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{ab} \cdot \cos \hat{a} \Rightarrow \overline{ac} = 4 \text{ cm} \cdot \cos(38^\circ) \approx 3,15 \text{ cm}$$

Para calcular el lado \overline{bc} se razona análogamente.

$$\sin \hat{a} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} \Rightarrow \overline{bc} = \overline{ab} \cdot \sin \hat{a} \Rightarrow \overline{bc} = 4 \text{ cm} \cdot \sin(38^\circ) \approx 2,46 \text{ cm}$$

3.3.2 Dados dos de sus lados



Para calcular el lado restante \overline{mp} , debemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\overline{mp} = \sqrt{225\text{cm}^2 - 144\text{cm}^2} \Rightarrow \overline{mp} = 9\text{cm}$$

Para calcular los ángulos hay que recurrir a las razones trigonométricas que relacionan los datos conocidos con el ángulo que deseamos determinar.

Para el ángulo \hat{m} :

$$\sin \hat{m} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \Rightarrow \sin \hat{m} = 12\text{cm}/15\text{cm} \Rightarrow \sin \hat{m} = 0,8 \Rightarrow \hat{m} \approx 53^\circ 7' 48''$$

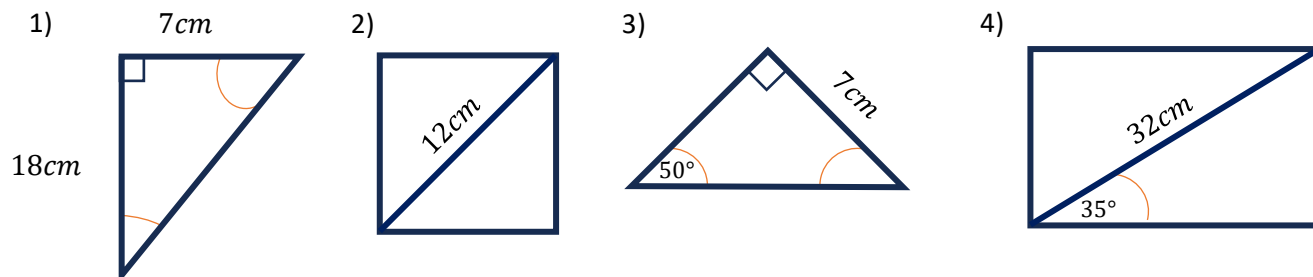
Para el ángulo \hat{r} :

$$\cos \hat{r} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \Rightarrow \cos \hat{r} = 12\text{cm}/15\text{cm} \Rightarrow \cos \hat{r} = 0,8 \Rightarrow \hat{r} \approx 36^\circ 52' 12''$$

