

Función exponencial.

Veamos un ejemplo:

"Se toma una muestra de 20 bacterias, las cuales duplican su número cada 30 segundos". Hallar una fórmula que permita conocer el número de bacterias en función del tiempo transcurrido, en minutos.

Esto es:

- ✓ $t = 0'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: 20 \rightarrow
- ✓ $t = 30'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: 40 \rightarrow
- ✓ $t = 60'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: 80 \rightarrow
- ✓ $t = 90'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: \rightarrow
- ✓ $t = 120'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: \rightarrow
- ✓ $t = \dots'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: \rightarrow
- ✓ $t = \dots'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: \rightarrow
- ✓ $t = \dots'' \rightarrow$ cantidad de bacterias: \rightarrow

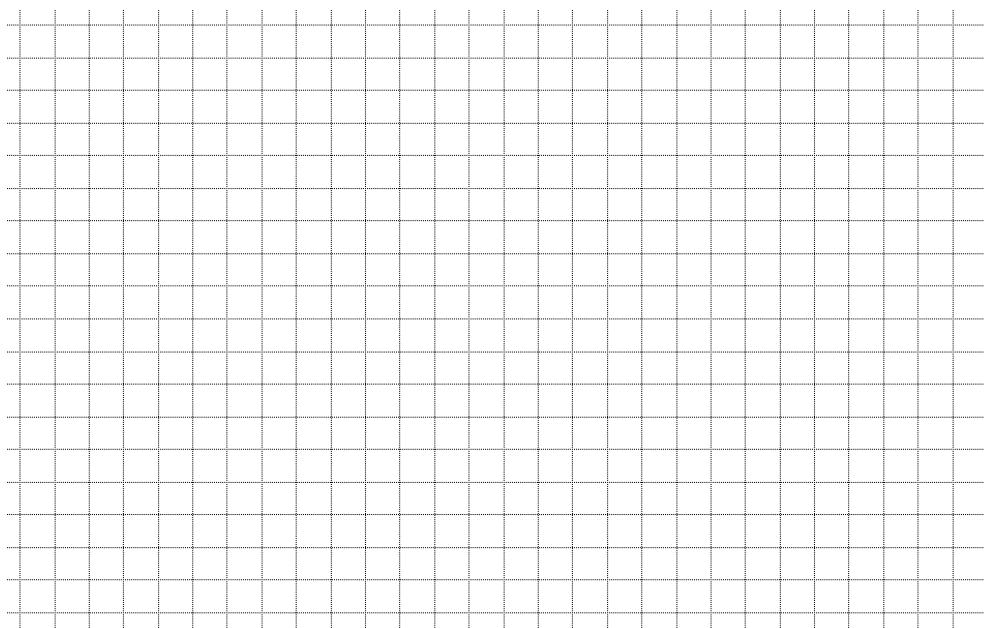
| Tiempo (en minutos) | Cantidad de bacterias |
|------------------------|--------------------------|
| x | y |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |

En general, la cantidad de bacterias está dada por la fórmula:

Observemos la fórmula hallada:

- ✓ La variable independiente, x , aparece como ***exponente***.
- ✓ Este tipo de expresiones corresponde a una ***función exponencial***.

A) Representar gráficamente los valores hallados en la tabla:



B) Observar la curva para responder:

- 1) ¿Corta el eje de las abscisas?
- 2) ¿Corta el eje de las ordenadas?
- 3) ¿Qué representa esa intersección?

- 4) ¿Es creciente o decreciente?
- 5) ¿Qué ocurriría si tomamos valores de t “muy grandes”?
- ✓ Una característica de esta curva es la rapidez con la que crece. A ese crecimiento vertiginoso se lo llama **creciente exponencial**.
 - ✓ Cuando x tiende a ∞ , la curva se aproxima cada vez más al eje de las abscisas, pero nunca llega a tocarlo. Por eso, la recta de ecuación $y = 0$ (es decir el eje x) es la **asíntota horizontal** de la curva.

Podemos definir entonces:

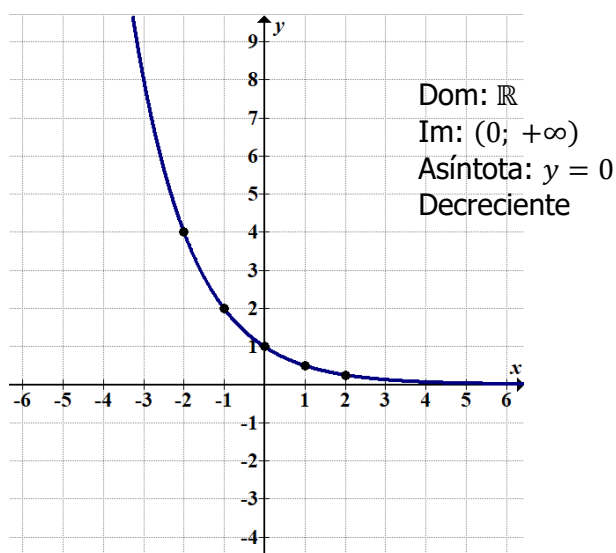
Definición: Se denomina función exponencial a toda función de la forma

$$f(x) = c \cdot a^{x-h} + k; a \neq 1 \text{ y } a > 0$$

Analicemos las distintas gráficas de la función exponencial:

❖ $0 < a < 1 \rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

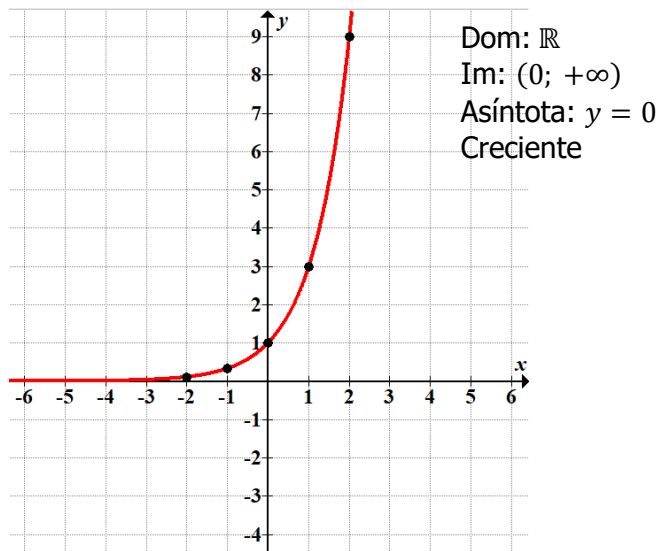
| x | $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | $(x; y)$ |
|-----|--|-------------------------------|
| -2 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$ | $(-2; 4)$ |
| -1 | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2^1 = 2$ | $(-1; 2)$ |
| 0 | $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ | $(0; 1)$ |
| 1 | $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ | $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ |
| 2 | $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ | $\left(2; \frac{1}{4}\right)$ |



Asíntota: se denomina asíntota a la recta a la cual se aproxima indefinidamente una función sin tocarla.

❖ $a > 1 \rightarrow y = 3^x$

| x | $y = 3^x$ | $(x; y)$ |
|-----|---|--------------------------------|
| -2 | $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ | $\left(-2; \frac{1}{9}\right)$ |
| -1 | $3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$ | $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ |
| 0 | $3^0 = 1$ | $(0; 1)$ |
| 1 | $3^1 = 3$ | $(1; 3)$ |
| 2 | $3^2 = 9$ | $(2; 9)$ |

