Factorización de Polinomios

El proceso de transformar un polinomio en un producto de otros polinomios, del menor grado posible se llama **factorización**.

FACTORIZAR= es transformar en...

Si factorizamos un número	Si factorizamos un polinomio
12 12= lo transformamos en producto de potencias de números primos.	$2x^2$-10x+12= lo transformamos en producto de polinomios primos.

¿Cómo factorizar polinomios? Para factorizar polinomios se aplican diversos recursos algebraicos, algunos los vemos a continuación:

Factor común

Es el procedimiento inverso a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$P(x) = 10x^3 - 6x^2 - 4x = 2x \cdot (5x^2 - 3x - 2)$$

Recuerda: al extraer a x como factor común: ***la extraemos elevada a la menor de sus potencias***.

Ejemplos: Extraemos factor común:

$$P(x) = 2a^5 - 4a^3 = 2a^3 \cdot (a^2 - 2)$$
$$Q(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x =$$
$$M(x) = 3xy - 2x =$$

Factor común por grupos

Se aplica el factor común por grupos a polinomios que no tienen un factor común en todos sus términos.

Ejemplo:

$A(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$A(x) = \underbrace{(x^5 - 2x^4)}_{x^4} + \underbrace{(-3x + 6)}_{-3}$ → Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común.

$A(x) = x^4(x - 2) - 3(x - 2)$ → En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor.

$A(x) = (x - 2)(x^4 - 3)$ → Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

Otro ejemplo:

$Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2) = 3x^2 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x+1)$

$Q(x) = (x+1) \cdot (3x^2 + 2)$

Ejemplo: Extraer factor por grupo

$A(x) = x^4 - x^3 + 2x - 2$

$B(x) = x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 6$

$C(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Trinomio cuadrado perfecto

Recordemos que:

Cuadrado de un binomio ⇨ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ⇦ **Trinomio Cuadrado Perfecto**

$(x+5)^2 =$ .... luego

$P(x) = x^2 + 10x + 25 =$.......................................

Todo Trinomio Cuadrado Perfecto se factoriza como "el cuadrado de un binomio".

Ejemplos: Factorizar:

$A(x) = x^2 + 4x + 4 =$

$B(x) = 9x^2 - 30x + 25 =$

$C(x) = x^2 - 12x + 36 =$

$D(x) = x^4 + 6x^2 + 9 =$

Cuatrinomio cubo perfecto

Recordemos que:

Cubo de un binomio ⇨ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ⇦ **Cuatrinomio Cubo Perfecto**

$(x+5)^3 =$ .... luego

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125 =$.......................................

Todo Cuatrinomio Cubo Perfecto se factoriza como "el cubo de un binomio".

Ejemplos: Factorizar:

$A(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 =$

$B(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$

$C(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 =$

$D(x) = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 =$

Diferencia de cuadrados

Recordemos que:

Producto de la suma por la diferencia de dos términos	⇨ $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ ⇦ **Diferencias de cuadrados**

$(x-5)\cdot(x+5)=$ ………………………………………

$x^2-25=$ ……………………………………….

Toda Diferencia de Cuadrados se factoriza como "………………………………………………..".

Ejemplos:

$x^2-36=$

$9x^2-1=$

$\frac{1}{4}x^2-y^2=$

$36-x^2=$

Teorema de Factorización (IMPORTANTE)

Teorema de Gauss

Si el polinomio $P(x)$, de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces $\boldsymbol{p}$ es divisor del término independiente y $\boldsymbol{q}$ lo es del coeficiente principal.

Para hallar las raíces racionales de $P(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+d$:

- Se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- Se buscan las posibles raíces: p → Divisores del término independiente.

  q → Divisores del coeficiente principal.

Todo polinomio $P(x)$, de grado n, de n raíces reales, puede factorizarse como:

$$P(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

Siendo a el coeficiente principal de $P(x)$ y $x_1; x_2; \ldots; x_n$ sus n raíces reales.

Para familiarizarnos con el teorema, completamos el cuadro

Polinomio P	Grado de P	Raíces de P	Polinomio Factorizado
$2x^2-10x+12$	2	2 y 3	$2\cdot(x-2)\cdot(x-3)$
$x^3-2x^2-25x+50$		2 , 5 y – 5	
x^2-25		5 y – 5	
x^2-2x+1		1	

La multiplicidad de una raíz en un polinomio es la cantidad de veces que aparece en la factorización. En los tres primeros ejemplos las raíces son ...., en el último ejemplo la raíz es ....