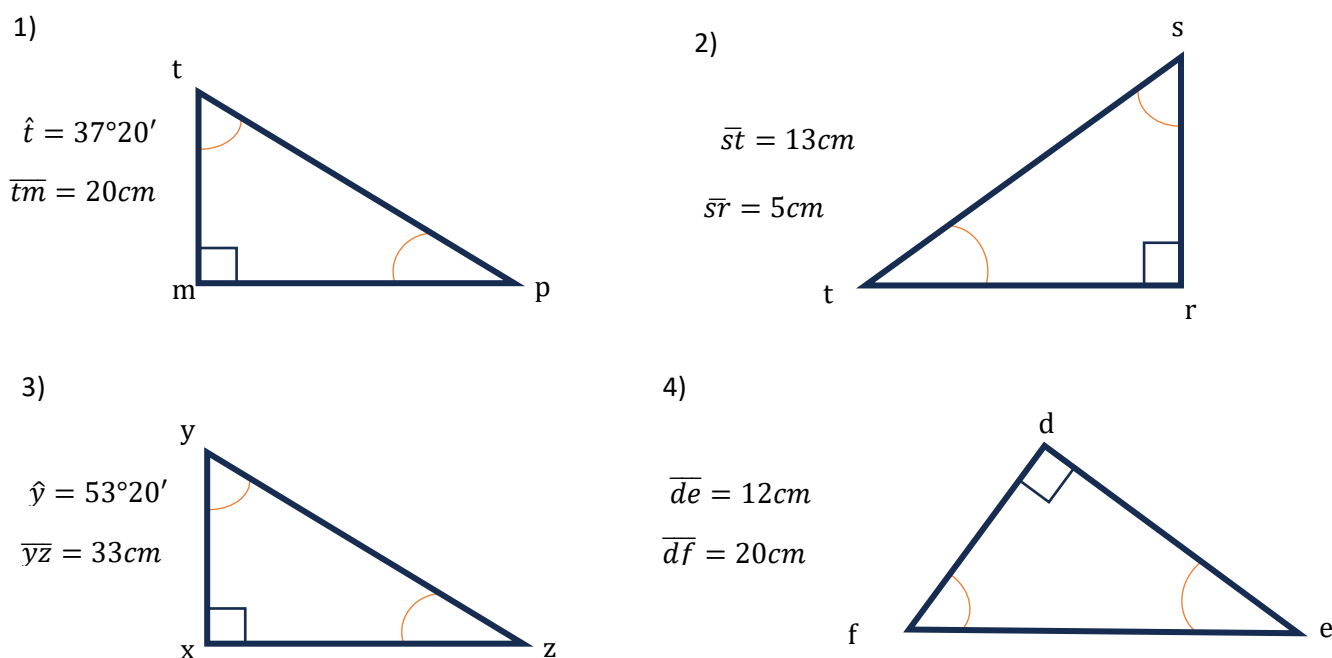
Actividades

Ejercicio 5. Calcular el perímetro de cada una de las siguientes figuras.

(Pueden usar teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, para encontrar los lados que faltan y luego calcular el perímetro)

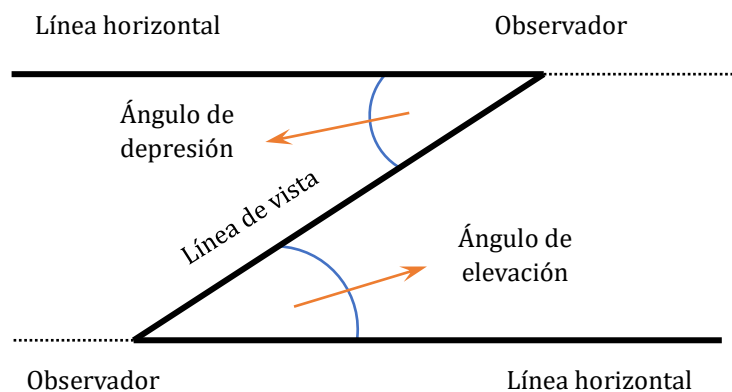


Ejercicio 6. Resolver los siguientes triángulos rectángulos.



3.3.3 Ángulos de elevación y depresión

El ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual a un objeto se denomina **ángulo de elevación** o **ángulo de depresión**, según la observación se realice hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.



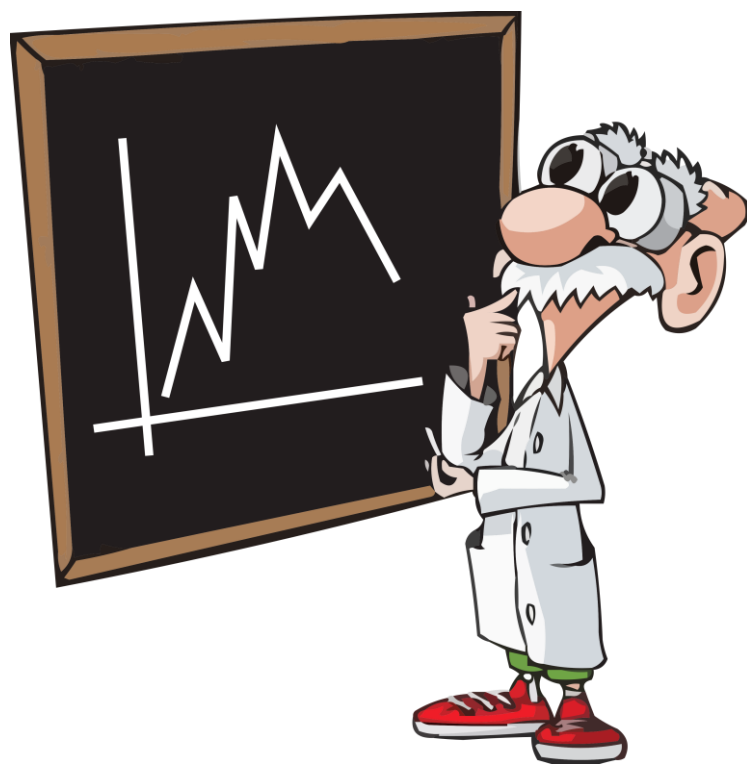
Actividades

Ejercicio 7. Plantear y resolver los siguientes problemas.

