

“Colegio Dr. B. A. Houssay”



MATEMÁTICA

5° Año

Nombre:

División:

Profesoras: Bibiana Rueda

Elena Jameson

PROGRAMA DE EXAMEN

EJE 1: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES.

Estadística. Distribución de frecuencias. Parámetros estadísticos de posición: media, moda y mediana. Parámetros estadísticos de dispersión: desvío estándar y varianza. Cálculo e interpretación de valores estadísticos representativos. Probabilidades. Experimentos y sucesos. Probabilidad condicional e independencia. Cálculo de probabilidades.

EJE 2: FACTORIZACIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS.

Factorización de polinomios. Casos de factoreo: factor común, factor común por grupos. Trinomio cuadrado perfecto. Cuadrinomio cubo perfecto. Diferencia de cuadrados. Teorema de Gauss. Simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.

EJE 3: FUNCION EXPONENCIAL

Función exponencial. Características y propiedades. Ecuaciones exponenciales.

EJE 4: FUNCIÓN LOGARITMICA.

Logaritmos. Propiedades. Función logarítmica. Características y propiedades. Ecuaciones logarítmicas.

Criterios de Evaluación

- Se evaluarán conceptos, vocabulario específico, procedimientos y actitudes.
- La evaluación se realizará únicamente en forma oral. Aprobará con la calificación de 6 (seis).
- El alumno deberá presentar al momento del examen carpeta o cuaderno completo personal, correspondiente al año de cursado.
- El alumno deberá presentarse con uniforme correspondiente, y en condiciones presentables en relación a lo que se exige en el reglamento, si no cumple con este requisito el docente no le permitirá rendir.

Bibliografía del Estudiante

- Matemática IV-Editorial Santillana Prácticas.
- Matemática 1- Editorial Santillana.
- Matemática 1- Editorial Mc. Graw Hill.
- Matemática – Serie Perspectivas-Editorial Santillana.
- Matemática II – Serie Perspectivas – Editorial Santillana.
- Matemática Polimodal Funciones 1– Editorial Longseller
- Matemática 1 Activa – Editorial Puerto De Palos.
- Matemática 2 Activa – Editorial Puerto De Palos.
- Matemática IV – Serie Llaves – Editorial Mandioca.
- Cuadernillo.

Estadística

En los primeros tiempos la estadística se limitaba simplemente al relevamiento de datos para luego ir incorporando paulatinamente nuevas técnicas para el análisis de la información recopilada.

Los complejos problemas de la sociedad actual y el incesante avance de la tecnología, generó la necesidad de una mayor formación estadística en nuestros alumnos, por ello esta materia intenta despertar en ustedes el interés que demanda la búsqueda de respuestas a diversas situaciones problemáticas y al desafío que representa poseer ciertos conocimientos para interpretarlos y comprenderlos.

La estadística se aplica a la física, agricultura, biología, medicina, economía, turismo, como estudio de mercado y control de calidad, censos de población, sondeos de opinión pública, etc.

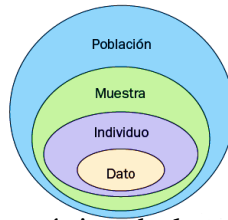
¿Qué es la Estadística?

La Estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.

Elementos de Estadísticas.

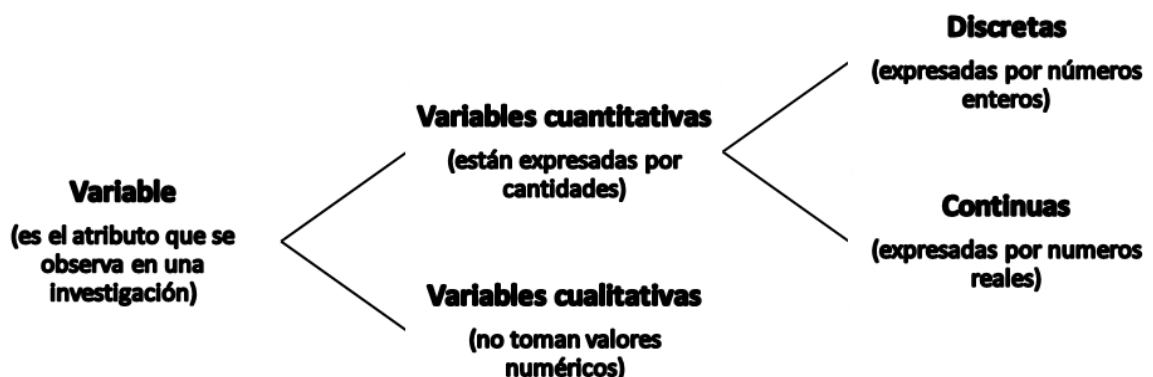


- **Población:** es el conjunto de individuos, que pueden ser personas o no, sobre los que se quiere obtener cierta información. Tamaño de la población se simboliza con (N) .
- **Individuo:** cada uno de los elementos de la población.
- **Muestra:** parte representativa de la población. Tamaño de la muestra la simbolizamos con (n) .



- **Variable estadística:** propiedad o característica de la población que estamos interesados en estudiar. (x_i)

Las variables se clasifican según el tipo de valor que pueden tomar.



Ejemplo de lo visto hasta el momento.

Población: estudiantes de la orientación sociales.

Individuo: cada uno de los alumnos.

Variable cualitativa: color de ojos de los alumnos.

Variable cuantitativa discreta: edad del estudiante.

Variable cuantitativa continúa: la altura de los alumnos.

