Unidad N° 2: Función Lineal.

Concepto de función.

Una función es una relación entre dos variables, en la cuál a cada valor de la variable independiente (x) le corresponde siempre un único valor de la variable dependiente (y).

A las funciones se las puede representar mediante una tabla, un gráfico, diagrama de Venn y en algunos casos también mediante una fórmula.

Función Lineal.

Una función lineal es aquella cuya representación gráfica es una recta.

La fórmula general de una función lineal es $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$, también llamada ecuación explicita de la recta, donde a y b son números reales, llamados pendiente y ordenada al origen, respectivamente.

$$\underbrace{\boldsymbol{y = a}}_{\text{pendiente}} \boldsymbol{\cdot x +} \boldsymbol{b} \longrightarrow \text{ordenada al origen}$$

La ordenada al origen es el valor donde la recta corta al eje y.

EJEMPLOS: Representa gráficamente las siguientes funciones lineales por medio de tablas.

$a) y = 2.x - 1$ $\qquad$ $b) y = \frac{-1}{3}.x$

ACTIVIDAD:

1) Representa gráficamente por medio de tablas las siguientes funciones lineales y responde.
   $a)\ y = -2.x + 3$ $\qquad$ $b)\ y = \ -2.x - 2$
   c) ¿Cómo son las rectas graficadas?
   d) ¿Qué condición deben cumplir?

2) Grafique por medio de tablas las siguientes funciones lineales y responda.
   $a) y = -3.x - 1$ $\qquad$ $b) y = \frac{1}{3}.x + 1$
   c) ¿Cómo son las rectas graficadas?
   d) ¿Qué condición deben cumplir para que lo sean?

3) Dadas las siguientes funciones lineales, represéntalas gráficamente por medio de tablas.
   $a) y = \frac{1}{2}.x + 2$ $\qquad$ $b) y = \ -x + 3$
   $c) y = 2.x + 1$ $\qquad$ $d) y = \frac{1}{4}.x$
   $e) y = x$ $\qquad$ $f) y = x - 2$

4) Del ejercicio 3, a las funciones del apartado a) y c) calcúlales una paralela y una perpendicular. Luego las gráficas por medio de tablas.

Representación gráfica de funciones lineales por pendiente y ordenada al origen.

Como ya se vio antes la representación gráfica de una función lineal es una recta, donde la ordenada al origen es el valor donde la recta corta al eje *y*, esto es $f(0) = b$.

El valor de la pendiente determina que una función lineal sea creciente, constante o decreciente, es decir:

- Si $a > 0$ es creciente
- Si $a = 0$ es constante
- Si $a < 0$ es decreciente.

Para graficar una función lineal por pendiente y ordenada al origen, se debe marcar la ordenada al origen (*b*) en el eje *y*, a partir de ella, representar un par de valores cuyo cociente sea igual al valor de la pendiente (*a*).

Ejemplos: Graficar las siguientes funciones lineales y analizarlas.

a) $y = \frac{1}{3}x - 3$

b) $y = -\frac{5}{2}x + 1$

ACTIVIDAD:

1) Representar las siguientes funciones a partir de la ordenada al origen y la pendiente. Analizar.

a) $y = \frac{1}{2}x$

b) $y = x$

c) $y = -\frac{1}{4}x$

d) $y = -x + 1$

e) $y = -x + 2$

f) $y = \frac{2}{3}x - 1$

g) $y = -\frac{1}{4}x + 3$

h) $y = 3x + 3$

Posiciones de dos rectas en el plano.

Dos rectas en un plano pueden ser **paralelas** (//), **perpendiculares** (⊥) u **oblicuas** (∠).

