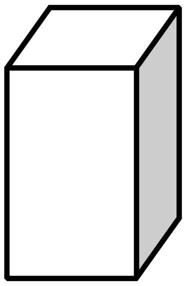
Unidad N° 3: Expresiones Algebraicas. Polinomios. Operaciones

Trabajamos juntos en el siguiente problema:

En una fábrica se debe construir un depósito subterráneo para instalar en él un tanque de combustible. Hay tres modelos de tanques: chico, mediano y grande. Cada uno de ellos requiere un depósito de forma cubica de arista igual a 1 metro, 2 m, y 3 m respectivamente.

El depósito debe quedar enterrado en el suelo. Su parte superior, que es descubierto, estará al ras de la tierra. Su piso y sus cuatro paredes se cubrirán con placas de fibrocemento, y todas las junturas entre esas panchas irán selladas con unos listones especiales de hierro.



La fábrica dispone de $450.000 para construir el depósito.

Los costos son los siguientes: $40.000por metro cúbico excavado, $12.000 por metro cuadrado de plancha de fibrocemento y $4.000 por metro lineal de listón de hierro. Además, hay que agregar un gasto fijo de $17.000 en concepto de flete.

a) ¿Cuál es el depósito más grande que puede construirse con ese presupuesto?
b) ¿Es posible determinar una expresión matemática que permita calcular el costo de la construcción del depósito en cualquiera de los tamaños posibles?

Expresiones Algebraicas

Las expresiones algebraicas enteras son expresiones matemáticas que combinan letras con números o letras solas vinculadas por las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y potencias con exponente entero positivo.

Ejemplos:

a) $\sqrt{x} + 3x^2$ b) $\dfrac{1}{x^2 - 2} + 2^4$ c) $x^4 + 2x^2 - 3x$,

En una expresión algebraica los números se llaman **coeficientes**, y las letras **variables** o indeterminadas.

coeficientes $\Rightarrow$ $\mathbf{2}\ \underbrace{\boldsymbol{x^2 y}}_{\text{variables o indeterminadas}}$ **coeficientes** $\Rightarrow$ $\mathbf{\frac{1}{3}}\ \underbrace{\boldsymbol{a^3 bc}}_{\text{variables o indeterminadas}}$

“Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**”

Clasificación de los polinomios

Según su cantidad de términos, un polinomio se denomina:

Monomio: si tiene un solo término $\boldsymbol{6x^3}$
Binomio: si tiene dos términos $2x + 3x^2$
Trinomio: si tiene tres términos $0{,}5 + 5x - 3x^5$
Cuatrinomio: si tiene cuatro términos $4x^5 + 2x^4 - 3 + x$
Si tienen más de cuatro términos se les llama simplemente polinomios.

A los polinomios los nombraremos con letras mayúsculas y entre paréntesis indicaremos la variable.

Ejemplos:

$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$ $\qquad Q(z) = \frac{2}{3}z^4 + z$ $\qquad T(y) = -2y^5$

Polinomios Semejantes (Monomios)

Dos monomios son semejantes si los términos tienen la misma variable y el mismo exponente.

Características de un polinomio

- Se denomina **grado** de un polinomio al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.
- Se llama **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.
- Al polinomio cuyo coeficiente principal es uno se lo denomina **normalizado**. Si éste polinomio es además de grado uno se lo denomina **polinomio mónico**.
- Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.
- Un polinomio está **completo** si tiene todas las potencias decrecientes del grado. Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan, con coeficiente cero.
- El término que no tiene variable se denomina **término independiente**.

Nota: nosotros trabajaremos siempre con los polinomios ordenados en forma decreciente

Ejemplos:

$P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$

$\boldsymbol{P(x) = 3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 5}$ completo y ordenado en forma decreciente

Gr ($P(x)$)= 4

coef ppal.: 3

t.indep.= 5

$\boldsymbol{Q(x) = -6x^3 + \frac{1}{3}x^5 - 7x}$

$\boldsymbol{Q(x) = \frac{1}{3}x^5 + 0x^4 - 6x^3 + 0x^2 - 7x + 0}$ completo y ordenado

Gr ($P(x)$)= 5

coef ppal.: $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$

t.indep.= 0

Polinomios Opuestos

Decimos que un polinomio es opuesto a uno dado si los signos de éste son opuestos al anterior.