Completar

Polinomio de 2º Grado	Coeficiente Principal	Raíces	Factorización
$-x^2+x+2$		-1 y 2	
	-2	3 y 3	
			$2\cdot(x+3)\cdot(x-3)$
			$(x-2)\cdot(x+2)$
			$(x+2)^2$

<u>Encontramos las raíces y factorizamos</u>

Ejemplo 1: Para factorizar P (x) = x^2-5x-6

1) Escribimos los divisores del término independiente, que son las posibles raíces del polinomio:

   D ....= {   }

2) Calculamos el valor del polinomio en estos números hasta encontrar uno que sea raíz.

   P (1) = $(1)^2-5(1)-6=1-5-6=-10$

3) Al encontrar una raíz, ya podemos escribir un divisor del polinomio: (x..............)

4) Usamos Ruffini para encontrar el otro divisor

	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
	.....	.....	.....

Luego: $x^2-5x-6=$ (.......................)·(.......................) quedó factorizado

Ejemplo 2: Factorizamos el polinomio: P (x) = $3x^2 + 3x - 18$

1) Como el coeficiente principal es .... , encontramos el polinomio " normalizado" (con coeficiente principal 1).

Trabajamos con el polinomio normalizado:

2) Encontramos los divisores del término independiente

D ....= { }

3) Entre ellos encontramos uno que sea raíz

4) Tenemos así un divisor (...............), el cual usamos para encontrar el otro (Usamos Ruffini)

	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
	.....	.....	.....

Luego: $3x^2 + 3x - 18$ =.......· (.............)·(.............) quedó factorizado.

Actividades

1. Completar para que el polinomio quede factorizado

a) $0{,}2x^3 + 0{,}4x^2 = 4x^5 - 6x^2 = 2x^2 \cdot ($ $)$
b) $10x^4 + 15x^3 - 5x^2 =$ $\cdot (2x^2 + 3x - 1)$
c) $-4b^3 + 6b - 2b^3 = 2b \cdot ($ $)$
d) $x + x^5 - x^3 =$ $\cdot (1 + x^4 - x^2)$

2. Extraer factor común:

a) $3m - 9m^2 =$
b) $2x^9 - 5x^8 + x^7 =$
c) $4 + 4p =$
d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{9}{10}x^3 =$
e) $x^2 - 2x =$
f) $a^2b + ab^2 =$
g) $3x^5 - 6x^2 + 12x^4 =$
h) $\frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{4}x =$

3. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfecto.

a. $x^2 + 12\,x + 36 =$
b. $x^4 + 8\,x^2 + 16 =$

c. $x^2 - 10x + 25 =$
d. $4x^2 - 12x + 9 =$
e. $x^2 + 49 - 14x =$
f. $x^2 + x + \frac{1}{4} =$

4. Expresar cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.
   a) $D(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$
   b) $P(x) = x^3 - 12x^2 + 75x + 125$
   c) $T(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 1$
   d) $R(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$
5. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados.
   a) $x^2 - 16 =$
   b) $81 - x^4 =$
   c) $4x^2 - 9 =$
   d) $a^4 - b^2 =$
   e) $x^2 - 9 =$
   f) $-49 + x^2 =$
   g) $\frac{1}{4}x^6 - 16 =$
   h) $x^4 - 0{,}25 =$
6. Factorizar las siguientes expresiones en producto de otros polinomios no factorizables:
   a) $5x^2 - 5 =$
   b) $x^3 - 25x =$
   c) $x^2 - 4x =$
   d) $x^3 - 4x =$
   e) $x^4 - x^2 =$
   f) $a^5 - a =$
   g) $2x^2 - 4x + 2 =$
   h) $x^3 - 10x^2 + 25x =$
   i) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 =$
   j) $16x^2 - 40x + 25 =$
7. Factorizar los siguientes polinomios.
   a) $x^2 - 7x + 10 =$
   b) $x^2 - 2x - 3 =$
   c) $2x^2 - 4x - 30 =$
   d) $5x^2 + 5x - 10 =$
   e) $x^2 + 6x + 9 =$
   f) $x^3 - x^2 - 9x + 9 =$
   g) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 =$
   h) $x^3 - 2x^2 - x + 2 =$
8. Hallar las raíces de los siguientes polinomios y factorizar.
   a) $A(x) = x^2 + x - 6$
   b) $B(x) = x^3 - 3x + 2$
   c) $C(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$
   d) $D(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 91$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

