Unidad Nº 4: FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática o de segundo grado es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a \neq 0$.

Su representación gráfica es una **parábola** que tiene distintas posiciones según las expresiones algebraicas de estas funciones.

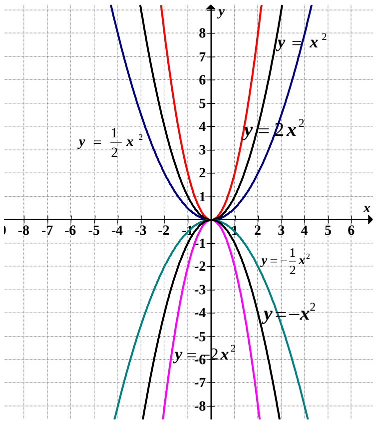
Formas incompletas de la función cuadrática

a) $f(x) = ax^2 \longrightarrow b = 0$ y $c = 0$

b) $f(x) = ax^2 + c \longrightarrow b = 0$

c) $f(x) = ax^2 + bx \longrightarrow c = 0$

a) Gráficos de parábolas de ecuación $y = ax^2$



$f(x) = ax^2$ siendo $b = 0$ y $c = 0$

Si $a > 0$ abre hacia arriba

Si $a < 0$ abre hacia abajo

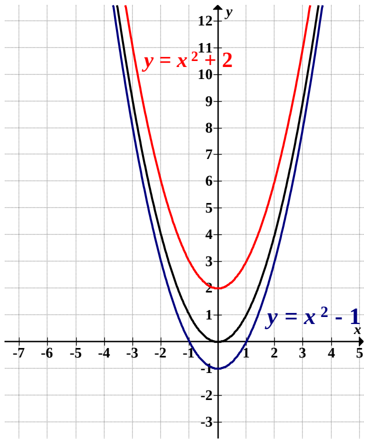
Eje de simetría: el eje “ y”

Coordenadas del vértice $(0; 0)$

Dom $= \mathbb{R}$

Im $= (0; \pm\infty)$

b) Gráficos de la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$



$f(x) = ax^2 + c$ siendo $b = 0$

Si $a > 0$ abre hacia arriba

Si $a < 0$ abre hacia abajo

Eje de simetría: el eje “ y”

Coordenadas del vértice $(0; c)$

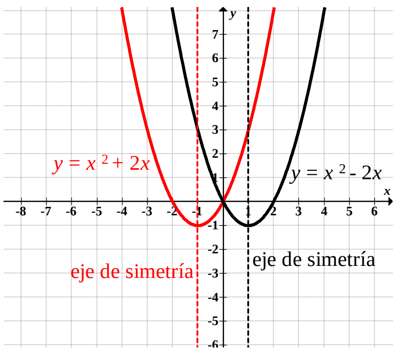
Si $c > 0$ se desplaza hacia arriba

Si $c < 0$ se desplaza hacia abajo

Dom $= \mathbb{R}$

Im $= (c; \pm\infty)$

c) Gráficos de parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx$



$f(x) = ax^2 + bx$ siendo $c = 0$

Si $a > 0$ abre hacia arriba

Si $a < 0$ abre hacia abajo

Eje de simetría: $x_v = \frac{-b}{2a}$

Coordenadas del vértice $V = \left(\frac{-b}{2a}; f(x_v)\right)$

Si a y b tienen el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia la izquierda

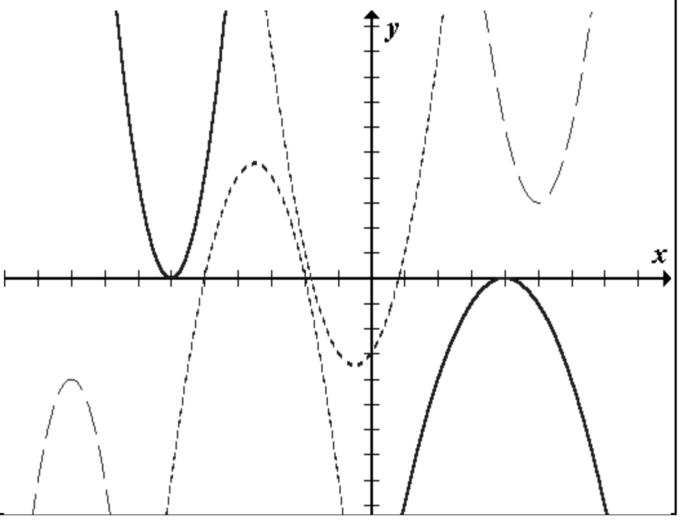
Si a y b tienen distintos signo, la gráfica se desplaza hacia la derecha

Dom $= \mathbb{R}$

Im $=$ (Vértice; $\pm\infty$)

Puede ocurrir que la parábola tenga contacto con el *eje x* en dos puntos, o en un solo punto, o bien que no tenga contacto. Las abscisas de los puntos de contacto son las **raíces reales** o **ceros** de la función. Si no tiene ningún contacto con el *eje x*, la función no tiene raíces reales.

