**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

# Guía de Actividades N ° 2

## Funciones Trigonométricas

---

Repaso Conceptos Básicos

### *¿Qué es trigonometría?*

Etimológicamente, trigonometría significa "medida de ángulos". Consiste en relacionar y hacer cálculos con las medidas de los lados y los ángulos del de un triángulo.

### *¿Qué es un ángulo?*

Ángulo es el área que recorre una semirrecta cuando gira sobre su origen.

### *¿Existen sistemas de medición angular?*

Si, los más usados son Sistema Sexagesimal y Sistema Radial (o Circular).

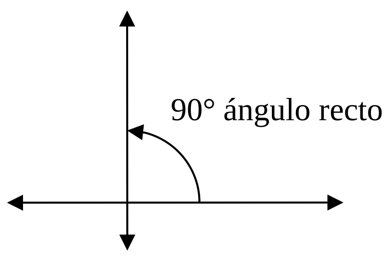
**Sistema Sexagesimal**

La unidad de medida es el grado sexagesimal.
Un ángulo de 1 grado (1°) es la noventava parte de un ángulo recto. Esto es

$$1° = \frac{\acute{a}ngulorecto}{90}$$

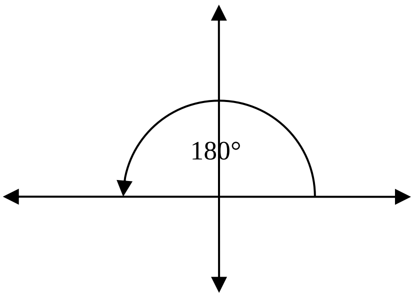
De acuerdo con la definición tenemos:

$$\underline{\text{Ángulo recto}} = 1° \times 90 = 90°$$

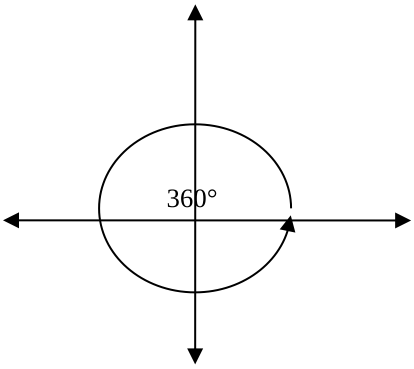



$$\underline{\text{Ángulo Llano}} = \text{2 ángulos rectos} = 2 \times 90° = 180°$$

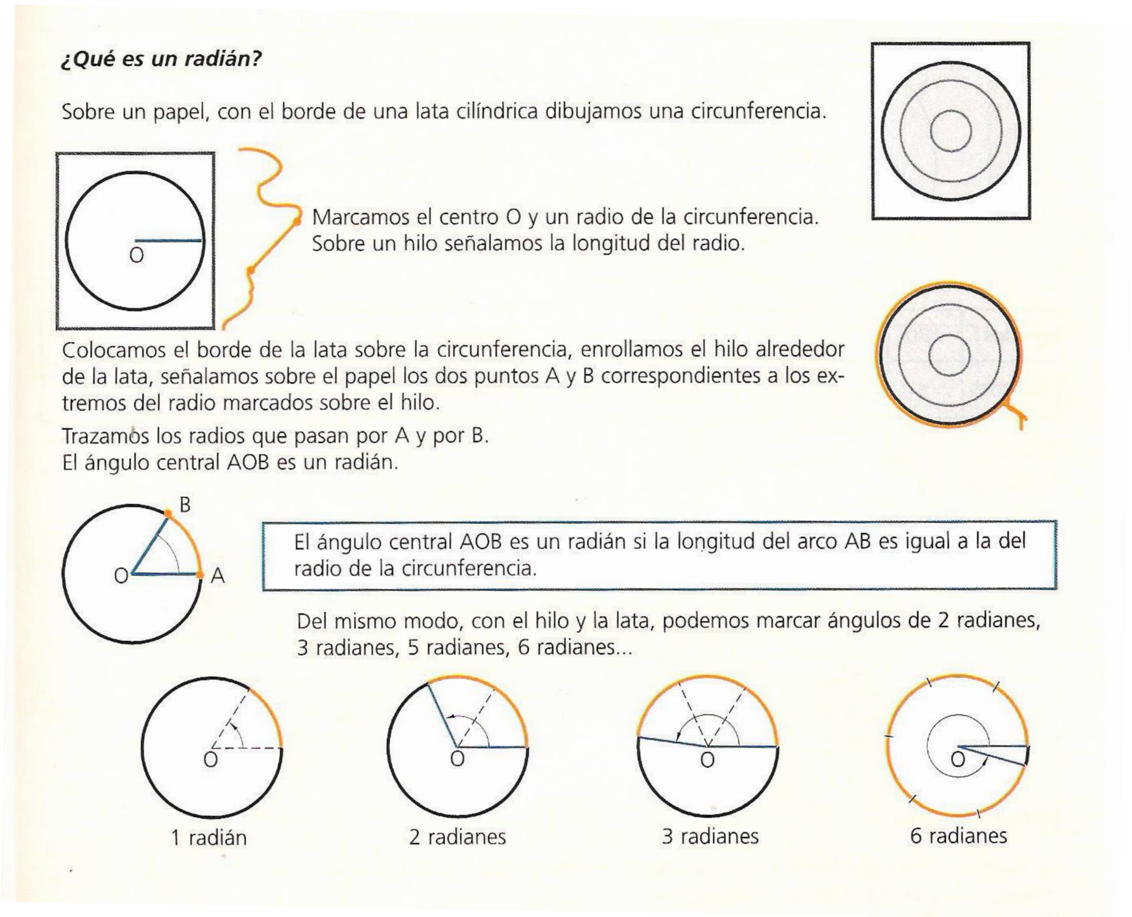
**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**