- 1) ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol cuando un mástil de $24m$ proyecta una sombra de $16m$?
- 2) ¿Cuál es la altura h de una antena si una persona que se encuentra a $250m$ de su base, observa su punta bajo un ángulo de 22° ?
- 3) ¿Cuál es el área de un triángulo isósceles, cuya base mide $18cm$ y el ángulo opuesto a ella mide $34^\circ 50'$?
- 4) El perímetro de un triángulo isósceles es de $26cm$ y su base mide $10cm$.
¿Cuál es el valor de sus ángulos interiores?

UNIDAD 4

FUNCIONES



CONTENIDO:

Puntos en el plano. Función. Dominio, Codominio e Imagen.
Reconocimiento de Funciones. Análisis de funciones.

4.1 REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

4.1.1 Ejes cartesianos

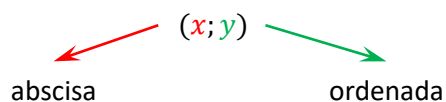
Para ubicar puntos en un plano, se utilizan como referencia los **ejes cartesianos**, que son dos rectas perpendiculares que dividen al plano en cuatro **cuadrantes** y se intersecan en un punto denominado **origen de coordenadas**.

- La recta horizontal se denomina **eje x** o de las **abscisas**.
- La recta vertical, **eje y** o de las **ordenadas**.
- Cada punto del plano se representa mediante un **par ordenado**.

5.1.1 Cuadrantes

Cuando se trazan los ejes cartesianos, el plano queda dividido en 4 **cuadrantes**. El primer cuadrante es el que tiene **abscisa y ordenada positiva**. Los cuadrantes se numeran en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj).

A continuación, podemos ver un ejemplo de una serie de puntos dados como **pares ordenados** que representamos en un sistema de ejes.



$$A = (5; 3) \Rightarrow \text{cuadrante I}$$

$$B = (0; 5) \Rightarrow \text{sobre eje y}$$

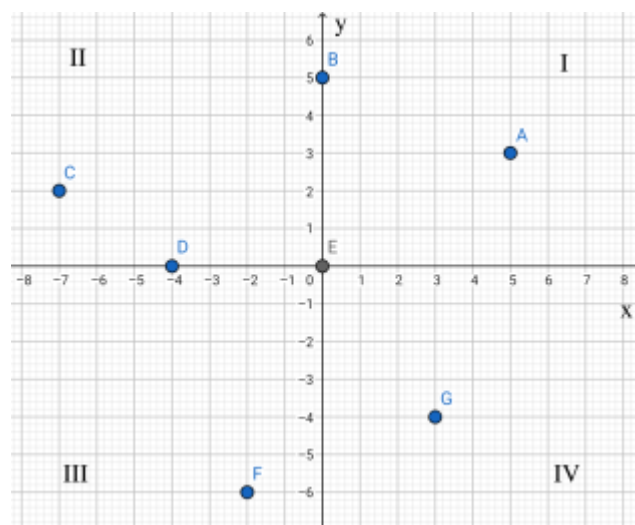
$$C = (-7; 2) \Rightarrow \text{cuadrante II}$$

$$D = (-4; 0) \Rightarrow \text{sobre eje x}$$

$$E = (0; 0) \Rightarrow \text{origen de coordenadas}$$

$$F = (-2; -6) \Rightarrow \text{cuadrante III}$$

$$G = (3; -4) \Rightarrow \text{cuadrante IV}$$



Actividades

Ejercicio 1. Graficar un sistema de ejes cartesianos y ubicar los siguientes puntos en el plano.

$$a = (4; 2)$$

$$d = (0; -4)$$

$$g = (0; 2)$$

$$b = (-3; 1)$$

$$e = (-5; -1)$$

$$h = (-2; -5)$$

$$c = (2; -3)$$

$$f = (-3; 0)$$

$$i = (5; 0)$$

5.2 FUNCIONES

Dados dos conjuntos A y B , se llama **función de A en B** a la relación que a **todo** elemento de A le hace corresponder un **único** elemento de B .

Simbólicamente se escribe: $f: A \rightarrow B$ que quiere decir que la función está definida de A en B , siendo A el conjunto de partida y B el conjunto de llegada de la función.

IMPORTANTE: La notación simbólica de una función definida con una fórmula es la siguiente:

$f: A \rightarrow B$ tal que $y = f(x)$; donde x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**.

