

Actividades

1) Calcular siempre que sea posible:

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_5 25 =$

c) $\log_7 7 =$

d) $\log_2 0 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_2 \frac{1}{2} =$

g) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

h) $\log_2 \sqrt{8} =$

i) $\log_3 \sqrt[3]{5} =$

j) $\log_9 \frac{1}{3} =$

k) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

l) $\log_{10} 0,01 =$

2) Encontrar los logaritmos utilizando la calculadora científica:

a) $\log 202 =$

b) $\log 20 =$

c) $\log 2,02 =$

d) $\log 0,242 =$

e) $\ln 7 =$

f) $\ln 25 =$

g) $\ln 250 =$

h) $\ln 0,25 =$

3) Calcular aplicando logaritmo decimal:

a) $\log_4 100 =$

b) $\log_3 10 =$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 7 =$

d) $\log_5 \frac{1}{8} =$

4) Calcular aplicando logaritmo neperiano:

a) $\log_2 165 =$

b) $\log_5 72 =$

c) $\log_3 8,21 =$

d) $\log_{15} 0,25 =$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de uno

$$\log_a 1 = 0$$

Logaritmo de la base

$$\log_a a = 1$$

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos de los factores.

$$\log_a(p : q) = \log_a p - \log_a q$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a(p)^n = n \cdot \log_a p$$

Podemos aplicar esta propiedad del logaritmo a una raíz: $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

Actividades

5) Resolver aplicando propiedades:

a) $\log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$

e) $\log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$

b) $\log_2\left(\frac{1}{32} : 64\right) =$

f) $\log_3 27^4 =$

c) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)^3 =$

g) $\log_2\left(16 : \frac{1}{2}\right) =$

d) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

h) $\log_3(9 \cdot 81) =$

6) Expresar como un solo logaritmo y luego resolver:

a) $2 \cdot \log_5 \frac{1}{10} - 4 \cdot \log_5 1 + \log_5 16 =$

b) $\log_6 3 + \frac{\log_6 27}{3} + \log_6 4 =$

$$c) \left[\log_4 \frac{1}{32} - \log_4 2 \right]^2 =$$

Función Logarítmica

Definición: Llamamos **función logarítmica** a toda función del tipo:

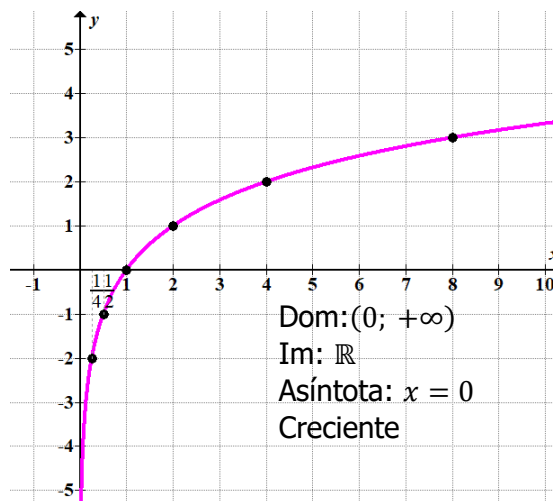
$$f(x) = \log_a(x - h) + k \text{ con } a > 0; a \neq 1; h \text{ y } k \text{ números reales}$$

Esta función está definida para los valores de $x > 0$. Es decir, el **dominio** de la función es \mathbb{R}^+ .

Las gráficas de acuerdo a los distintos valores de **a** son:

❖ $a > 1 \rightarrow y = \log_2 x$

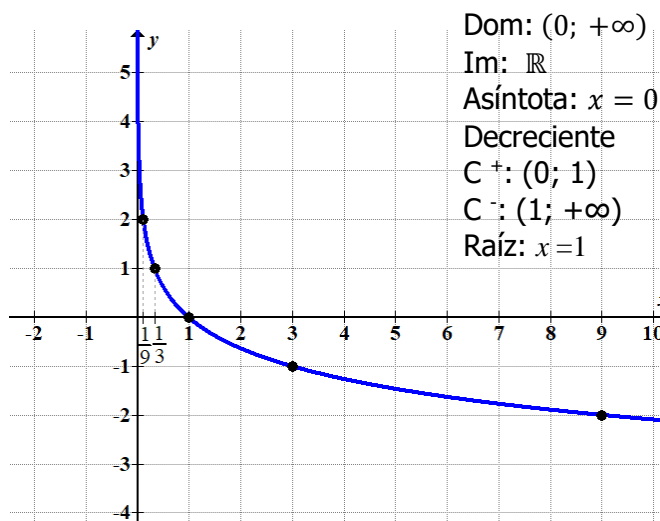
x	$y = \log_2 x$
0	No se puede sacar
0,25	$\log_2 0,25 = -2$
0,50	$\log_2 0,50 = -1$
1	$\log_2 1 = 0$
2	$\log_2 2 = 1$
4	$\log_2 4 = 2$
8	$\log_2 8 = 3$