<u>Ángulo de un giro</u> = 2 ángulos llanos = $2 \times 180° = 360°$




**Sistema Radial o Circular**



***¿Qué es un radián?***

Sobre un papel, con el borde de una lata cilíndrica dibujamos una circunferencia.

Marcamos el centro O y un radio de la circunferencia.
Sobre un hilo señalamos la longitud del radio.

Colocamos el borde de la lata sobre la circunferencia, enrollamos el hilo alrededor de la lata, señalamos sobre el papel los dos puntos A y B correspondientes a los extremos del radio marcados sobre el hilo.

Trazamos los radios que pasan por A y por B.
El ángulo central AOB es un radián.

El ángulo central AOB es un radián si la longitud del arco AB es igual a la del radio de la circunferencia.

Del mismo modo, con el hilo y la lata, podemos marcar ángulos de 2 radianes, 3 radianes, 5 radianes, 6 radianes...

> Por lo tanto la **unidad** de medida del **sistema radial** es el **radián**, que es el ángulo cuyo arco coincide con la longitud del radio de la circunferencia.

Observación: En las calculadoras científicas además del modo DEG (degree = grado), encontrarás otros modos para medir ángulos, uno de ellos es el modo RAD, cuya unidad es el radián.

> **herramientas**
> Para ingresar en la calculadora científica el valor de los ángulos en radianes, oprimí la tecla MODO y elegí la opción RAD.

## Relación entre grados y radianes

En la circunferencia, al arco de longitud igual al radio $r$ corresponde el ángulo de 1 radián. Por lo tanto, a la circunferencia que tiene longitud $2\pi r$ corresponde el ángulo $2\pi$ radianes.
Como el ángulo de giro completo es $360°$: $360° = 2\,\pi radianes$

## Transformación del Sistema Sexagesimal al Radial

$$\frac{360°}{\alpha°} = \frac{2\pi\ radianes}{x\ radianes} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha° \cdot 2\,\pi\ rad}{360°} = \frac{2\,\pi\,\alpha}{360} radianes$$

**Ejemplo**: $\alpha° = 1°$

$$\frac{360°}{1°} = \frac{2\pi\ radianes}{x\ radianes} \quad \Rightarrow \quad \frac{1° \cdot 2\,\pi\ rad}{360°} = \frac{\pi}{180°} radianes$$

Expresemos en radianes el ángulo $\alpha = 25{,}3°$.
Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, de manera que aparezcan los grados en el denominador:

$$25{,}3° \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = \frac{25{,}3\pi}{180} = 0{,}44\ \text{rad}$$