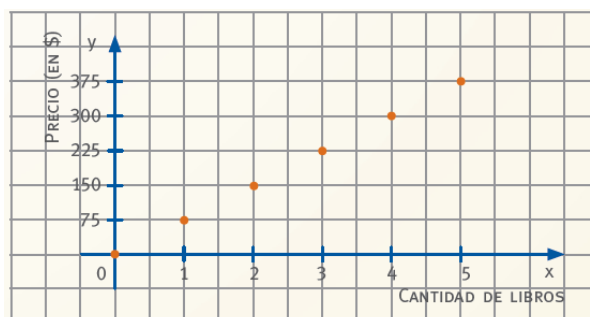
Ejemplos de Funciones:

- Variación de la presión arterial de un paciente respecto del tiempo.
- Variación de la estatura de una persona durante su crecimiento cada 5 años.
- El área de un círculo acorde al valor de su radio.

En el siguiente ejemplo, se representa una función a través de un gráfico y una tabla.

Ignacio vende una colección de libros. Cada libro cuesta \$75

Cantidad de libros	Precio (en \$)
0	0
1	75
2	150
3	225
4	300
5	375



5.2.1 Dominio, Codominio e Imagen de una función

- El **Dominio de una función f** es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se simboliza: **$Dom(f)$** .
- El **Codominio de una función f** es el conjunto de llegada de la función. Se simboliza: **$Cod(f)$** .
- La **Imagen de una función f** es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente. Se simboliza: **$Im(f)$** .

Importante:

- Si $f: A \rightarrow B$ entonces podemos asegurar que: $Dom(f) = A$, $Cod(f) = B$ y $Im(f) \subseteq Cod(f)$.
- Dada una función f , la notación $f(a) = b$ indica que al elemento a del dominio le corresponde el elemento b de la imagen, es decir, que la **imagen de a es b** .
- Dada una función f , la notación $f^{-1}(b) = a$ indica que al elemento b de la imagen le corresponde el elemento a del dominio, es decir, que la **preimagen de b es a** .
- Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Cod(f) = \mathbb{R}$ entonces a dicha función la llamaremos **Función real de variable real**.

5.2.2 Formas de representación de una función

Simbólica: Indicando la función a través de su **Expresión Algebraica**.

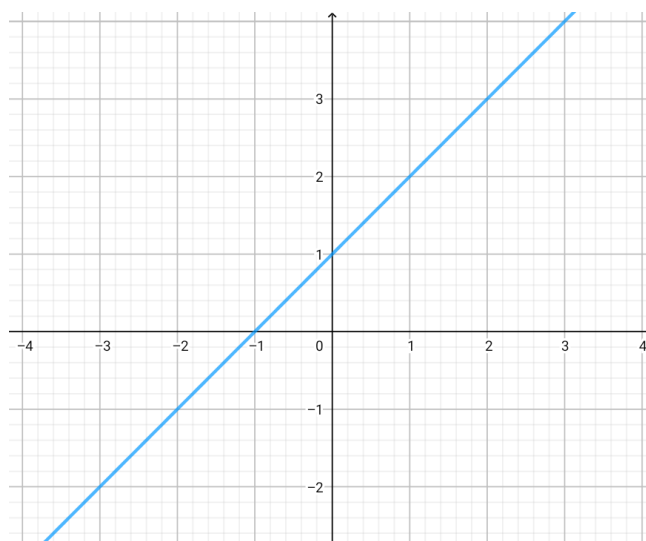
Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **definida por** $f(x) = x + 1$

O simplemente: dada la función $f(x) = x + 1$ **para todo** $x \in \mathbb{R}$.

Tabular: Indicando la función mediante una **Tabla de valores**.

x	$f(x) = x + 1$	$(x, f(x))$
-1	$f(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$f(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$

Gráfica: Indicando la función por medio de su **Gráfica en un Sistema de Ejes Cartesianos**.



5.2.3 Cómo identificar si una relación es o no una función

Para decidir si una relación es una función podemos hacer el siguiente análisis. Pensemos en la asignación de estudiantes a cada aula en un colegio, y respondamos:

¿Un estudiante puede quedarse sin un aula asignada?

¿Pueden quedar aulas vacías?

¿Un estudiante puede ser asignado a dos aulas distintas a la vez?