Las rectas son:

- **Paralelas**, cuando tienen la misma pendiente.

$$\begin{cases} y_1 = m_1 x + b_1 \\ y_2 = m_2 x + b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y_1 // y_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m_1 = m_2}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} y_1 = 2x + 3 \\ y_2 = 2x - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y_1 // y_2}$$

- **Perpendiculares**, cuando sus pendientes son números inversos y opuestos.

$$\begin{cases} y_1 = m_1 x + b_1 \\ y_2 = m_2 x + b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y_1 \perp y_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} y_1 = 3x - 2 \\ y_2 = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y_1 \perp y_2}$$

- **Oblicuas**, cuando sus pendientes no cumplen ninguna de las condiciones anteriores.

Se puede hallar la ecuación **explícita** de una recta si se conoce algunos datos.

Ecuación de la recta conocida la pendiente y un punto

- ✓ La pendiente m y un punto $(x_1;\ y_1)$ de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta de pendiente 3 y que pasa por (5; – 2).

$$y - (-2) = 3(x - 5)$$

$$y + 2 = 3(x - 5)$$

$$y + 2 = 3x - 15$$

$$y = 3x - 17$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

- ✓ Dos puntos $(x_1;\ y_1)$ y $(x_2;\ y_2)$ de la recta.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1; 2)$ y $(-3;\ -4)$.

$$\frac{y - 2}{-4 - 2} = \frac{x - (-1)}{-3 - (-1)}$$

$$\frac{y - 2}{-6} = \frac{x + 1}{-2}$$

$$-2(y - 2) = -6(x + 1)$$

$$-2y + 4 = -6x - 6$$

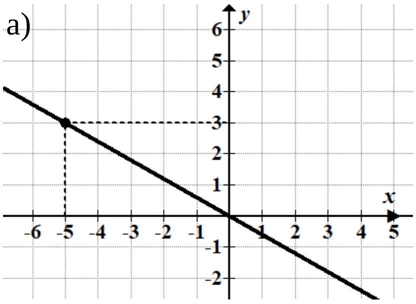
$$y = \frac{-6x - 10}{-2}$$

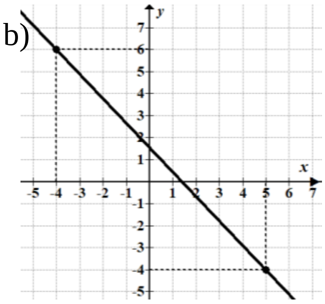
$$y = 3x + 5$$

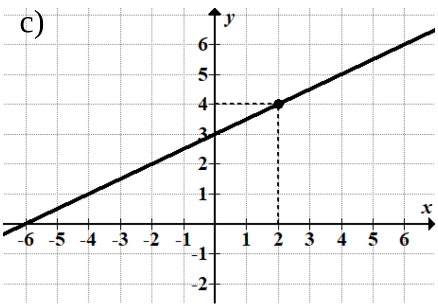
Actividades:

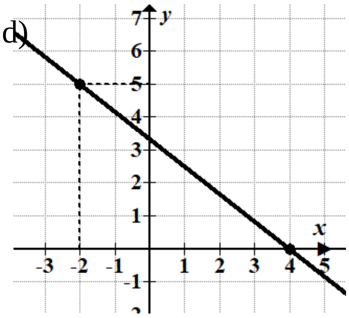
1) Decidir si los puntos $(4;\ -5), (-2; 4)$ y $(2;\ -2)$ pertenecen a la misma recta.
2) Para cada uno de los tres casos dados, deduzcan la forma simplificada de la ecuación de la recta dada la pendiente ***m*** y la ordenada al origen ***b***
   a) ***m*** = 2; ***b*** = – 2
   b) ***m*** = $-\frac{1}{2}$; ***b*** = 0
   c) ***m*** = 3; ***b*** = 1

3) Hallar la ecuación explícita de cada recta a partir del gráfico.

a)


b)


c)


d)


4) La ecuación de la recta que pasa por (3; 2) con pendiente 3 es

   a) $2x - 3y = 5$
   b) $x + y = 7$
   c) $3x - y = 7$
   d) $4x - y = -2$

5) Hallar la ecuación explícita y colocar //, ⊥ o ∠ según corresponda.