- Las funciones representadas en líneas.......... tienen dos **raíces reales distintas**.
- Las funciones representadas en líneas.......... tienen un solo punto en común con el *eje x*, que coincide con el .... de la parábola. Decimos que tiene **una raíz doble**.
- Las funciones representadas en líneas.......... no tienen contacto con el *eje x*, es decir, no tienen **raíces reales**.



Para hallar los **ceros** de una función $f(x)$, hay qué buscar las abscisas de los puntos cuya ordenada es cero.

Para ello, planteamos $\boldsymbol{f(x) = 0}$ y despejamos, si es posible, los valores de x que verifican la ecuación.

CONSTRUCCIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para realizar el gráfico de la función $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, se debe calcular los elementos de la misma y luego representarla:

a) Hallamos sus raíces (puntos de contacto con el eje x) aplicando la fórmula, conocida como “fórmula resolvente”.

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Calculamos la abscisa del vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

c) Calculamos la ordenada del vértice.

$$y_v = f(x_v) = a(x_v)^2 + bx_v + c$$

$$V = (x_v; y_v) \rightarrow \text{ coordenadas del vértice}$$

d) Determinemos el eje de simetría.

$$x = x_v$$

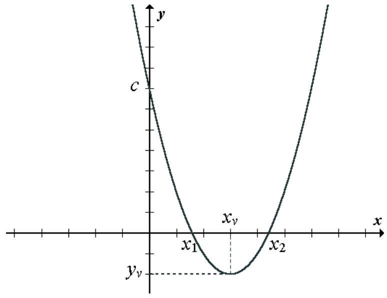
e) Calculamos la ordenada al origen que es la imagen del cero (recuerda que es la ordenada del punto de intersección de la curva con el eje de las y).

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$f(0) = c$$

f) Con los puntos que obtuvimos, hacemos la tabla de valores, los marcamos y trazamos la gráfica aproximada.

x	y
x_1	0
x_2	0
x_v	y_v
0	c



Ejemplo:

Grafica la función: $f(x) = x^2 + 2x - 8$

a) Hallamos sus raíces, aplicando la fórmula resolvente:

$a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad c = -8$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{36}}{2} = \dfrac{-2 - 6}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{36}}{2} = \dfrac{-2 + 6}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$x_1 = -4$

$x_2 = 2$

b) Calculamos la abscisa del vértice.

$$x_v = \frac{-2}{2 \cdot 1}$$
$$x_v = -1$$

c) Calculamos la ordenada del vértice.

$$y_v = f(-1) = 1(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8$$
$$y_v = -9$$
$V = (-1; -9) \rightarrow$ coordenadas del vértice

d) Determinemos el eje de simetría.

$$x = -9$$

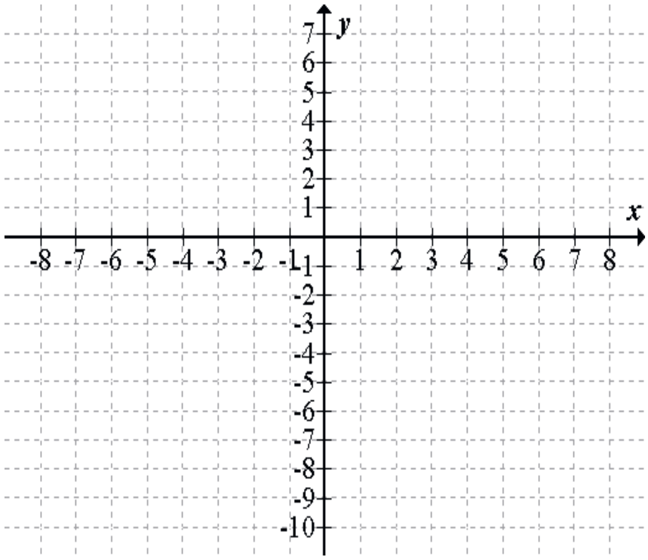
e) Calculamos la ordenada al origen que es la imagen del cero (recuerda que es la ordenada del punto de intersección de la curva con el eje de las *y*).