## Transformación del Sistema Radial al Sexagesimal

$$\frac{360°}{\alpha°} = \frac{2\pi\ radianes}{x\ radianes} \quad \Rightarrow \quad \frac{360° \cdot x\ rad}{2\pi\ rad} = \frac{180°\ x}{\pi}$$

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

**Ejemplo**: $x = 1radián$

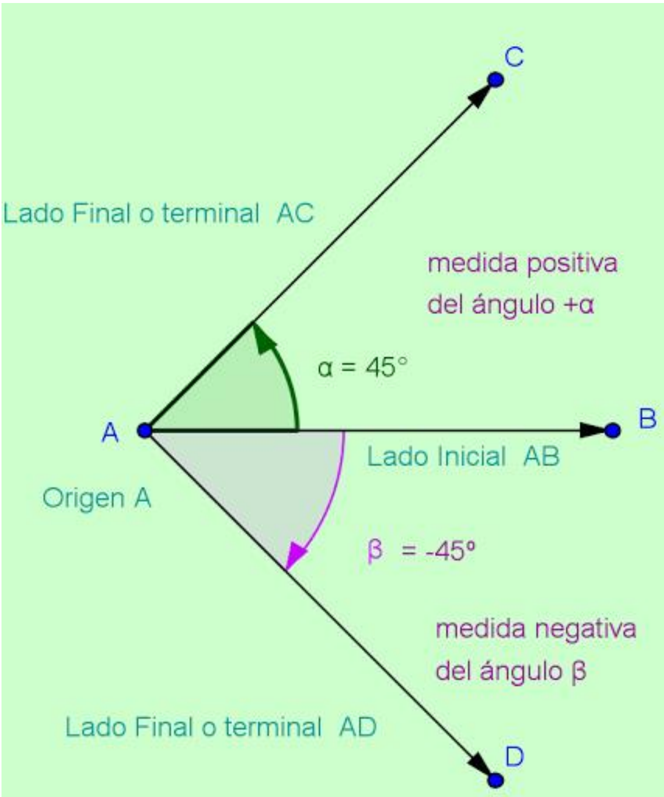
$$\frac{360°}{\alpha°} = \frac{2\pi\, radianes}{1\, radian} \quad \Rightarrow \quad \frac{360°{\cdot}1\, rad}{2\pi\, rad} = \frac{180°}{\pi} \cong 57°17'44''$$

## Ángulos orientados.

En Trigonometría es importante la orientación o sentido que tienen los ángulos. La misma está determinada por la dirección en que gira uno de sus rayos, mientras el otro permanece fijo.

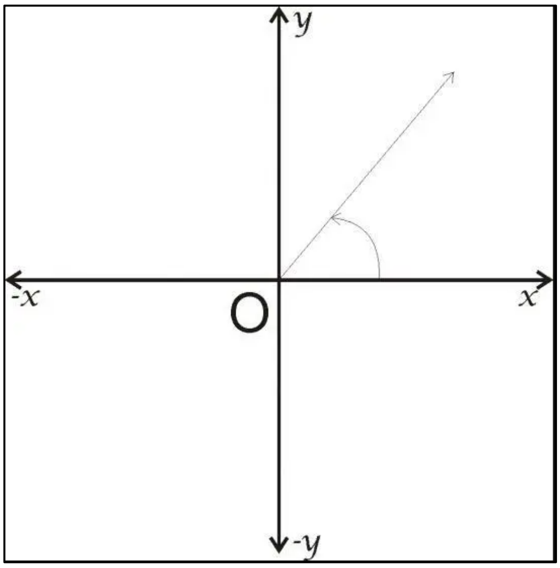
Se considera ángulo positivo al que gira en sentido contrario al giro de las agujas del reloj. Mientras que se denomina ángulo negativo cuando gira en el mismo sentido. Y alternativamente, se denominan sentido antihorario u horario, en cada caso.

Dependiendo del cuadrante en que se halle el lado terminal de un ángulo se dice que este ángulo es del cuadrante I, II, III o IV.