   a) $\begin{cases} \frac{y_1+2x}{3} = 1 \\ 2x + y_2 - 3 = 0 \end{cases}$ $\qquad y_1 \dots\dots\dots . y_2$

   b) $\begin{cases} \frac{y_1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3y_2-2x}{3} = 1 \end{cases}$ $\qquad y_1 \dots\dots\dots . y_2$

   c) $\begin{cases} 4y_1 + x = 4 \\ \frac{y_2-2x}{2} = x - 1 \end{cases}$ $\qquad y_1 \dots\dots\dots . y_2$

   d) $\begin{cases} \frac{x+3y_1}{3} - x = 0 \\ \frac{y_2}{2} + \frac{2}{3}x = x - 1 \end{cases}$ $\qquad y_1 \dots\dots\dots . y_2$

6) Dada la ecuación $y = \frac{1}{3}x - 2$

   a) Determinar si $4y = \frac{4}{3}x - 16$ es paralela a la anterior.
   b) Graficarlas.

7) Hallar la ecuación explícita de la recta que cumpla con cada condición.

   a) Paralela a la recta $3y - x = 6$ y que pase por el punto $(-3; 1)$.
   b) Perpendicular a la recta $2y + 5x = 2$ y que pase por el punto $(15; -4)$.

8) Determinar el gráfico que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2x + 3$