Ejemplo:

$$P(x) = -4x^3 + 2x^2 - x - 7$$
$$-P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 7$$

Operaciones con polinomios

Adición y sustracción de polinomios

Para sumar o restar polinomios, se suma o resta sus términos semejantes.

Para sumar o restar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

Ejemplo:

$A(x) = -6x + 4x^3 - 3x^2 + 1$

$B(x) = 5x^2 - 9 + 2x + x^3$

$$\begin{array}{rl} & A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1 \\ + & \\ & B(x) = \underline{x^3 + 5x^2 + 2x - 9} \end{array}$$

$A(x) + B(x) = 5x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

Para restar dos polinomios, se procede igual que en la suma, sumándole al minuendo el opuesto del sustraendo.

$A(x) - B(x) = A(x) + \big(-B(x)\big) = (4x^3 - 3x^2 - 6x + 1) + (-x^3 - 5x^2 - 2x + 9) =$

minuendo **sustraendo**

$$\begin{array}{rl} & A(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1 \\ + & \\ & B(x) = \underline{-1x^3 - 5x^2 - 2x + 9} \end{array}$$

$A(x) - B(x) = 3x^3 - 8x^2 - 8x + 10$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se debe aplicar la propiedad distributiva y el producto de potencias de igual base ($x^n \cdot x^m = x^{n+m}$).

$2x^3 \cdot (3x^2 - 4x - 5x^3 + 2) = 2x^3 \cdot 3x^2 - 2x^3 \cdot 4x - 2x^3 \cdot 5x^3 + 2x^3 \cdot 2 =$

$= 6x^5 \quad - \quad 8x^4 \quad - \quad 10x^6 \quad + 4x^3$

$= -10x^6 + 6x^5 - 8x^4 + 4x^3$

$(5x - 2x^2) \cdot (-x^2 + 3x) = 5x \cdot (-x^2) + 5x \cdot 3x - 2x^2 \cdot (-x^2) - 2x^2 \cdot 3x$

$= -5x^3 \quad + \ 15x^2 \ + \quad 2x^4 \quad - 6x^3$ operamos los monomios semejantes

$= 2x^4 - 11x^3 + 15x^2$

Productos Notables

Hay ciertos productos que aparecen frecuentemente en el cálculo algebraico y son los llamados "productos notables".

- **Producto de la suma de dos términos por su diferencia**

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos. Esto es:

$$(a+b)\cdot(a-b)=\underbrace{a^2-b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}$$

Demostración:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b=a^2-b^2$$

Aplicamos propiedad distributiva

Ejemplo:

$$(x+4)\cdot(x-4)=x^2-4^2=x^2-16$$

$$(x^2+5)\cdot(x^2-5)=(x^2)^2-5^2=x^4-25$$

- **Cuadrado de un binomio**

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}}=\underbrace{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}$$

Al elevar un binomio al cuadrado, se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto.**

- **Cubo de un binomio**

$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}}=\underbrace{a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

Al elevar un binomio al cubo, se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto.**

Para resolver cuadrados y cubos de un binomio, se debe tener en cuenta dos propiedades.

$$(a\cdot x)^n=a^n\cdot x^n \qquad (x^n)^m=x^{n\cdot m}$$

Ejemplos: Calcular:

a) $(x^2+5)^2=$

Identificamos correctamente quien es *a* y *b*

$a=x^2$

$b=5$

Luego aplicamos la regla

$$(x^2+5)^2=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 5+5^2$$ Resolvemos y aplicamos las propiedades

$$=x^4+10x^2+25$$

b) $(3 - x^3)^3 =$

Identificamos correctamente quien es a y b

$a = 3$

$b = -x^3$

Luego aplicamos la regla

$$(3 - x^3)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (-x^3) + 3 \cdot 3 \cdot (-x^3)^2 + (-x^3)^3$$ Resolvemos y aplicamos las propiedades

$$= 27 + 3 \cdot 9 \cdot (-x^3) + 9 \cdot x^6 - x^9$$

$$= 27 - 27 x^3 + 9 x^6 - x^9$$

División de polinomios

Para **dividir dos monomios**, se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$x^m : x^n = x^{m-n}$

$(10x^3) : (5x) = (10 : 5)(x^3 : x) = 2x^2$ $\qquad$ $(-10x^8) : (3x^5) = (-10 : 3)(x^8 : x^5) = -\frac{10}{3}x^3$

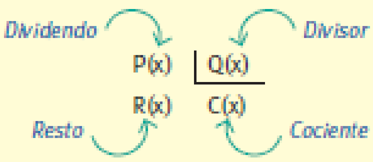
Para dividir **un polinomio por un monomio**, se aplica la propiedad distributiva.