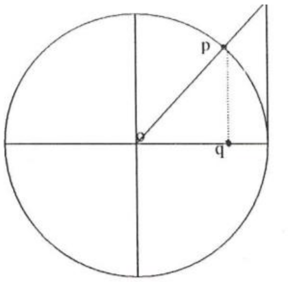

Se llama ángulo centrado a todo ángulo orientado con vértice 0; es decir que coincida con el origen de un sistema de ejes cartesianos.

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**




**Funciones trigonométricas definidas en la circunferencia trigonométrica**

Consideremos la circunferencia $C\ (0, r)$ con centro en el origen de coordenadas y radio unitario $\boldsymbol{r = 1}$. A esta circunferencia se la llama **Circunferencia Trigonométrica**.




- Marcar un punto $p\ \in\ \mathrm{C}\ (0,\mathrm{r})$ en el primer cuadrante.
- Trazar una perpendicular por p al eje *x* y llamar q al punto de intersección.
- Dibujamos la tangente a la circunferencia por el punto t = (1,0).
- Extendemos el segmento 0p hasta cortar la tangente en el punto s.

Queda así determinados cuatro segmentos:

$\overline{0p} = r\ ;\qquad \overline{0q}\quad ;\quad \overline{pq}\quad ;\quad \overline{ts}$

Llama $\alpha$ al ángulo determinado por el eje *x* y el radio $\overline{0p}$. A los coeficientes que se pueden definir entre estos segmentos se los define como “**Funciones Trigonométricas**”:

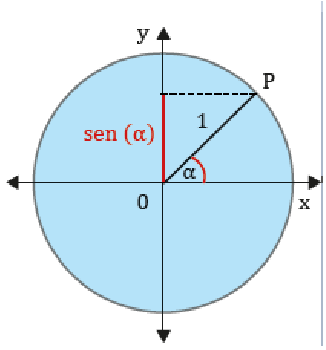
$$sen\ \alpha = \overline{\mathrm{pq}} \qquad cos\ \ \alpha = \overline{0\mathrm{q}} \qquad tg\ \alpha = \overline{\mathrm{ts}}$$

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

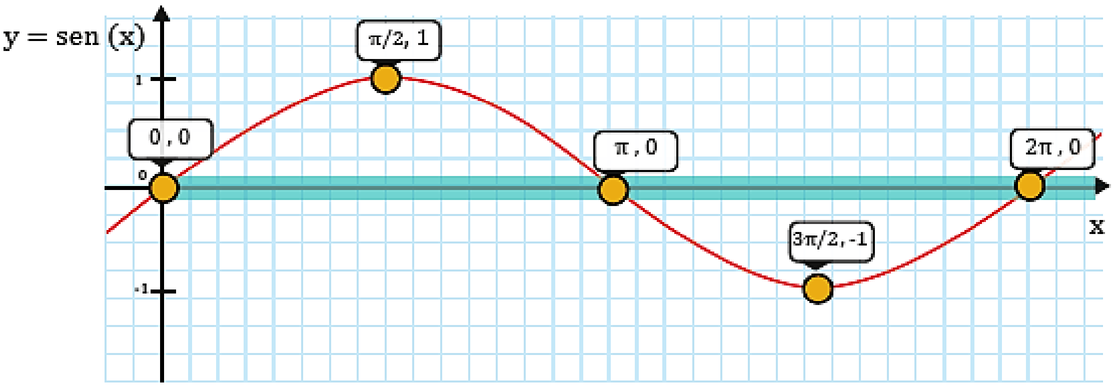
# Gráfica de la curva trigonométrica seno

Función seno

La función que asigna a la variable independiente $x$ (x es α en radianes en la siguiente tabla) el valor $f(x) = sen\ (x)$ se llama función seno.




| Valores de X Radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de X (grados) | 0 ° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| $f(x)$= sen x | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | - 1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| (x, sen (x) | $\{(0,0);\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{\pi}{2},1\right)\left(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)(\pi,0);\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}\right);\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{3\pi}{2},-1\right);\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{11\pi}{6},\frac{1}{2}\right);(2\pi,0)\}$ | | | | | | | | | | | | |