Si A y B son dos polinomios, se llama fracción algebraica al cociente entre ambas;

$$\frac{A \leftarrow \text{ numerador}}{B \leftarrow \text{denominador}}; B \neq 0$$

Ejemplos: Son fracciones algebraicas

$$\frac{x+1}{x+2}; \quad \frac{3}{x^2-2}; \quad \frac{x-3}{x}; \quad \frac{1}{x^2}; \quad \frac{3}{x}$$

Simplificación: como las fracciones numéricas, las fracciones algebraicas también se pueden simplificar.
Ejemplos:

a) $\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{6}x^{\cancel{3}}} = \frac{1}{2x}$

c) $\frac{x-1}{x^2-1} =$

b) $\frac{12x^5}{-2x} =$

d) $\frac{x^2-2x}{x^2-4} =$

- ✓ Factorizamos ambos polinomios, si es posible.
- ✓ Cancelamos los factores que son comunes en el numerador y denominador.

ACTIVIDADES

1) Simplifica las siguientes fracciones, si es posible:

a) $\frac{24x^2}{12x^4} =$

b) $\frac{2b}{4b+b^2} =$

c) $\frac{xy-y^2}{x^2-y^2} =$

d) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} =$

e) $\frac{36-24y+4y^2}{18-2y^2} =$

f) $\frac{2x-3}{6+4x} =$

g) $\frac{x^2-9}{6x^2-54} =$

h) $\frac{2x+6}{x^2-9} =$

Suma y resta de fracciones algebraicas

Ejemplos:

a) Si tienen igual denominador

$$\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^2}=\frac{2+5-4}{x^2}=\frac{3}{x^2}$$

$$\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-1}=$$

$$\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{a}=$$

b) Si tienen distinto denominador

- ✓ Seguimos estos pasos: $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}=$
- ✓ Si es posible, factorizamos los denominadores: $\begin{cases} x-1= \\ x+1= \\ x^2-1= \end{cases}$
- ✓ Determinamos el "denominador común" multiplicando los factores con el mayor exponente $\{$ d.c. $=$
- ✓ Transformar cada fracción en una equivalente cuyo denominador sea denominador común $\left\{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x^2-1}=\frac{\quad}{\qquad\qquad}+\frac{\quad}{\qquad\qquad}-\frac{\quad}{\qquad\qquad}\right.$
- ✓ Sumamos y/o restamos fracciones de igual denominador.
- ✓ Encontramos la expresión más reducida.

Otros ejemplos

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=$$

d.c.=................................

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x^2-1}{x+1}=$$

d.c.=................................

Si factorizamos el numerador y simplificamos $=$ ____________________

2) Realiza las siguientes sumas y restas

a) $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x+1}{x^2-1}=$

b) $\frac{3x}{x^2}-\frac{4}{2x}+\frac{x}{x^3}=$

c) $\frac{x+2}{1-x}+\frac{2}{x-x^2}-\frac{1}{1-x}=$

d) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=$

Multiplicación de fracciones algebraicas

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4}\cdot\frac{x-1}{x}\underset{\text{factorizando}}{=}\frac{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot x}\underset{\text{simplificando}}{=}\frac{x-1}{x+2}$$

Calculos auxiliares

$x^2-2x=x\cdot(x-2)$

$x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$

División de fracciones algebraicas

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4}:\frac{x-1}{x}\underset{\text{factorizando}}{=}\frac{x\cdot(x-2)\cdot x}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)}\underset{\text{simplificando}}{=}\frac{x^2}{(x+2)\cdot(x-1)}$$