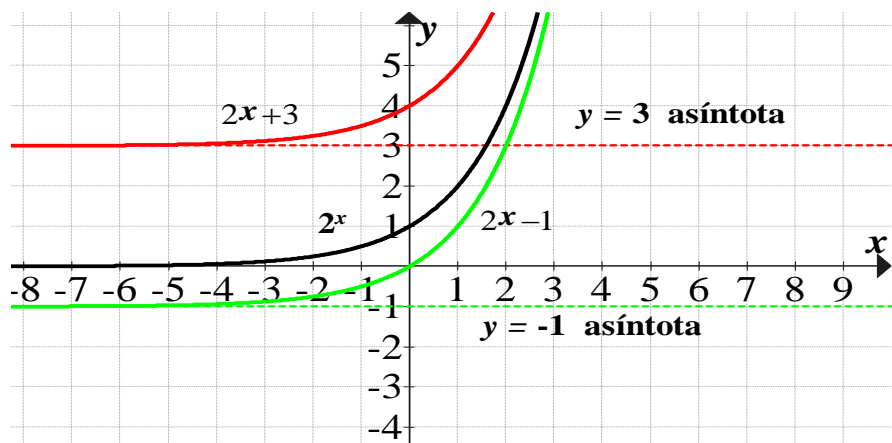


Desplazamiento de la función exponencial

Desplazamiento vertical $y = f(x) + k$

$y = 2^x + 3$
 Dom: \mathbb{R}
 Im: $(3, +\infty)$
 Asíntota: $y = 3$

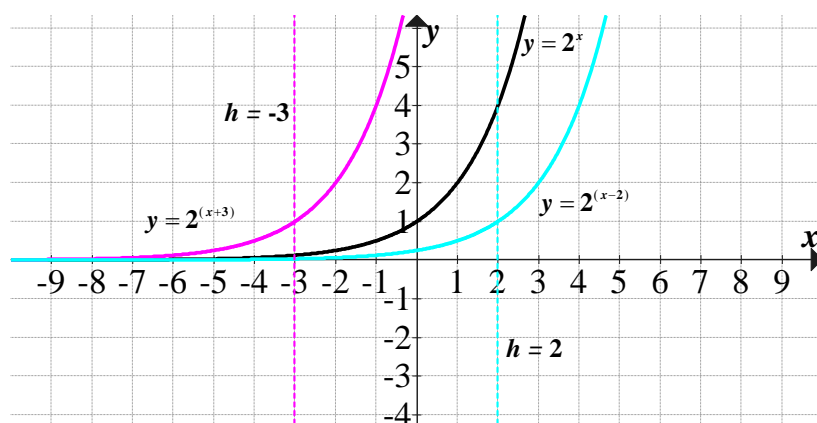
$y = 2^x - 1$
 Dom: \mathbb{R}
 Im: $(-1, +\infty)$
 Asíntota: $y = -1$



Desplazamiento horizontal $y = f(x - h)$

$y = 2^{x-2}$
 Dom: \mathbb{R}
 Im: $(0, +\infty)$
 Asíntota: $y = 0$

$y = 2^{x+3}$
 Dom: \mathbb{R}
 Im: $(0, +\infty)$
 Asíntota: $y = 0$



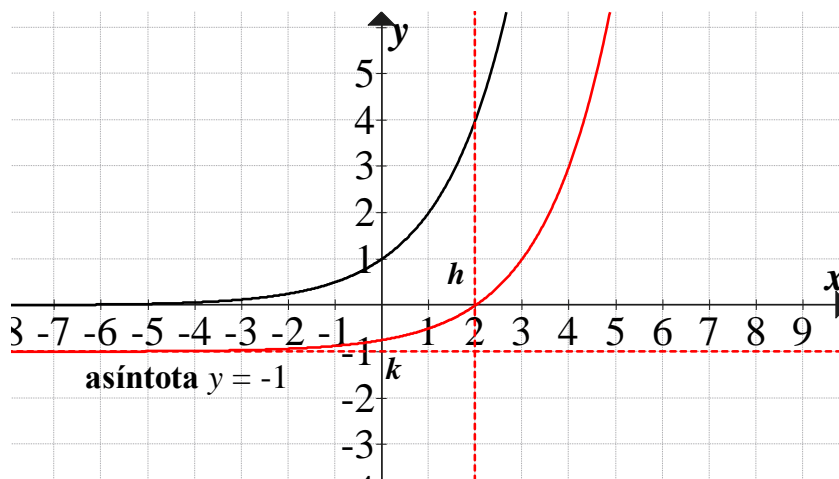
Desplazamiento vertical y horizontal $y = f(x - h) + k$

$$y = 2^{(x-2)} - 1$$

Dom: \mathbb{R}

Im: $(-1, +\infty)$

Asíntota: $y = -1$



Actividades

1) Representar gráficamente las siguientes funciones exponenciales. Analizar: dominio, imagen, raíz, ordenada al origen, asíntota, crecimiento o decrecimiento.

a) $y = 2^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $y = 2^{x+1}$

e) $y = 2^x + 1$

f) $y = 3^x - 2$

g) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

h) $y = 3^{x+1}$

i) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

j) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

2) Plantear las siguientes situaciones y resolver.

a) La población de cierta nación en desarrollo crece por un factor de (1,04) cada año. El tamaño de la población después de “n” años será $P = P_0(1,04)^n$.

Si $P_0 = 1,5$ millones, ¿cuál es la población al transcurrir: 5 años, 10 años, 15 años y 20 años?

b) Se proyecta que la población de un país dentro de t años será de $P(t) = 40 \cdot e^{0,03 \cdot t}$ millones. Hacer una tabla que indique la población actual y la que habrá, según este modelo, dentro de 1; 2; 3; ... ; 10 años.

c) La población de una colonia de células aumenta exponencialmente cada hora respecto de su población actual.

La población inicial es de 1000 células y la tasa de crecimiento por hora es 1,2.

i. Escribir la ley de la función exponencial que modeliza la situación.

ii. ¿Cuál es la población a las: 3 hs, 5 hs y a las 9 hs?.

Ecuaciones exponenciales.

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en que la incógnita figura como exponente.

Ejemplo:

a) $2^x = 16$

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

b) $3^{x-1} = 27$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

f) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

¡¡ ATENCIÓN!!

Para resolver una ecuación exponencial se debe aplicar la siguiente propiedad:

$$a^n = a^m \text{ entonces } n = m \text{ (con } a \neq 0; a \neq 1 \text{ y } a \neq -1)$$

Resolución de ecuaciones exponenciales

PRIMER CASO: Se transforma la ecuación dada en una igualdad de la misma base:

a) $2^x = 16$

$$2^x = 2^4$$

$$x = 4$$

b) $3^{x-1} = 27$

$$3^{x-1} = 3^3$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 3 + 1$$

$$x = 4$$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$-x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

SEGUNDO CASO: Las ecuaciones exigen transformaciones basadas en propiedades ya estudiadas.