**Características de la función trigonométrica seno**

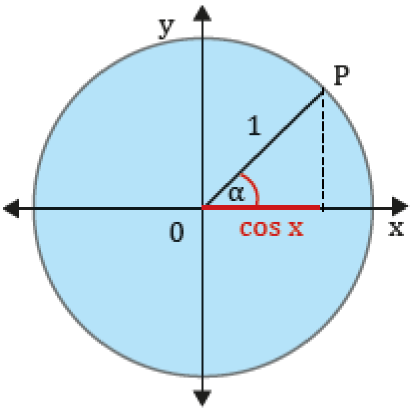
A continuación, describimos las características de la función seno definido por:

$$f(x) = sen(x)$$

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

| |
|---|
| $\text{sen} : x \mapsto f(x) = \text{sen}\,(x)$ |
| Dominio: Los números reales |
| Recorrido: [- 1; 1] |
| Intersecciones con el eje horizontal x: (0 ,0), ($\pi$ ,0), (2$\pi$ ,0)... |
| Intersecciones con el eje vertical y: (0, 0) |
| Es una función continua. |
| La función es simétrica con respecto al origen. |
| No presente asíntotas. |
| No es una función inyectiva. |
| No es una función sobreyectiva. |
| Máximo relativo: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ |
| Mínimo relativo: $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ |

Función Coseno




La función que asigna a la variable independiente $x$ (x es α en radianes en la siguiente tabla) el valor $f(x) = cos\,(x)$ se llama función coseno.

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

| Valores de $X$ Radianes | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $X$ (grados) | $0°$ | $30°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $150°$ | $180°$ | $210°$ | $240°$ | $270°$ | $300°$ | $330°$ | $360°$ |
| $f(x) = \cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| (x,cos(x)) | $\{(0,1); \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); (\pi,-1); \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{11\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (2\pi,1)\}$ | | | | | | | | | | | | | |

Representación gráfica de la función coseno en el intervalo (0;2π)

Tabla 4.

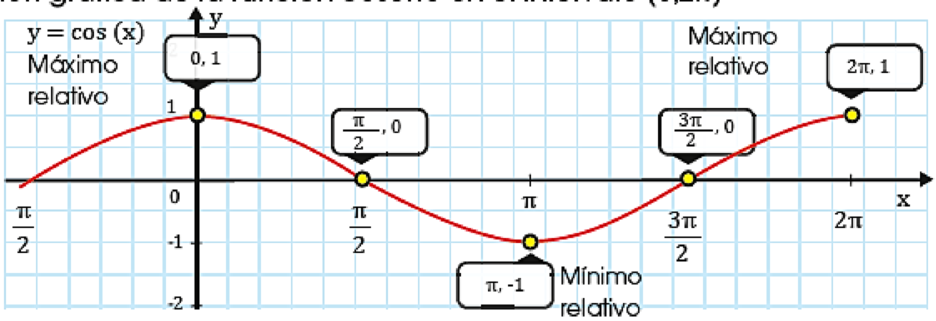



Fig. 7.

## Características de la función trigonométrica coseno

A continuación, describimos las características de la función coseno definido por:

$$f(x) = cos(x)$$

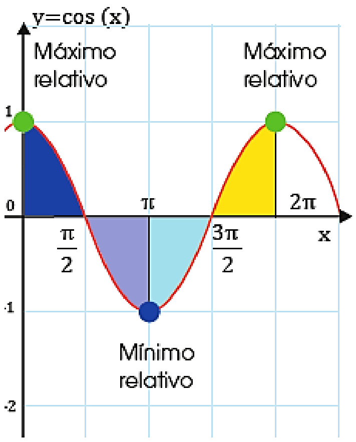



Fig. 8.