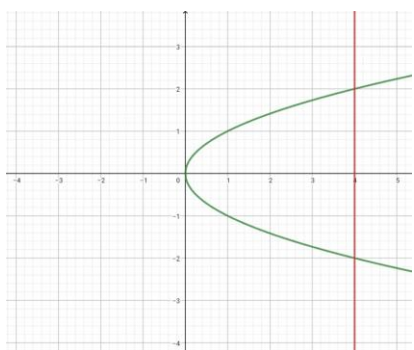
¿Un aula puede recibir muchos estudiantes?

En conclusión, si llevamos esta idea a una tabla tenemos que buscar elementos repetidos en la columna de la variable x . Consideremos la siguiente tabla.

x	y	$(x; y)$
4	2	(4; 2)
9	3	(9; 3)
4	-2	(4; -2)

Por ejemplo, en esta tabla el 4 tiene asignados dos valores distintos de y , por ende, no es función.

Gráficamente podemos, con una regla en forma vertical, buscar dos intersecciones.



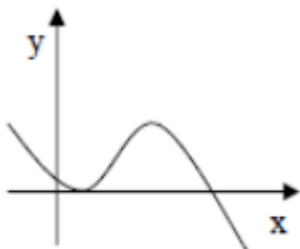
En este caso, esta relación al valor de $x=4$ le hace corresponder en y los valores 2 y -2.

Hemos visto que esto no puede ocurrir ya que es como si un estudiante estuviera en dos aulas al mismo tiempo.

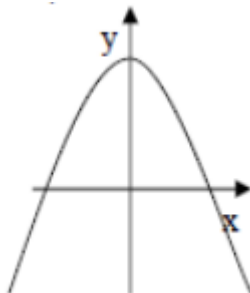
Actividades

Ejercicio 2. Indicar si los siguientes gráficos representan funciones.

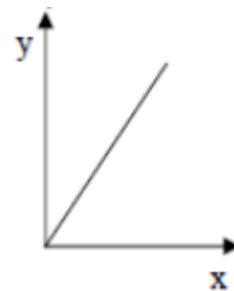
a)



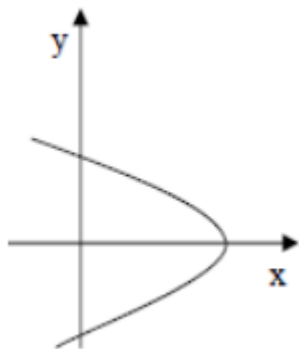
b)



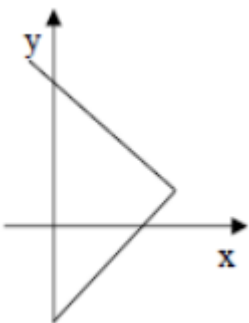
c)



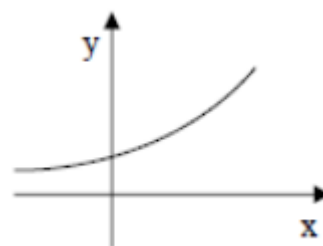
d)



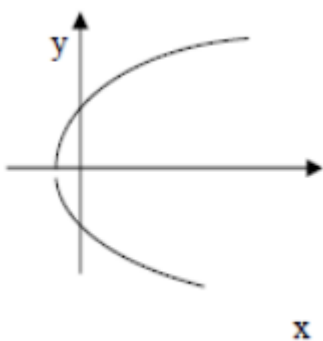
e)



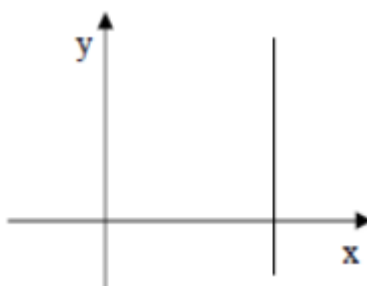
f)



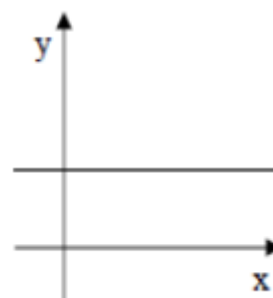
g)



h)



i)



Ejercicio 3. Indicar si las siguientes tablas representan funciones.