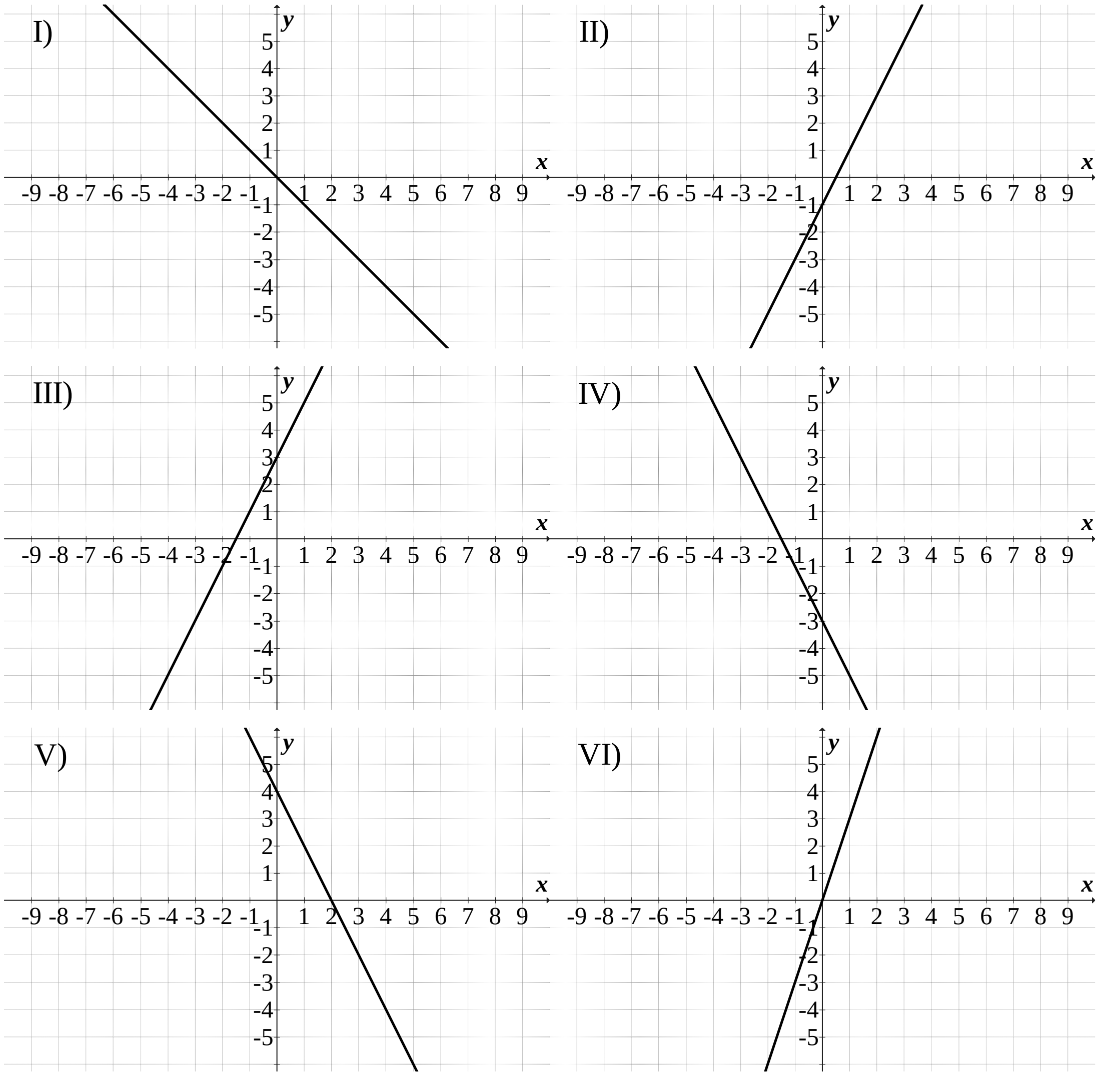
b) $y = 3x$

c) $y = -2x - 3$

d) $y = 2x - 1$

e) $y = -x$

f) $y = -2x + 4$



9) Dada la recta A de ecuación $y = \frac{1}{2}x + 3$ escribir otras rectas que satisfagan las condiciones indicadas en cada caso:

a) Recta B // A que pase por el origen de coordenadas.

b) Recta C // A con ordenada al origen igual a – 2 .

c) Recta D $\perp$ A de ordenada al origen igual a 5.

d) Representar las cuatro rectas en un único gráfico.

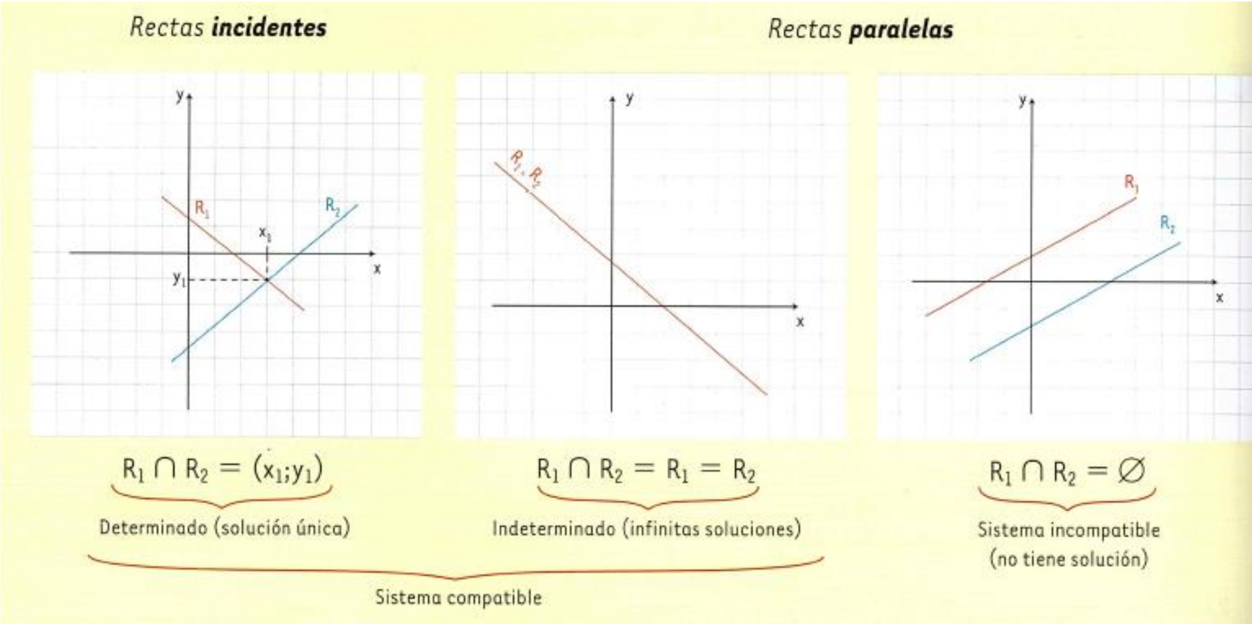
Sistemas de Ecuaciones Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representa dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas (conjunto solución).