Características de la función trigonométrica coseno

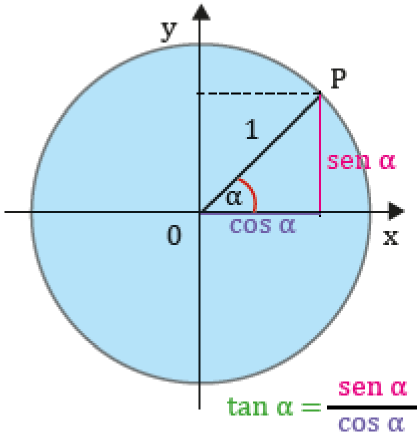
| |
|---|
| $\cos: x \mapsto f(x) = \cos(x)$ |
| Dominio: Los números reales |
| Recorrido: $[-1; 1]$ |
| Intersecciones con el eje x: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ ... |
| Intersecciones con el eje y: $(0, 1)$ |
| Es una función continua. |
| La función es simétrica con respecto a la recta, $x=0$ o con respecto al eje y. |
| No presente asíntotas. |
| No es una función inyectiva. |
| No es una función sobreyectiva. |
| Máximo relativo: $(0, 1)$ y $(2\pi, 1)$, ... |
| Mínimo relativo: $(\pi, -1)$, ... |

Tabla 5.

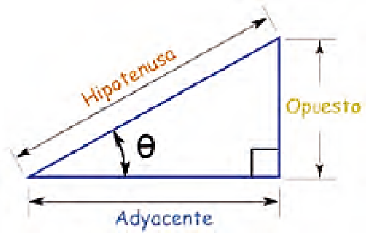
**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

Función Tangente

La función que asigna a la variable independiente $x$ (x es α en radianes en la siguiente tabla) el valor $f(x) = tan(x)$ se llama función tangente.

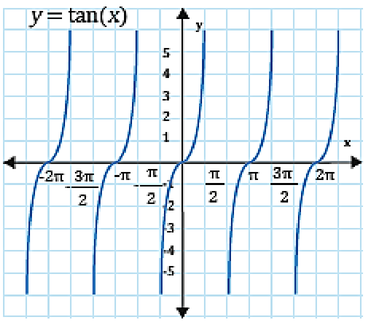



| Valores de $X$ Radianes | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $X$ (grados) | $0°$ | $30°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $150°$ | $180°$ | $210°$ | $240°$ | $270°$ | $300°$ | $330°$ | $360°$ |
| $f(x)= \tan x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | N.D. | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ | N.D | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| (x, tan(x)) | $\{(0,1);\left(\frac{\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right);\left(\frac{\pi}{2},\text{N.D.}\right);\left(\frac{2\pi}{3},-\sqrt{3}\right);\left(\frac{5\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);(\pi,0);$ $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\left(\frac{4\pi}{3},\sqrt{3}\right);\left(\frac{3\pi}{2},\text{N.D.}\right);\left(\frac{5\pi}{3},-\sqrt{3}\right);\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);(2\pi,0)\}$ | | | | | | | | | | | | |




- Recordemos que:

$$\tan\theta = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$$




Características de la función trigonométrica tangente en el intervalo $[0, 2\pi]$

| |
|---|
| $\tan: x \mapsto f(x) = \tan(x)$ |
| Dominio: $\mathbb{R}- \{\pi/2 + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\}$ |
| Recorrido: Los reales |
| Intersecciones con el eje x: $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$ |
| Intersecciones con el eje y: $(0, 0)$ |
| Es una función continua en los reales salvo en los punto en los que no está definida. |
| La función es simétrica con respecto al origen. |
| Presenta asíntotas en los puntos $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ |
| No es una función inyectiva. |
| No es una función sobreyectiva. |
| No posee máximos ni mínimos relativos. |
| Es estrictamente creciente en todo su dominio. |

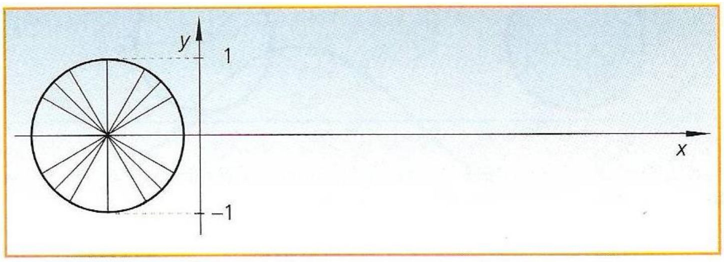
**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

## Funciones Trigonométricas: Interpretaciones de sus Gráficas

<u>La función seno</u> ($y = sen\ \ \alpha$)