$(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$

$$(12x^6 + 36x^4 - 6x^3 + 42x) : (-6x) = 12 : (-6)(x^6 : x) + 36 : (-6)(x^4 : x) - 6 : (-6)(x^3 : x) + 42 : (-6)(x : x)$$
$$= -2x^5 - 6x^3 + x^2 - 7$$

Para dividir **dos polinomios**, se deben cumplir las siguientes condiciones.

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.
- El polinomio divisor debe estar ordenado en forma decreciente.



$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Dados $\begin{cases} P(x) = 2x - 5 + 4x^4 \\ Q(x) = -2x + x^2 \end{cases}$ hallar $P(x) : Q(x)$.

El dividendo debe estar completo y ordenado: $P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x - 5$

El divisor debe estar ordenado: $Q(x) = x^2 - 2x$

$4x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x - 5 \quad | \ x^2 - 2x$

$4x^2 \cdot (x^2 - 2x) \longrightarrow -(4x^4 - 8x^3)$ $\qquad$ $4x^2 + 8x + 6 \longrightarrow$ *Cociente: C(x)*

$0x^4 + 8x^3 - 10x^2$

$8x \cdot (x^2 - 2x) \longrightarrow -(8x^3 - 16x^2)$

$0x^3 + 6x^2 + 0x$

$6 \cdot (x^2 - 2x) \longrightarrow -(6x^2 - 12x)$

$0x^2 + 12x - 5$

$4x^4 : x^2 = 4x^2$

$8x^3 : x^2 = 8x$

$6x^2 : x^2 = 6$

Resto: R(x)

Se termina la cuenta porque el grado es menor que el grado del divisor.

$C(x) = 4x^2 + 8x + 6$ $\qquad$ $R(x) = 12x - 5$

Regla de Ruffini y Teorema del resto

La **regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio P(x) por otro cuya forma sea $x + a$.

Dados $P(x) = 2x^3 + 3x - 1$ y $Q(x) = x + 2$ hallar $P(x) : Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

Dividendo $\quad$ *Divisor*

El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado**. → $2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \qquad x + 2$

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo. →

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

	2	0	3	−1
−2		−4	8	−22
	2	−4	11	−23

Cálculos auxiliares
$(-2).2 = -4$
$(-2).(-4) = 8$
$(-2).11 = -22$

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**. → $\underbrace{C(x) = 2x^2 - 4x + 11}_{\text{Cociente}} \qquad \underbrace{R(x) = -23}_{\text{Resto}}$

$(3x^3 - 2x^2 - 2) : (x - 1)$

$3x^3 - 2x^2 + 0x - 2$ → *Dividendo*

	3	−2	0	−2
1		3	1	1
	3	1	1	$\boxed{-1}$

Cociente → $3x^2 + 1x + 1$

Resto → -1

$(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16) : (x + 4)$

$-x^5 + 0x^4 + 12x^3 - 15x^2 + 0x - 16$ → *Dividendo*

	−1	0	12	−15	0	−16
−4		4	−16	16	−4	16
	−1	4	−4	1	−4	$\boxed{0}$

Cociente → $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + x - 4$

Resto → 0

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$ es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.

Dados $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2$ y $Q(x) = x - 1$

El resto de la división $P(x) : Q(x)$ *se obtiene:*

$P(1) = 3.(1)^3 - 2.(1)^2 - 2$

$P(1) = 3 - 2 - 2 = -1$

El resto de la división es -1.

Dados $P(x) = -x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16$ y $Q(x) = x + 4$

El resto de la división $P(x) : Q(x)$ *se obtiene:*

$P(-4) = -(-4)^5 + 12.(-4)^3 - 15.(-4)^2 - 16$

$P(-4) = 1024 - 768 - 240 - 16 = 0$

El resto de la división es 0.