$$f(0) = 1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 8$$
$$f(0) = -8$$

f) Tabla de valores

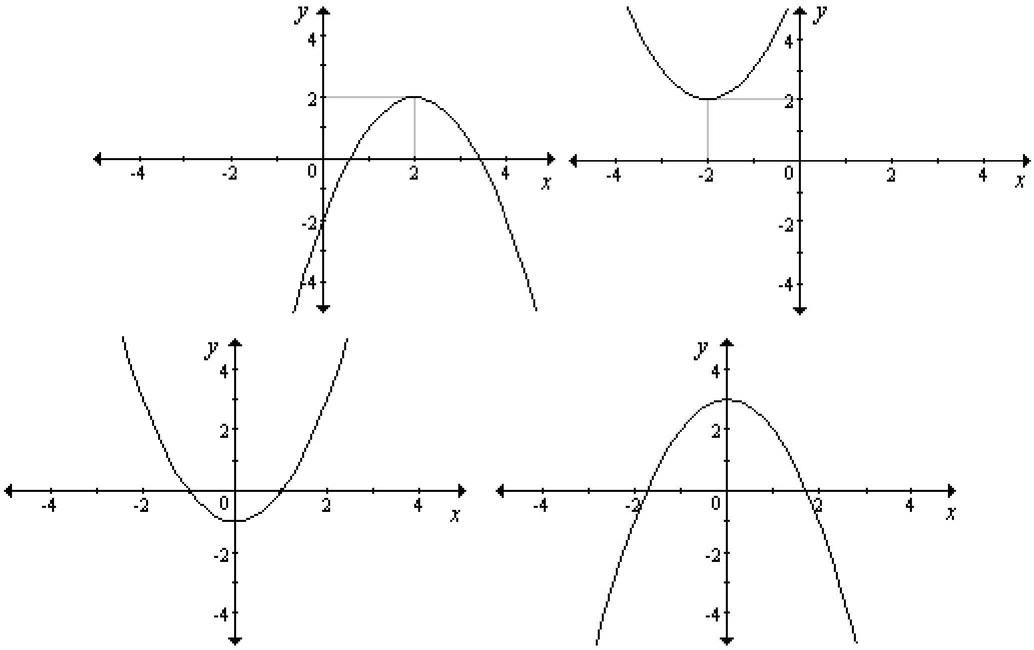
	x	$y = x^2 + 2x - 8$	
$x_1 \rightarrow$	_____	0	
$x_2 \rightarrow$	_____	0	
$x_v \rightarrow$	-1	_____	$\rightarrow y_v$
	0	_____	$\rightarrow$ ordenada al origen
	1	_____	

g) Gráfico



ACTIVIDADES

1. Para cada una de las siguientes parábolas, identifica las coordenadas del vértice, los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.



2. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, completa la tabla de valores, representa la curva y señala en el gráfico el vértice y el eje de simetría.

a) $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	y
0	
2	
4	
-2	
-4	

b) $y = x^2 - 4$

x	y
0	
1	
2	
-1	
-2	

c) $y = -x^2 + 4$

x	y
0	
1	
2	
-1	
-2	

d) $y = (x - 1)^2$

x	y
0	
1	
2	
3	
-1	

3. a) Completa las tablas de valores y representa cada función en el gráfico con distintos colores.

x	$y = x^2$	$y = x^2 + 1$	$y = (x+2)^2$	$y = x^2 - 2$	$y = (x-1)^2$	$y = (x-3)^2 - 4$
0						
1						
2						
-1						
-2						

b) Analiza los gráficos y completa:

Función	Dominio	Imagen	a	b	c	Raíces	Vértice	Eje de simetría	Ordenada al origen
$y = x^2$									
$y = x^2 + 1$									
$y = (x+2)^2$									
$y = x^2 - 2$									
$y = (x-1)^2$									
$y = (x-3)^2 - 4$									

4. Completar las siguientes oraciones correspondientes a la gráfica de $y = -3x^2 + x + 2$
   a) Los coeficientes de los términos de la función son: $a =$, $b =$ y $c =$.
   b) El vértice de la parábola es el punto:
   c) El eje de simetría de la parábola es la recta:
   d) La ordenada al origen de la función es el punto:
   e) Las raíces de la función son $x_1 =$ $x_2 =$

ECUACIÓN POLINÓMICA, CANÓNICA Y FACTORIZADA

La función cuadrática puede ser expresada de distintas maneras.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	a, b, c
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$	a, x_v, y_v
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	a, x_1, x_2

Para pasar de la **forma polinómica** a la **forma canónica**: se busca las coordenadas del vértice

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

El vértice y el eje de simetría se reconocen con facilidad.

Recordar:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Para pasar de la **forma polinómica** a la **forma factorizada**: se buscan las raíces

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Las raíces se identifican en forma inmediata.