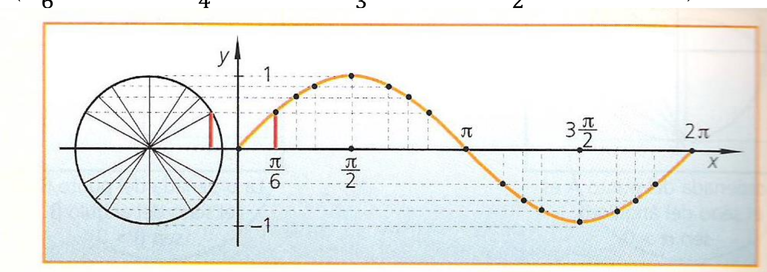
1) En la circunferencia trigonométrica marcamos un radio horizontal y, a partir de él, en sentido antihorario (+), señalamos los ángulos de:

0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 330°, 360°




2) Marque el segmento representativo de la función seno para cada ángulo.
3) Llevamos sobre el eje x los valores de los ángulos en radianes. Con calculadora hallamos las expresiones decimales de: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, etc.

Esto es: $\left( \frac{\pi}{6} \cong 0{,}52\ ,\ \ \frac{\pi}{4} \cong 0{,}79\ \ ,\ \frac{\pi}{3} \cong 1{,}05\ \ ,\ \frac{\pi}{2} \cong 1{,}57\ \ldots\ \right)$




Al punto del eje **x** correspondiente al valor del ángulo en radianes se le asigna el valor del seno del ángulo, representado por la ordenada del punto de la circunferencia de radio 1 que le corresponde. Esto es:

| $x$ | $y = sen\ x$ |
|---|---|
| $30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$ | |
| $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$ | |
| $60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$ | |
| $90° \left(\frac{\pi}{2}\right)$ | |

**historia**

El astrónomo griego **Hiparco** (siglo II a.C.) fue el primero que, al confeccionar una *tabla de cuerdas*, se anticipó a las modernas *tablas trigonométricas*. Más tarde, **Ptolomeo** perfeccionó la tabla de Hiparco, pero fueron los hindúes quienes inventaron el concepto de seno de un ángulo.

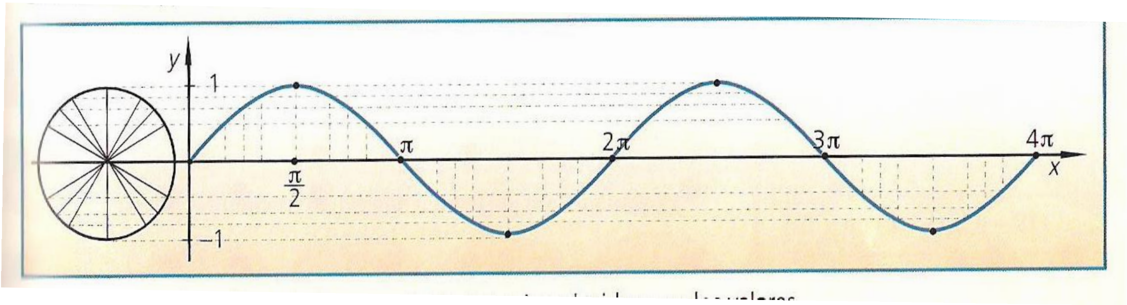
Observe la gráfica y responda:

- ¿Cuál es la variable independiente?

**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

- ¿Cuál es la variable dependiente?
- Determine dominio e imagen.($f:\Re \rightarrow \Re$ y $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$)
- El máximo valor de *sen x* es ………… y se alcanza para *x*=………..
- El mínimo valor de *sen x* es ……………y se alcanza par *x*=………..
- *sen x* crece para ……………… y para…………………..
- *sen x* decrece para ………………………………

Graficamos $f(x) = sen\, x$ para $0 < x < 4\pi$




Se observa que los valores de *sen x* para $2\pi < x < 4\pi$ coincide con los valores de $sen\, x$ para $0 < x < 2\pi$.