ACTIVIDADES

1) Completar la siguiente tabla:

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Polinomio completo y ordenado	Polinomio opuesto
$-11x+x^3+6$					
					$-0{,}5x^4+3x-2x^2$
					$-x^2-9$
	1	11	-6		
$\mathbf{-2+2x^5-x}$					

2) Resolver las siguientes operaciones

a) $P(x)=-3+2x^2-5x^3+x^4$

$Q(x)=-9x^3+x^2+x-1$

$P(x)+Q(x)=$

b) $R(x)=2x^2+x-2$

$T(x)=-x+2-5x^3$

$R(x)+T(x)=$

c) $M(x)=2x^2+x-2$

$N(x)=x^2+1$

$M(x)-N(x)=$

d) $A(x)=-2x+3x^2-\frac{1}{2}x^3-1$

$C(x)=3x-5x^2-x^4+2$

$A(x)-C(x)=$

3) Dados los polinomios:

$P(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-2x+4$

$Q(x)=2x^3-3x-2$

$R(x)=2x^4+3x^3+x-1$

Calcular: a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $P(x)+Q(x)-R(x)$

d) $P(x)-Q(x)+R(x)$

4) Resolver los siguientes productos de polinomios:

a) $x^3\cdot\left(x^2-x+1\right)=$

b) $\left(2x^3-x+1\right)\cdot\left(x^2+x-2\right)=$

c) $\left(-\frac{2}{3}x+x^3\right)\cdot\left(2x-3x^2+1\right)=$

5) Resolver los siguientes producto de la suma de dos términos por su diferencia

a) $(x+3)\cdot(x-3)=$

b) $\left(3x^2-2\right)\cdot\left(3x^2+2\right)=$

c) $\left(-\frac{1}{2}x^2+7x\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2-7x\right)=$

6) Desarrollar las siguientes potencias

a) $(3+x)^3=$

b) $(x+2)^2=$

c) $(2x-1)^2=$

d) $(x-1)^3=$

7) Resolver aplicando la regla de Ruffini.

a) $(2x^3 + 2x + 5 + 3x^2):(x+1) =$

b) $(x^2 - 10x + 20):(x-8) =$

c) $(2 + 3x^4 - x^5):(x-3) =$

8) Calcular el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 + 4x^2 + x + 5):(x-2) =$

b) $(2x^3 + x^2 - 18x - 7):(x-3) =$

c) $(1 - x^3):(x-1) =$

9) Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios.

a) Si $P(x) = 9x^2 - 6x - 5$ $\quad P(1) =$ $\quad P(0) =$

b) Si $Q(x) = x^3 - 23x - 28$ $\quad Q(-4) =$ $\quad Q(4) =$

c) Si $R(x) = x^5 - 32$ $\quad R(2) =$ $\quad R\left(\frac{1}{2}\right) =$

d) Si $S(x) = 2x^3 - 3$ $\quad S(-1) =$ $\quad S\left(\frac{1}{3}\right) =$

10) Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, responda verdadero o falso según corresponda.

a) $x = 0$ es raíz de $P(x)$

b) $x = 2$ es raíz de $R(x)$

c) $Q(-4) = Q(4)$

d) $x = -4$ es raíz de $Q(x)$

11) Dado el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x + 16$ calcule el valor numérico para $x = 1, 2, 0$ y -1 ¿Es alguno de estos valores raíz de $P(x)$?

12) Dado los polinomios.

$M(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ $\quad P(x) = 2x^2 - x^3 + 5x^4 - 1$ $\quad Q(x) = -x^2 + 2x - 3$

$R(x) = 5x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ $\quad S(x) = x^2 - 4$ $\quad T(x) = 2x - 4$

Calcular:

a) $P(x) + R(x) =$

b) $M(x) - Q(x) =$

c) $Q(x) - R(x) =$

d) $P(x) - [R(x) + Q(x)] =$

e) $3 \cdot M(x) - 5Q(x) =$

f) $Q(x) \cdot S(x) =$

g) $T(x) \cdot S(x) - M(x) =$

h) $P(x) \cdot T(x) =$

i) $M(x) \cdot S(x) =$

Revisión Final de todo lo visto

1) Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.
   a) $16x + x^{-1}$
   b) $\sqrt{3}x^2 - 5$
   c) $\sqrt[5]{x^2} - 9$
   d) $\frac{2}{3}x^2 + 5x - 2$
   e) $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$
   f) $x^{10} - \frac{x}{5}$
2) Indicar el grado de cada uno de los siguientes polinomios.
   a) $3x^2 - 2x - x^4$
   b) $x^3 - 2^7 \cdot x^5$
   c) $-x^3 + 6 + 0x^5$
   d) $x + 3^3$
3) Escribir un polinomio que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.
   a) Binomio de grado 2:
   b) Trinomio de grado 3:
   c) Monomio de grado 6:
   d) Cuatrinomio de grado 5:
4) Clasificar, indicar el grado, ordenar decrecientemente y completar los siguientes polinomios.
   a) $x^3 - 1$:
   b) 2^5x:
   c) $3x^2 - 5x + 9$:
   d) $1 - x$:
   e) $x^3 + 5x - 6x^2 + 1$:
   f) $2x - 0x^4$:
5) Dado el polinomio $\boldsymbol{A(x) = 3x^4 + 2x^2 - 0,5x + 6}$ completar.
   a) ¿Cuál es el coeficiente principal? ……………………………………………
   b) ¿Cuál es el término independiente?...
   c) El grado de $\boldsymbol{A(x)}$ es:……………………………………………………..
   d) ¿Es $\boldsymbol{A(x)}$ un polinomio ordenado creciente?..
   e) ¿Es $\boldsymbol{A(x)}$ un polinomio completo?...
   f) Expresar $\boldsymbol{A(x)}$ completo y ordenado decreciente………………………………
   g) Según el número de términos no nulos que tiene $\boldsymbol{A(x)}$, se denomina…………………
6) Colocar una X en el cuadro que corresponda, clasificar, e indicar el grado de los siguientes polinomios.

Polinomios	Ord. Creciente	Ord. Decreciente	Desordenado	Completo	Incompleto	Clasificación	Grado
$\boldsymbol{2x^3 - 3}$							
$\boldsymbol{-x + x^2 - 1}$							
$\boldsymbol{0x^4 + 0x^3 + 0}$							
$\boldsymbol{-7}$							
$\boldsymbol{5 - 2x}$							

7) Calcular el valor numérico de los siguientes polinomios.

a) Si $\boldsymbol{P(x) = -3x^2 + 2x - 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(-2)} =$ $\qquad$ $\boldsymbol{P(0)} =$

b) Si $\boldsymbol{Q(x) = x^3 - 3x - 2}$ $\qquad$ $\boldsymbol{Q(-1)} =$ $\qquad$ $\boldsymbol{Q(2)} =$

8) Resolver los siguientes productos notables.

a) $(2 + x)^2 =$

b) $(x + 5) \cdot (x - 5) =$

c) $(z + 1)^2 =$

d) $(3x^2 - 2)(3x^2 + 2) =$

e) $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) =$

f) $(x + 1)^3 =$

g) $\left(1 + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right) =$

9) Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomio aplicando la Regla de Ruffini.

a) $(-x^4 - 2x^3 + 5 - x^2) : (x - 4) =$

b) $(3x^4 - 6x + 3) : (x + 1) =$

c) $(2x^5 - 2x^3 + x^2 + 6) : (x - 1) =$

d) $(2 + 3x^4 - x^5) : (x - 3) =$

e) $(2x^3 - 5x^2 + 5x - 1) : (x - 2) =$

10) Calcular el resto de las siguientes divisiones.

a) $(x^3 + 4x^2 + x + 5) : (x - 2) =$

b) $(5x^2 + 3x - 2) : (x + 2) =$

c) $(3x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x + 1) =$

d) $(2x^3 + x^2 - 18x - 7) : (x - 3) =$

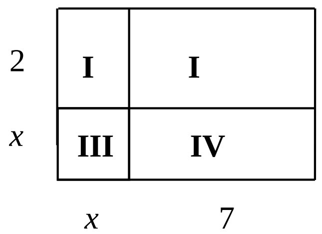
e) $\left(3x^3 - 12x^2 + 4x + \frac{1}{2}\right) : (x + 3) =$

f) $(1 - x^3) : (x - 1) =$

11) Calcular el área de la figura de dos modos diferentes.

a) La figura total.

b) La adición de la figuras I, II, III y IV.



12) ¿Cuál es la expresión de la altura del rectángulo, si su área se expresa con $\boldsymbol{A(x) = 4x^2 + 18x + 18}$?