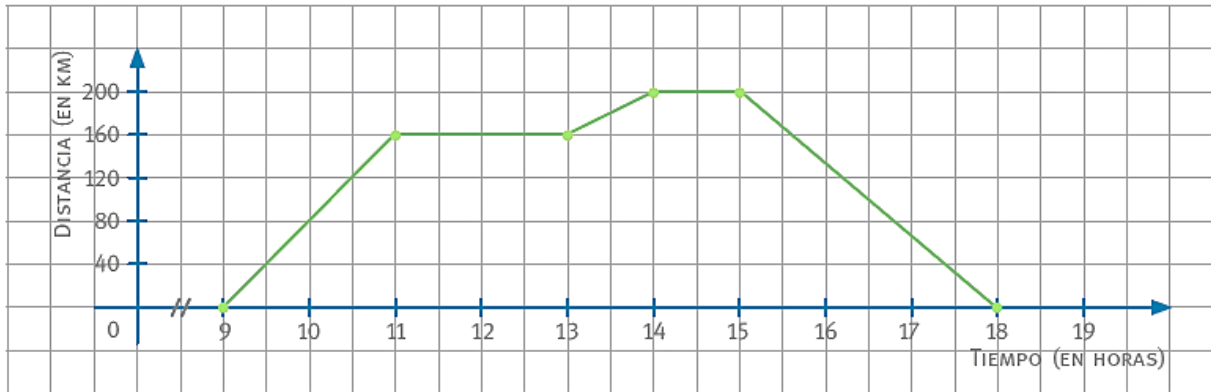
x	y	(x, y)
-4	5	(-4; 5)
-5	2,5	(-5; 2,5)
9	9	(9; 9)
3	0	(3; 0)
5	2,5	(5; 2,5)

x	y	(x, y)
-2	-1	(-2; -1)
0	-2	(0; -2)
10	-3	(10; -3)
-2	-4	(-2; -4)
7	-5	(7; -5)

x	y	(x, y)
-6	-11	(-6; -11)
-2,7	7	(-2,7; 7)
0	9	(0; 9)
4	7	(4; 7)
8	0	(8; 0)

5.3 ANÁLISIS DE GRÁFICOS

El siguiente gráfico muestra la distancia a la que se encuentra una familia con respecto a su casa desde que salieron hasta que regresaron de su paseo.



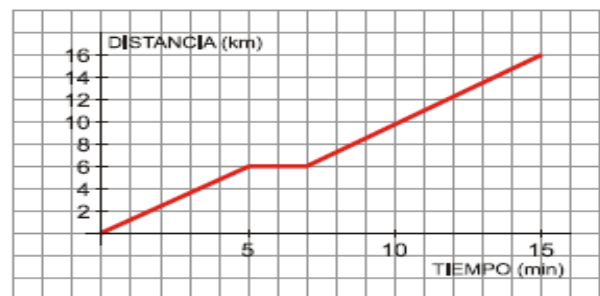
En el gráfico se representa la distancia a la casa en función del tiempo. La variable independiente es el tiempo (en horas) y la dependiente es la distancia (en km).

A partir de la lectura del gráfico se puede decir que:

- A las 9:00 la familia salió de su casa, estuvieron viajando durante 2 horas y recorrieron 160 kilómetros;
- pararon dos horas y continuaron el viaje hasta las 14:00 horas. En ese tramo recorrieron 40 kilómetros;
- pararon una hora más y emprendieron el viaje de regreso a su casa.

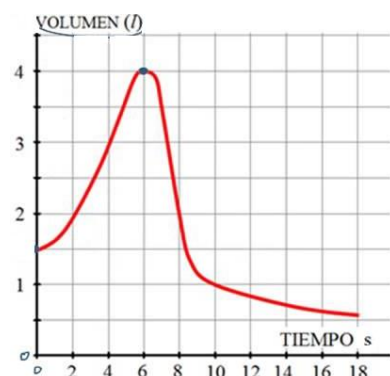
Ejercicio 4. La siguiente gráfica corresponde al recorrido que sigue Antonio para ir desde su casa al trabajo:

- ¿A qué distancia de su casa se encuentra su lugar de trabajo? ¿Cuánto tarda en llegar?
- Ha hecho una parada para recoger a su compañera de trabajo, ¿durante cuánto tiempo ha estado esperando? ¿A qué distancia de su casa vive su compañera?
- ¿Cuántos kilómetros llevaba recorrido al cabo de 10 minutos?