Para pasar de la **forma canónica** a la **forma polinómica**: se desarrolla el cuadrado de un binomio

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para pasar de la **forma factorizada** a la **forma polinómica**: se aplica la propiedad distributiva

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ejemplo: Expresar $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$, a la forma canónica y factorizada:

Calculemos las raíces

$$a = -2 \qquad b = -8 \qquad c = -6$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)} =$$

$$x_1, x_2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-4} =$$

$$x_1 = \frac{8 + \sqrt{16}}{-4} = \frac{8+4}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

$$x_2 = \frac{8 - \sqrt{16}}{-4} = \frac{8-4}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

Encontramos la coordenada del vértice

$$\boldsymbol{x_v} = \frac{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}}{2} \rightarrow \boldsymbol{x_v} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$\boldsymbol{x_v} = -2 \rightarrow$ abscisa del vértice

$$\boldsymbol{y_v} = -2 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 6 = -2 \cdot 4 + 16 - 6 = -8 + 16 - 6 = 2$$

$\boldsymbol{y_v} = 2 \rightarrow$ ordenada del vértice

$$\mathrm{V} = (-2, 2)$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -2(\boldsymbol{x} - (-2))^2 + 2$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -2(\boldsymbol{x} + 2)^2 + 2$ forma canónica

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -2(\boldsymbol{x} - (-1)) \cdot (\boldsymbol{x} - (-3))$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -2(\boldsymbol{x} + 1) \cdot (\boldsymbol{x} + 3)$ forma factorizada

Propiedades de las raíces de la función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo $f(x) = 0$, las raíces son x_1 y x_2

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo: Reconstruir la ecuación polinómica en función de sus raíces.

$$x_1 = -3 \text{ y } x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = -3 + 2 \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = (-3) \cdot 2$$

$$= -1 = -\frac{b}{a} \rightarrow b = 1 \qquad\qquad = -6 = \frac{c}{a} \rightarrow c = -6$$

Ecuación reconstruida $f(x) = x^2 + 1x - 6$

ACTIVIDADES

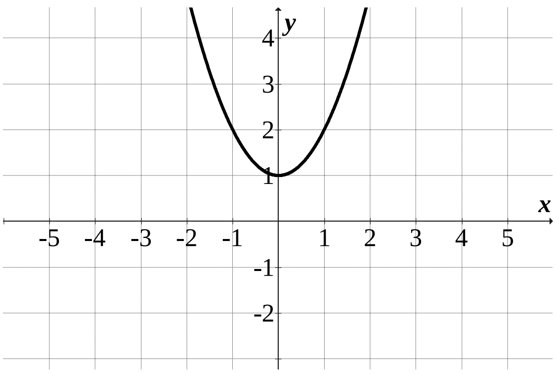
1) Analizar las distintas formas de la función cuadrática, ¿qué se puede visualizar en cada una de ellas?
   a) En la forma factorizada, ¿Qué datos se observa?
   b) En la forma canónica, ¿qué datos se obtienen?
   c) Completar el siguiente cuadro:

Función	Forma	Coordenadas del vértice	Raíces
$y = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$			
$y = (x + 4)^2 - 2$			
$y = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$			
$y = 5 \cdot (x - 3)^2$			

2) Escribir en forma canónica: $y = x^2 + 4x - 3$
3) Escribir en forma factorizada: $y = 4x^2 - 9x + 2$

Revisión Final de todo lo visto

1) Un niño tira una piedra verticalmente hacia arriba. La relación que existe entre el tiempo y la altura, está dada por la fórmula: $y = -4{,}9\ t^2 + 14{,}7\ t$ (t en segundos, y en metros)
   a. ¿Cuándo alcanza la piedra la máxima altura?
   b. ¿Cuál es esa altura?
2) Los distintos niveles de altura que alcanza un delfín, en función del tiempo durante un salto, se pueden calcular mediante la siguiente expresión:
   $y = 12x - 3x^2$ donde y es la altura del delfín
   x es el tiempo que dura el salto
   a) ¿Cuál es la duración del salto?
   b) ¿Cuánto tarda en alcanzar la altura máxima?
   c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
   d) A los 3 minutos ¿a qué altura se encuentra el delfín?
   e) Graficar aproximadamente la función.
3) La función cuya gráfica está representada es:
   a) $y = x^2$
   b) $y = x^2 + 1$
   c) $y = -x^2$
   d) $y = x^2 + 2x + 1$



4) La gráfica de la función $y = (x + 5) \cdot (x - 3)$ interseca al eje de las abscisas en:
   a) Dos puntos
   b) Un punto
   c) Ningún punto
   d) (0; 0)
5) Una de las raíces de la función $y = (x + 2)^2 - 1$ es $x_1 = -1$. La otra raíz es:
   a) 3
   b) 4
   c) – 3
   d) – 4
6) ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la parábola que gráficamente representa a la función $y = x^2 - 5x + 6$?
   a) (– 1; 10)
   b) (– 4; 2)
   c) (2; 0)
   d) (– 2; 2)
7) ¿Cuál debe ser el valor de "k" para que la parábola que representa gráficamente a la función $f(x) = x^2 - 2x + k$ pase por el punto P = (2; 5)?