**Conclusión**: Por esto decimos que la **función seno** es **periódica** y su periodo es $2\pi$, que es el ciclo a partir del cual las imágenes comienzan a repetirse; verifican la igualdad:

$$senx = sen(x + 2\pi)$$

Además la función seno es impar porque cambia de signo al sustituir *x* por –*x*:

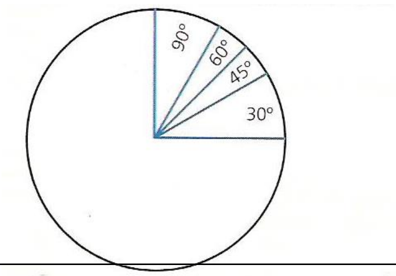
$$sen(-x) = -senx$$

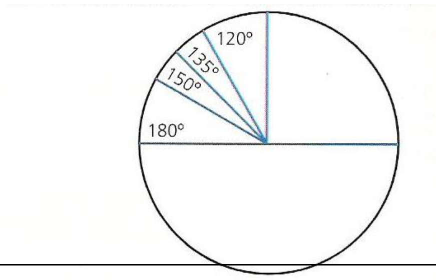
**Ejercicios**

**1.** Complete las siguientes tablas.

| Grados | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | | | | | |

| Grados | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ |

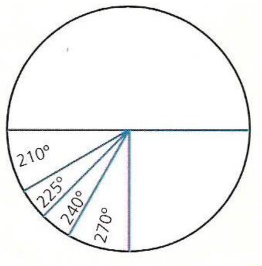


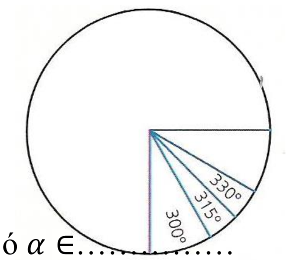



**Colegio Santo Domingo**
**Ciclo Orientado Sociales**
**Matemática**
**Primer Cuatrimestre**

| Grados | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | | | | | |

| Grados | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |




**2.** A que cuadrante pertenece el ángulo si:

1) $sen\ \alpha < 0$ entonces $\alpha \in$.............. ó $\alpha \in$..............

2) $cos\ \ \alpha > 0$ entonces $\alpha \in$.............. ó $\alpha \in$..............

3) $tg\ \alpha < 0$ entonces $\alpha \in$.............. ó $\alpha \in$..............

4)

$$\begin{cases} sen\alpha < 0 \\ \ \ y \\ cos\,\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha \in \text{.....................}$$

5)

$$\begin{cases} sen\alpha > 0 \\ \ \ y \\ cos\,\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha \in \text{.....................}$$

**3.** Represente en un sistema de ejes cartesianos, con color negro la función $y = sen\alpha$ (**curva matriz**), $y = 2 \cdot sen\alpha$ (rojo), $y = 3 \cdot sen\alpha$ (verde), $y = -2 \cdot sen\alpha$ (azul) e $y = -3 \cdot sen\alpha$ (marrón)

a) Dé el dominio, imagen y período de cada una de ellas.

**Conclusión: En general $\boldsymbol{y = b \cdot \mathrm{sen}\ \alpha}$**

**Si $b > 1$ ¿Qué diferencia de la curva matriz?**

**……………………………………………………………………………………………**

**Si $b < 0$ ¿Qué diferencia de la curva matriz?**

**……………………………………………………………………………………………**

b) Represente en un sistema de ejes cartesianos, con color negro la función $y = sen\alpha$ (**curva matriz**), $y = sen\ 2\alpha$ (rojo), $y = sen\ 3\alpha$ (verde), $y = sen\ \frac{1}{2}\alpha$ (azul) e $y = sen\ \frac{1}{3}\alpha$ (marrón).

c) Dé el dominio, imagen y período de cada una de ellas.

**Conclusión: En general $\boldsymbol{y = \mathrm{sen\ k} \cdot \alpha}$**

**Si $k > 1$ ¿Qué diferencia de la curva matriz?**

**……………………………………………………………………………………………**

**Si $0 < k < 1$ ¿Qué diferencia de la curva matriz?**

**……………………………………………………………………………………………**

Trabaje de forma análoga para las funciones: $y = \cos\alpha$ , $y = \tan\alpha$.

**4.** Represente la función $y = 2 + sen\ x$ y la función $y = cos\ (2x)$. Determinar dominio, imagen y periodo.

**5.** Represente la función $y = sen\ (x + 2)$ y $y = tan\ (x + 2)$ Determinar dominio, imagen y periodo.