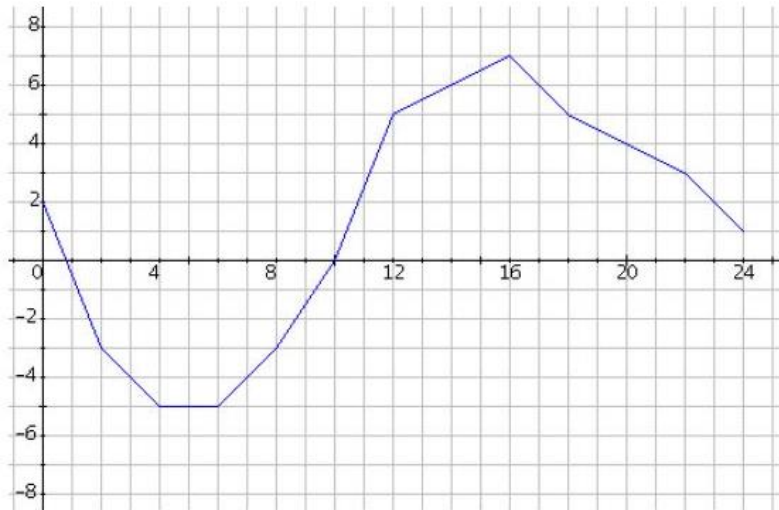


Ejercicio 5. Para medir la capacidad respiratoria de los pulmones, se hace una prueba que consiste en inspirar al máximo y después expirar tan rápidamente como se pueda en un aparato llamado espirómetro.

- ¿Cuál es el volumen en el momento inicial?
- ¿Cuánto tiempo duró la observación?
- ¿Cuál es la capacidad máxima de los pulmones de esta persona?
- ¿Cuál es el volumen a los 10 segundos de iniciarse la prueba?
- ¿Cuándo el volumen es de 2 litros?



Ejercicio 6. El gráfico muestra la temperatura a lo largo de un día de invierno en un pueblo del sur. En el eje horizontal representamos las horas del día y en el eje vertical las temperaturas.

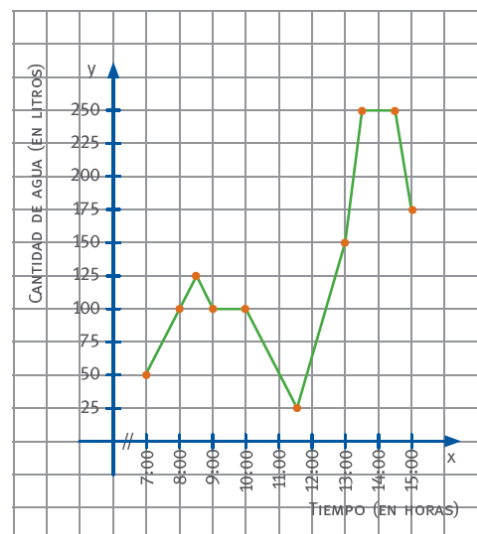


Responder:

- ¿Qué temperatura hizo a las 0 horas?
- ¿Qué temperatura hizo a las 10 horas?
- ¿A qué hora había 0° ?
- ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima del día? ¿Cuál fue la temperatura máxima?
- ¿A qué hora se alcanzó la temperatura mínima del día? ¿Cuál fue la temperatura mínima?
- ¿En qué periodo del día subió la temperatura?
- ¿En qué periodo bajó?
- ¿En qué periodo se mantuvo constante?
- ¿En qué periodo del día hubo una temperatura por debajo de los 0° ?

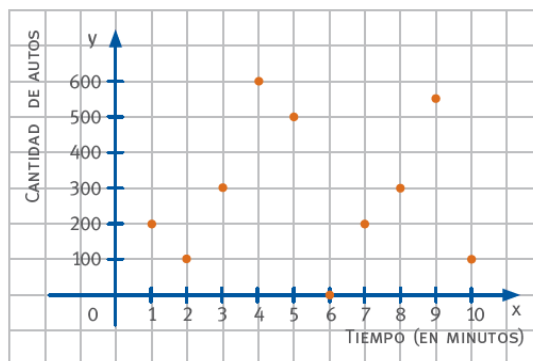
Ejercicio 7. El gráfico relaciona el tiempo con la cantidad de litros de agua que hay en el tanque de una casa.

- ¿Cuáles son las variables?
- ¿Cuántos litros de agua había a las 8:30 h?
- ¿Y a las 11:30 h?
- ¿A qué hora el tanque tenía 150 l? ¿Y 100 l?
- ¿En algún momento se vació el tanque?
- ¿Durante cuánto tiempo salió agua del tanque?
- ¿Durante cuánto tiempo ingresó agua al tanque?
- ¿En qué horarios la capacidad del tanque se mantuvo constante?