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Dos rectas en un plano pueden ser **incidentes** (tienen un punto en común) o **paralelas** (no tienen ningún punto en común o son coincidentes).

Los sistemas se clasifican en **compatibles** e **incompatibles**, según tengan o no solución; los sistemas compatibles pueden ser **determinados** o **indeterminados**, según tengan una o infinitas soluciones.

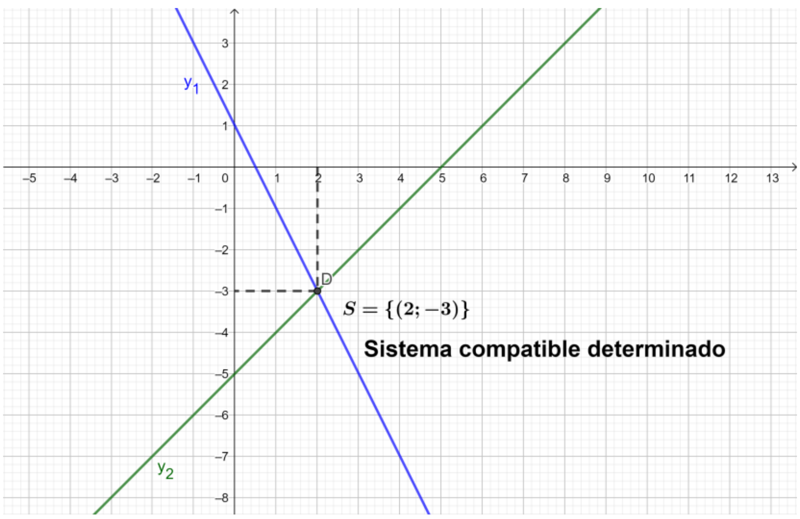


Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

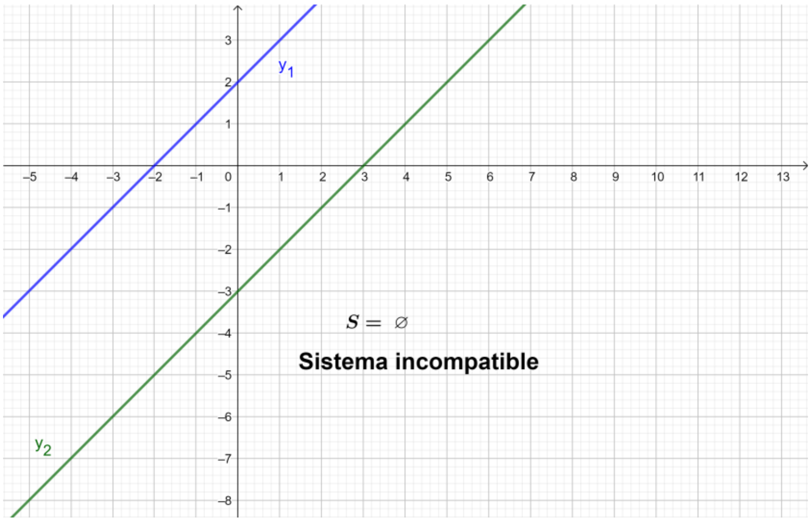
Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistema de ejes y hallar la intersección de ambas.