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ aplicamos propiedades de la potencia de igual base

$$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^1 = 90 \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$3^x \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90 \quad \text{extraemos factor común } 3^x$$

$$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$$

$$3^x = 90: \frac{10}{3}$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

$$4^{x+1} = 96:3$$

$$4^{x+1} = 32$$

$$(2^2)^{x+1} = 2^5$$

$$2^{2x+2} = 2^5$$

$$2x + 2 = 5$$

$$2x = 5 - 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

TERCER CASO: Por medio de una ecuación de segundo grado:

f) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \rightarrow$ aplicamos propiedad de la potencia

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \rightarrow \text{reemplazamos } 2^x = z$$

$$z^2 - 9 \cdot z + 8 = 0 \rightarrow \text{resolvemos la ecuación de segundo grado}$$

$$z = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2}$$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$z = \frac{9 \pm 7}{2}$$

$$z_1 = 8$$

$$z_2 = 1$$

como $2^x = z$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

Actividades:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $5^x = 625$

b) $3^{x-1} = 81$

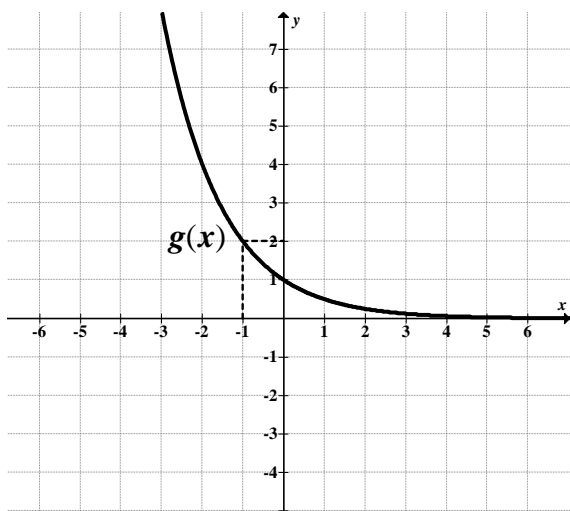
c) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

- d) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 17$
- e) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
- f) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$
- g) $5^{2x} - 10 \cdot 5^{2x-1} = -3$
- h) $6^{2x-2} = 1$

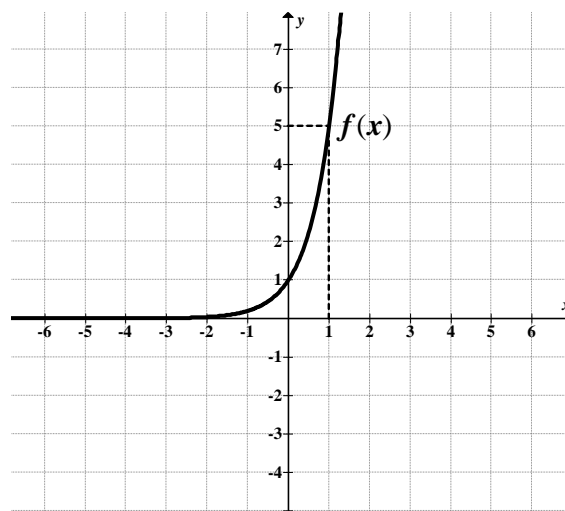
Revisión Final de todo lo visto

1) Observar los gráficos de las funciones exponenciales dadas y luego responder:

$g(x) = b^x$



$f(x) = a^x$



- a) ¿ $a > 1$ o $0 < a < 1$?
- b) ¿ $b > 1$ o $0 < b < 1$?
- c) ¿Cómo son cada una de las funciones, creciente o decreciente?
- d) ¿Cuál es el punto común en ambos gráficos?
- e) ¿Cuál es la fórmula de $f(x)$ y $g(x)$?

$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$y = 5^x$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$y = 2^x$

.....

.....

.....

.....

- 2) Encuentre la función exponencial de la forma $y = c \cdot a^x$ sabiendo que: $c = 2$ y el punto $(-2;8)$ pertenece a la función.
- 3) Resolver los problemas aplicando ecuación exponencial
 - a) La circulación de un periódico por día está dada por la ecuación $C = 2^{t+1}$. Si la tirada es de 32 mil periódicos, ¿en qué tiempo se alcanzó?
 - b) El número de bacterias de un cultivo está dado por $N_t = 500 \cdot 3^{t+2}$, donde t se mide en horas. Si el número de bacterias es de 22113, ¿cuánto tiempo transcurrió?
- 4) Resolver las siguientes ecuaciones:
 - a) $3^{2x+1} = 81$
 - b) $3^{2x+1} - 2 \cdot 3^x - 1 = 0$