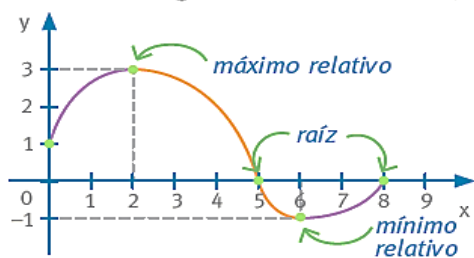
Ejercicio 8. Una empresa de autos realizó un estudio en las principales avenidas de la ciudad para averiguar la cantidad de vehículos de su marca que están circulando.

- ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente?
- ¿En qué momento pasó la mayor cantidad de autos de la marca?
- ¿Cuántos autos pasaron en total durante el estudio?
- ¿En qué minutos se contó la misma cantidad de automóviles?
- ¿Cuántos automóviles pasaron en el minuto 4? ¿Y en el minuto 8?
- ¿En algún momento no pasó ningún auto? ¿Cuándo?
- El gráfico es ¿de trazo continuo o de puntos aislados? ¿Por qué?
- ¿Se usó la misma escala en los dos ejes? Expliquen la respuesta.



5.3.1 Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para analizar el gráfico de una función, hay que tener en cuenta distintos elementos.



- El gráfico interseca al eje x en dos puntos llamados **ceros** o **raíces** de la función: $x = 5$ y $x = 8$.
- En $x = 2$ hay un **máximo relativo** porque a su izquierda la función crece y a su derecha, decrece.
- En $x = 6$ hay un **mínimo relativo** porque a su izquierda la función decrece y a su derecha crece.

Una función es **creciente** (parte del gráfico pintada de violeta) cuando al aumentar los valores de la variable x , aumentan los valores correspondientes de la variable y .

Intervalo de crecimiento = $(0;2) \cup (6;8)$ \longrightarrow Valores de x donde la función es creciente.

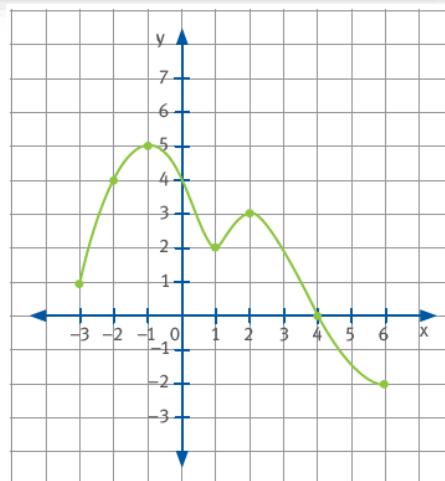
Una función es **decreciente** (parte del gráfico pintada de naranja) cuando al aumentar los valores de la variable x , disminuyen los valores correspondientes de la variable y .

Intervalo de decrecimiento = $(2;6)$ \longrightarrow Valores de x donde la función es decreciente.

Actividades

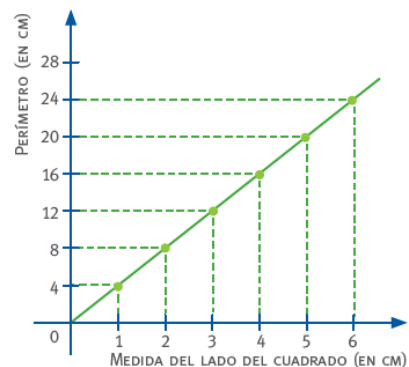
Ejercicio 9. Observar el gráfico y responder.

- ¿Cuál es el dominio? ¿Y la imagen?
- ¿Cuál es la imagen de -2 ? ¿Y la preimagen de 5 ?
- ¿El punto $(1; 2)$ pertenece a la función?
- Completar.
Cero o raíz:
Máximo:
Mínimo:
Intervalo de crecimiento:
Intervalo de decrecimiento:



Ejercicio 10. Observar el gráfico y responder.

- ¿Cuáles son las variables? Clasificar.
- ¿Cuál es el dominio?
- Si el lado del cuadrado mide 4cm ¿Cuál es el perímetro?
- Si el perímetro es de 24cm ¿Cuánto mide es lado del cuadrado?



Ejercicio 11. Indicar la gráfica de una función que cumpla con las siguientes condiciones:

- Creciente en $(-\infty, 0)$
- Constante en $[0; 5)$
- Decreciente en $[5; \infty)$