Ejemplo:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases} \xRightarrow[\text{despejamos } y]{} \begin{cases} y_1 = -2x + 1 \\ y_2 = x - 5 \end{cases}$ dibujamos las dos rectas en un mismo sistema de ejes



b) $\begin{cases} -x+y=2 \\ -x+y=-3 \end{cases} \xrightarrow[\text{despejamos } y]{} \begin{cases} y_1 = x+2 \\ y_2 = x-3 \end{cases}$ dibujamos las dos rectas en un mismo sistema de ejes



ACTIVIDADES

1) Resolver gráficamente y clasificar cada uno de los siguientes sistemas.
   a) $\begin{cases} -2x+y=-1 \\ -3x+y=4 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x+y=7 \\ x=-y-2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} -3x-y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$

Método de igualación

Se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego igualar las ecuaciones obtenidas.

$\begin{cases} 2x-3y=9 & \text{(a)} \\ x+y=-8 & \text{(b)} \end{cases}$ se despeja "x" de ambas ecuaciones.

(a): $x = \dfrac{9+3y}{2}$ (b): $x=-8-y$

Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de "y":

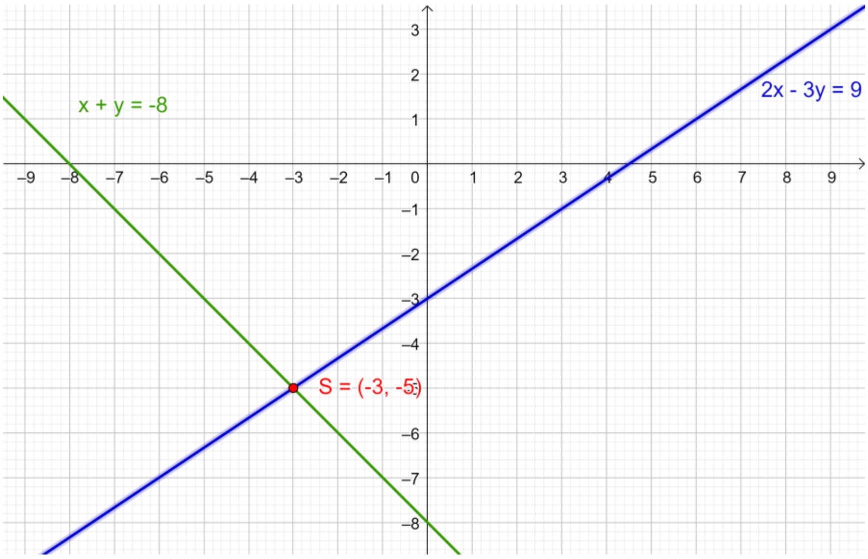
$$\frac{9+3y}{2} = -8-y \Rightarrow 9+3y=-16-2y \Rightarrow 3y+2y=-16-9 \Rightarrow 5y=-25 \Rightarrow \boldsymbol{y=-5}$$

Se reemplaza el valor de "y" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de "x":

$$x+(-5)=-8 \Rightarrow -5+x=-8 \Rightarrow \boldsymbol{x=-3}$$

Se escribe el conjunto solución: $\boldsymbol{S=\{(-3;-5)\}}$

Podemos comprobarlo gráficamente:



Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \text{(a)} \\ 4x + 3y = 1 & \text{(b)} \end{cases}$$

Despejamos *y* de ambas ecuaciones

De (a): $y = 2x - 3$

De (b): $3y = 1 - 4x$

$$y = \frac{1 - 4x}{3}$$

Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de "*x*":