Asíntota: se denomina asíntota a la recta a la cual se aproxima indefinidamente una función sin tocarla.

❖ $a < 1 \rightarrow y = \log_{\frac{1}{3}} x$

x	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$
0	No se puede sacar
$\frac{1}{9}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



Desplazamiento de la función logarítmica

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$$y = \log_2 x + 1$$

$$\text{Dom: } (0, +\infty)$$

$$\text{Im: } \mathbb{R}$$

$$\text{Asíntota: } x = 0$$

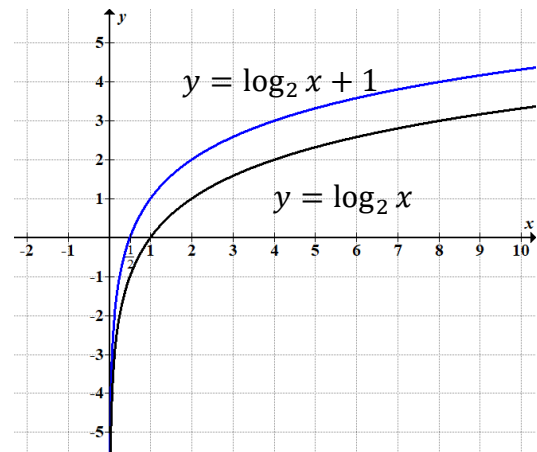
Creciente

$$C^+: \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$C^-: \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Raíz: } x = \frac{1}{2}$$