Calculos auxiliares

$x^2-2x=x\cdot(x-2)$

$x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$

3) Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones

a) $\frac{\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+4}{2\boldsymbol{x}-10}\cdot\frac{3\boldsymbol{x}-15}{\boldsymbol{x}-2}=$

b) $\frac{y+1}{y^2-2y+1}\cdot\frac{y^2-1}{y^2+2y+1}=$

c) $\dfrac{x^3-9x}{x^2}\cdot\dfrac{x}{x-3}=$

d) $\dfrac{5a^2bx}{x^2-1}:\dfrac{ab}{x^2-x}=$

e) $\dfrac{x^3-4x}{x^2-5x+6}:\dfrac{x^2-2x}{x-3}=$

f) $\dfrac{x^2-3x+2}{a^2-b^2}:\dfrac{2x-4}{2a-2b}=$

4) Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=$

b) $\dfrac{a}{a^2}-\dfrac{3a}{a^3}+\dfrac{6}{3a}=$

c) $\dfrac{x+3}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-x}-\dfrac{2}{x-1}=$

d) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}=$

e) $\dfrac{3}{x^2-9}+\dfrac{1}{x+3}=$

f) $\dfrac{x^2-10x+25}{3x-15}\cdot\dfrac{3x-9}{x-5}=$

g) $\dfrac{a+4}{a^2-8a+16}\cdot\dfrac{a^2-16}{a^2+8a+16}=$

h) $\dfrac{2x^2ym}{m^2-4}:\dfrac{xy}{m^2-2m}=$

i) $\dfrac{y^3-3y}{y^2+4y+3}:\dfrac{y^2-3y}{y-3}=$

j) $\dfrac{a^2+6a+5}{x^2-y^2}:\dfrac{4a+20}{4x-4y}=$

Revisión Final de todo lo visto

1) Escribir V (verdadero) o F (falso) según corresponda.
   a) $x^3\cdot(x-3)=x^3-3x$
   b) $x^3\cdot(x^2-2x+1)=x^5-2x^3+1$
   c) $x^4\cdot(x^2-3x+1)=x^6-3x^5+x^4$
   d) $\frac{3}{2}\cdot\left(x^2-\frac{2}{3}+5x^4\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{15}{2}x^4$
   e) $\frac{3}{2}\cdot\left(x^2-\frac{2}{3}+5x^4\right)=\frac{3}{2}x^2-1+\frac{15}{2}x^4$
2) Completar con = o ≠ según corresponda.
   a) $(3x-2)^2$ … … $9x^2-4$
   b) $(5x-2)^2$ … … $25x^2-20x+4$

c) $(-2x+1)^2 \ldots\ldots -4x^2-4x+1$

d) $(3x^2-1)^3 \ldots\ldots 27x^5-27x^4+9x^2+1$

3) Marcar la opción correcta.

¿Cuál es la factorización de cada uno de los siguientes polinomios?

$x^4-9x^2=$	☐ $x^2\cdot(x-3)\cdot(x+3)$	☐ $x^4\cdot(1-9x)$	☐ $x^2\cdot(x^2-81)$
$x^5+6x^4+9x^3=$	☐ $x\cdot(x+3)^2$	☐ $x^3\cdot(x+3)^2$	☐ $x^3\cdot(x^2+9)$
$2x^3+4x^2-6x=$	☐ $(x^2-2)\cdot(x+3)$	☐ $2x\cdot(x^2+2x+6)$	☐ $2x\cdot(x-1)\cdot(x+3)$

4) Factorizar los siguientes polinomios.

a) $x^3-9x^2+11x+21=$

b) $x^4+x^3-6x^2=$

c) $x^3-x^2-100x+100=$

d) $x^4+4x^3+4x^2=$

5) Unir con una flecha las expresiones equivalentes.

$\dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2+2x-15}$	$x+1$
$\dfrac{3x^2-12}{x^3-5x^2+8x-4}$	$\dfrac{3}{5}$
$\dfrac{x^4-x^3-7x^2+x+6}{x^3-2x^2-5x+6}$	$\dfrac{x\cdot(x+1)}{x+5}$
$\dfrac{3x^2-9x}{5x^2-15x}$	$\dfrac{3\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x-1)}$

6) Resolver las siguientes operaciones.

a) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{x}{x+5}=$

b) $\frac{x^2-3x}{x-1}:\frac{x}{x^2+2x+1}=$