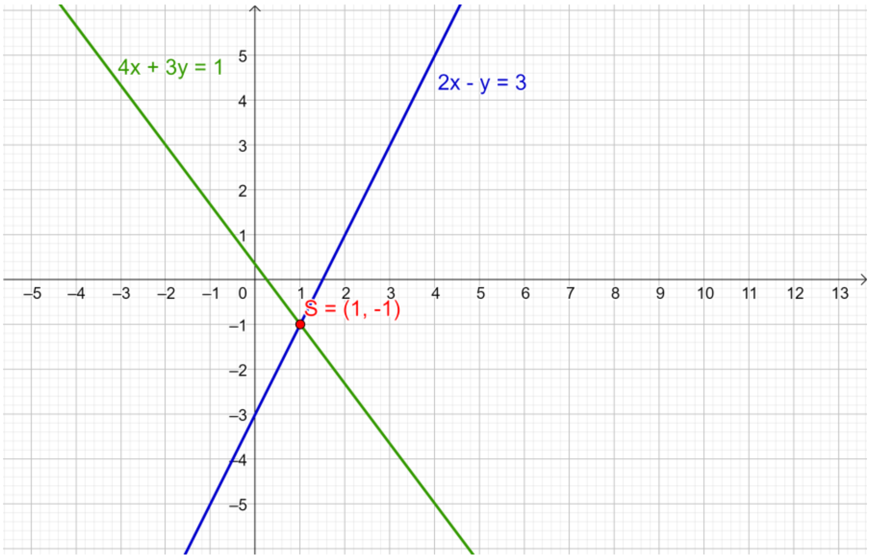
$$2x - 3 = \frac{1 - 4x}{3}$$
$$(2x - 3) \cdot 3 = 1 - 4x$$
$$6x - 9 = 1 - 4x$$
$$6x + 4x = 1 + 9$$
$$10x = 10$$
$$x = 10 : 10$$
$$x = 1$$

Se reemplaza el valor de "*x*" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones y se encuentra el valor de "*y*":

$$2 \cdot 1 - y = 3$$
$$2 - y = 3$$
$$-y = 3 - 2$$
$$y = 1 : (-1)$$
$$y = -1$$

La solución es: $S = \{(1;\ -1)\}$

Podemos comprobarlo gráficamente:



Actividades

Resolver aplicando el método de igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 8 - 5x \end{cases}$

Método de sustitución

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, luego reemplazarla en la otra ecuación.

$\begin{cases} x - y = 1 & \text{(a)} \\ 2x - 3y = 1 & \text{(b)} \end{cases}$ Se despeja x en la ecuación (a): $x = 1 + y$
Se reemplaza la "x" por "$1 + y$" en la ecuación (b): $2(1 + y) - 3y = 1$

Se resuelve la ecuación, obteniéndose el valor de "y":

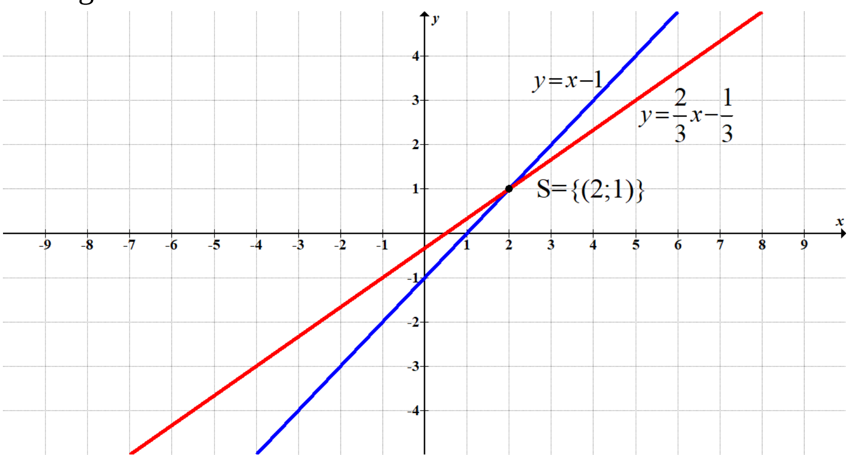
$2 + 2y - 3y = 1 \Rightarrow 2 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 - 2 \Rightarrow -y = -1 \Rightarrow \boldsymbol{y = 1}$

Se reemplaza el valor de "y" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de "x":

$x - 1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

Se escribe el conjunto solución: $\boldsymbol{S = \{(2; 1)\}}$

Podemos comprobarlo gráficamente:



Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \text{(a)} \\ 4x + 3y = 1 & \text{(b)} \end{cases}$$

Despejamos " y " de (a) $\quad y = 2x - 3$

Se reemplaza la "y" por " $2x - 3$" en la ecuación (b): $4x + 3(2x - 3) = 1$

Se resuelve la ecuación, obteniéndose el valor de "x":

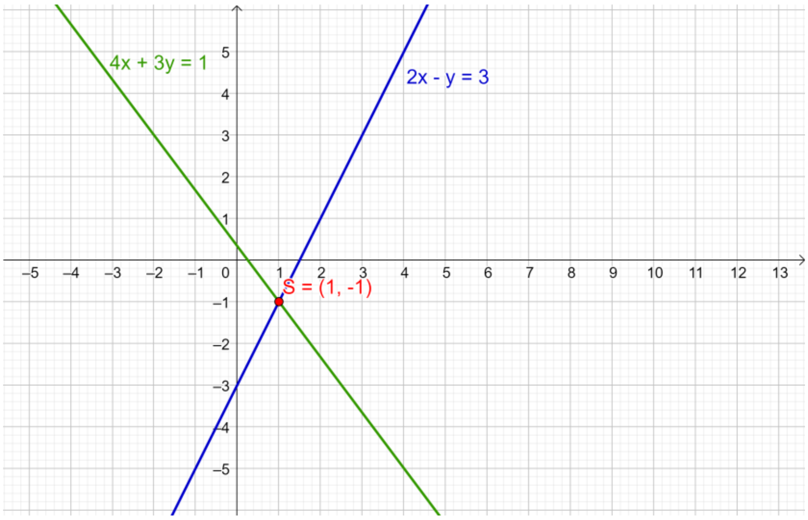
$$4x + 6x - 9 = 1$$
$$10x - 9 = 1$$
$$10x = 1 + 9$$
$$x = 10: 10$$
$$x = 1$$

Se reemplaza el valor de "x" obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones y se encuentra el valor de "y":

$$2 \cdot 1 - y = 3$$
$$2 - y = 3$$
$$-y = 3 - 2$$
$$y = 1: (-1)$$
$$y = -1$$

La solución es: $S = \{(1;\ -1)\}$

Podemos comprobarlo gráficamente:



Actividades

1) Resolver aplicando el método de sustitución los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

2) Plantear el sistema de ecuación y resolver por el método que crea más conveniente.
   a) Se compraron dos libros y se gastaron \$130000. Si uno cuesta la cuarta parte de lo que cuesta el otro, ¿Cuánto cuesta cada libro?
   b) En el estacionamiento de un supermercado hay 145 autos. Algunos tienen dos puertas y otros, cuatro. Si en total hay 400 puertas, ¿Cuántos autos de cada tipo hay

Revisión Final de todo lo visto

1) Escribir la ecuación de una recta con pendiente $a = -3$ que pasa por el punto (2; -1).
2) Determinar si las rectas con ecuaciones $y - 1 = 2x$ y $y - 2x = 3$ son paralelas.
3) Verificar si las rectas con ecuaciones $\frac{y-5}{3} = x$ y $y + 4 = -\frac{1}{3}x$ son perpendiculares.
4) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular a $y = \frac{1}{2}x + 3$ que pasa por el punto (4; 1).
5) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2; -3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 3y = 6$.
6) Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $4x + y = 7$ que pasa por el punto $(-2; 4)$.
7) Plantear el sistema y resolver por el método que crea más conveniente.
   a) ¿Cuáles son los números cuya suma es cinco y su diferencia es nueve?
   b) Si dos bolsas pesan 26 kg y una pesa 8 kg más que la otra, ¿Cuánto pesa cada bolsa?
   c) En una caja, hay \$ 64 en billetes de \$ 2 y \$ 5. Si hay 20 billetes en la caja, ¿Cuántos hay de cada valor?