Ordenada al origen: no posee



Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$$y = \log_2(x + 3)$$

$$\text{Dom: } (-3, +\infty)$$

$$\text{Im: } \mathbb{R}$$

$$\text{Asíntota: } x = -3$$

Creciente

$$C^+: (-2; +\infty)$$

$$C^-: (-3; -2)$$

$$\text{Raíz: } x = -2$$

Ordenada al origen: $y = 1,58$

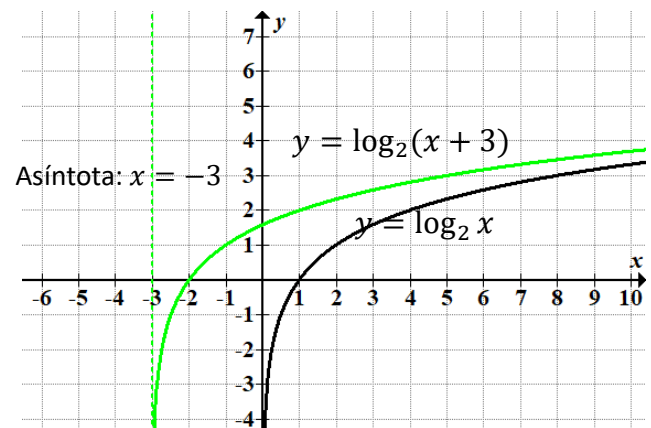
$$y = \log_2(x + 3)$$

$$y = \log_2(0 + 3)$$

$$y = \log_2 3$$

$$y = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$y = 1,58$$



Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = \log_2(x - 2) - 2$$

$$\text{Dom: } (2, +\infty)$$

$$\text{Im: } \mathbb{R}$$

$$\text{Asíntota: } x = 2$$

Creciente

$$C^+: (6; +\infty)$$

$$C^-: (2; 6)$$

Ordenada al origen: no posee

$$\text{Raíz: } x = 6$$

$$0 = \log_2(x - 2) - 2$$

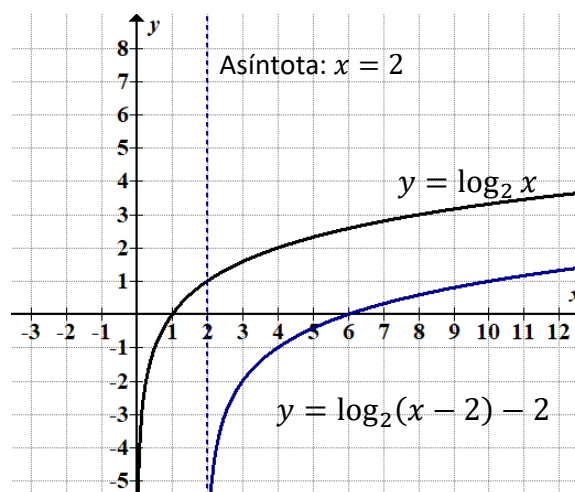
$$0 + 2 = \log_2(x - 2)$$

$$2 = \log_2(x - 2)$$

$$(x - 2) = 2^2$$

$$x = 4 + 2$$

$$x = 6$$



Actividades:

1) Representar gráficamente las siguientes funciones exponenciales. Analizar: dominio, imagen, raíz, ordenada al origen, asíntota, crecimiento o decrecimiento.

a) $y = \log_3 x - 1$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$

c) $y = \log_3(x - 1) + 2$

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 3$

e) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) + 1$

f) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$

g) $y = \log_3(x + 1) - 1$

Ecuaciones Logarítmicas

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita es el argumento o la base del logaritmo.

Ejemplo:

a) $\log_4(x + 12) = 2$

b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$

c) $\log_2(x - 1) + \log_2 3 = \log_2(x + 3)$

d) $\log_4 x - \log_2 3 = \log_2 5$

e) $3^x = 10$

f) $3 \cdot \log_2^2 x - 6 \cdot \log_2 x = -3$

Resolución de ecuaciones logarítmicas

PRIMER CASO: Aplicamos la definición de logaritmo:

a) $\log_4(x + 12) = 2$

$$4^2 = x + 12$$

$$16 = x + 12$$

$$16 - 12 = x$$

$$4 = x$$

SEGUNDO CASO: Aplicamos propiedades de los logaritmos:

b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3 \rightarrow$ aplicando propiedades de los logaritmos

$$\log_2(x + 1) \cdot (x - 1) = 3$$

$$\log_2(x^2 - 1) = 3 \rightarrow \text{definición de logaritmo}$$

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 8 + 1$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3 \quad x = -3 \text{ no verifica}$$

TERCER CASO: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

c) $\log_2(x - 1) + \log_2 3 = \log_2(x + 3) \rightarrow$ propiedades del producto

$$\log_2[(x - 1) \cdot 3] = \log_2(x + 3) \rightarrow \text{logaritmos de igual base tienen igual argumento}$$

$$(x - 1) \cdot 3 = x + 3$$

$$3x - 3 = x + 3$$

$$3x - x = 3 + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 6:2$$

$$x = 3$$

CUARTO CASO: Aplicando propiedades y cambios de base:

d) $\log_4 x - \log_2 3 = \log_2 5 \rightarrow$ cambio de base

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \log_2 3 = \log_2 5$$

$$\frac{\log_2 x}{2} - \log_2 3 = \log_2 5 \rightarrow \text{aplicando propiedad de la raíz y del cociente}$$

$$\log_2(\sqrt{x}:3) = \log_2 5$$

$$(\sqrt{x}:3) = 5$$

$$\sqrt{x} = 15$$

$$x = 15^2$$

$$x = 225$$

QUINTO CASO: Para resolver ecuaciones exponenciales:

e) $3^x = 10 \rightarrow$ aplicando logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad

$$\log 3^x = \log 10$$

$$x \cdot \log 3 = \log 10$$

$$x = \frac{\log 10}{\log 3}$$

$$x = \frac{1}{0,477}$$

$$x = 2,096$$

SEXTO CASO: Por medio de una ecuación de segundo grado:

$$f) 3 \cdot \log_2^2 x - 6 \cdot \log_2 x = -3$$

Si reemplazamos $\log_2 x = z$

$$3 \cdot z^2 - 6z + 3 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado $\rightarrow z = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$z = \frac{6 \pm 0}{6}$$

$$z = 1$$

$$z = 1 \text{ entonces } \log_2 x = 1$$

$$2^1 = x$$

$$2 = x$$

Actividades:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log_5(x - 2) = -1$

b) $\log(x^2 - 3) = 0$

c) $\log_2 x + \log_2 3 = 4$

d) $3 \cdot \log_4(x + 2) - \log_4(x + 2) = 1$

e) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

f) $\log_2 x + \log_8 x = \frac{1}{2}$

g) $3 \cdot 2^x = 10$

h) $(\log_4 x)^2 + 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

Revisión Final de todo lo visto

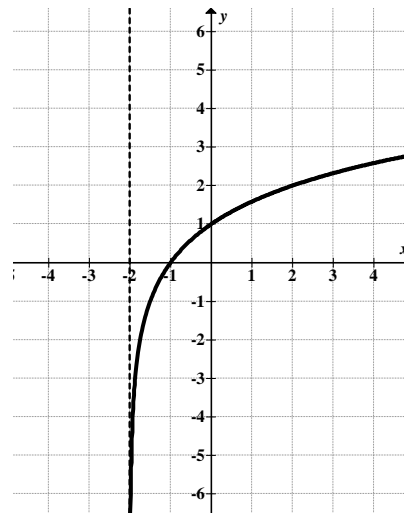
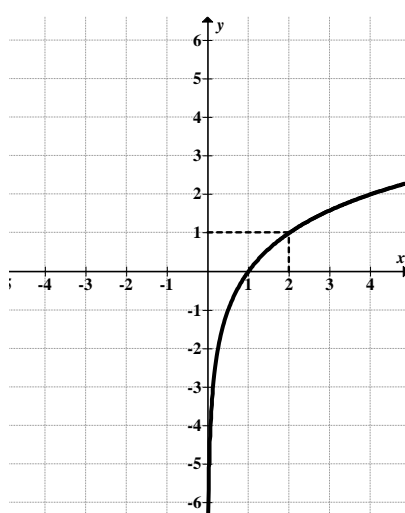
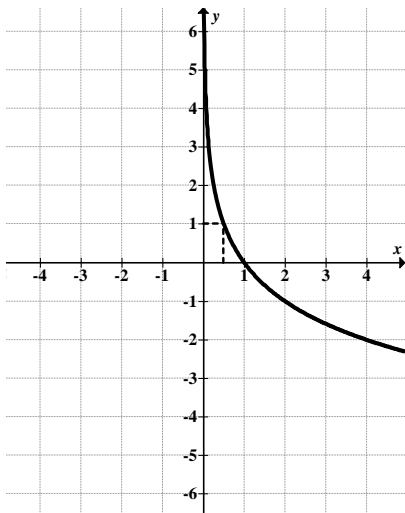
1) Indicar V (verdadero) o F (falso) según corresponda:

- a) $\log_3 7 + \log_5 9 = \log_8(7 + 9)$
- b) $\log_3 24^2 = 2 \cdot \log_3 24$
- c) $\ln(3 \cdot 27) = 3 \cdot \ln 27$
- d) $\log_5 5^3 = 3 \cdot \frac{\log 5}{\log 8}$

2) Resolver aplicando propiedades:

- a) $\log_3(27 \cdot \sqrt{3}) =$
- b) $\log_2 \frac{8}{\sqrt{2}} =$
- c) $\log_5 \frac{\frac{1}{125} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{25}} =$
- d) $\log_3 \frac{3^3 \cdot 27}{81} =$

3) Unir con una flecha cada grafica con su función correspondiente:



$f(x) = \log_2 x$

$f(x) = \log_2(x + 2)$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

4) Resolver los siguientes problemas aplicando función logarítmica:

- a) La intensidad (L) en decibeles de un sonido de intensidad I se define por $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, donde I_0 es la mínima intensidad detectable por el oído humano. Si una moto tiene un sonido con una intensidad I de 3000000 veces I_0 . Calcule la intensidad en decibeles de mismo.

- b) La oferta de un fabricante de cierto producto está dada por $p = \log \left(10 + \frac{q}{2} \right)$, donde q es el número de unidades ofrecidas a un precio p por unidad. ¿A qué precio ofrecerá al fabricante 1980 unidades?

5) Resolver las ecuaciones:

- a) $\frac{1}{3} \cdot \log_2(1 + 7x) = 2$
- b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2 8$