Actividades:

- 1) Indica, cual es la población, la variable y el tipo de variable.
 - a) Peso al nacer de los bebés que nacieron en Capital el año pasado.
 - b) Profesiones que quieren tener los estudiantes del último año escolar de la provincia de San Juan.
 - c) Número de mascotas hay en los hogares de La Toma.
 - d) Tiempo semanal que dedican a la lectura los estudiantes de Secundaria en el Colegio.
 - e) Número de tarjetas amarillas mostradas en los partidos de fútbol de la temporada pasada.
- 2) Indica que variables son cualitativas y cuales cuantitativas:
 - a) Comida Favorita.
 - b) Profesión que te gusta.
 - c) Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
 - d) Número de alumnos de tu colegio.
 - e) El color de los ojos de tus compañeros de clase.
 - f) Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.
- 3) De las siguientes variables indica cuáles son discretas y cuales continuas.
 - a) Número de acciones vendidas cada día en la Bolsa.
 - b) Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
 - c) Período de duración de un automóvil.
 - d) El diámetro de las ruedas de varios coches.
 - e) Número de hijos de 50 familias.
 - f) Censo anual de los españoles.
- 4) Determina en las siguientes variables cuales son cualitativa y cuantitativas (discretas o continuas).
 - a) Gasto promedio por turista.
 - b) Las motivaciones de elección de un destino determinado.
 - c) Promedio de la temperatura durante la temporada de verano.
 - d) Nacionalidad de los turistas.
 - e) Hoteles de acuerdo al número de estrellas.
 - f) El impacto económico sobre el destino (pesos).
 - g) El grado de satisfacción del consumidor: Muy bueno-Bueno-Malo.
 - h) Número de hijos de los turistas que viajan en familia.

Recolección de datos y su interpretación.

El instrumento más utilizado para recolectar información sobre cierto tipo de estudio es la **encuesta**; luego de realizada, se organiza en tablas, con la finalidad de realizar el tratamiento de la misma. Entre algunos conceptos integrantes, que figuran en las tablas tenemos:

- **Frecuencia absoluta:** es el número de veces que la variable toma un determinado valor se simboliza f_i .

La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, n (es decir es el tamaño de la muestra):

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_m = n$$

Para indicar resumidamente estas sumas se utiliza la letra griega Σ (sigma mayúscula) que se lee suma o sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{i=m} f_i = n$$

- **Frecuencia relativa:** es la fracción del total de la muestra que le corresponde a ese dato, o sea, el cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos. Se simboliza f_r .

$$f_r = \frac{f_i}{n}$$

- **Frecuencia acumulada:** es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado. Se representa por F_i .

Tabla de frecuencias para datos no agrupados

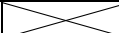
Los datos no agrupados son valores obtenidos y recolectados a través de una **encuesta**, en una cantidad pequeña relativamente, mismos que son analizados sin tipo de preclasificación.

Ejemplo: Se realiza un estudio para determinar la edad de veinte estudiantes del secundario del Colegio, y se obtuvo los siguientes datos:

14; 15; 14; 14; 13; 16; 16; 15; 15; 15; 15; 15; 14; 14; 14; 14; 15; 16; 16; 14.

La tabla de frecuencias considerando la variable mencionada es:



Edad x_i	f_i	f_r	F
13	1	0,05	1
14	8	0,40	9
15	7	0,35	16
16	4	0,20	20
Total	20	1	

Actividades

- 1) Se realiza un estudio para determinar el número de horas que utilizan Internet; le preguntan a José; Juan; Mariana, Andrea, Luis; Alejandro; Silvia; Paulina; Marcos y Carlos, estudiantes del 5 año del secundario. ¿Cuántas horas al día usted utiliza el servicio de Internet?

Identificar la población, muestra, variable y tipo de variable.

- 2) Los siguientes valores pertenecen a una encuesta realizada para conocer el número de veces que un estudiante de quinto año del colegio, revisa su celular en un día.

23 24 26 27 24 23 26 24 26 27 23 25 28 26 26 24 27 23 23 27
28 27 26 27 27 23 23 25 26 25 25 26 25 26 25 27 27 24 23 27

- a) Identificar la variable.
b) Determinar si es cualitativa o cuantitativa.
c) Identificar si es discreta o continua.
d) ¿Se está trabajando con una muestra o con la población?
e) Realizar la tabla de frecuencias.
- 3) Los datos corresponden al número de horas que utilizan Internet a diario un grupo de personas:

0 5 6 9 8 7 2 10 5 1 2 4 8 9 6 5 12 4 9 7
4 5 6 2 9 10 7 8 6 5 2 2 3 6 4 5 1 9 8 10

- a) Identificar la variable.
b) Clasificarla.
c) ¿Cuál es el tamaño de la muestra?
d) Realizar la tabla de frecuencias.
- 4) La siguiente tabla muestra la opinión de 4000 turistas sobre la calidad de los establecimientos en los que han pernoctado, en Mar del Plata.

Opinión sobre la calidad de los establecimientos	%
Muy buena	17 %
Buena	61 %
Normal	16 %
Regular, mal	3%
Muy mal	1%
Sin especificar	2%
Total	100 %



- a) ¿Cuál es la variable de estudio?
b) Clasificarla.
c) Determinar la cantidad de turistas por cada opinión.
d) Realizar la tabla de frecuencia.

Tabla de frecuencias para datos agrupados

Si la variable tiene muchos datos de distinto valor, antes de efectuar el recuento debemos agrupar los datos en intervalos.

Rango de datos: se determina mediante la diferencia entre el valor mayor de la variable ($x_{\text{máx}}$) y el valor menor ($x_{\text{mín}}$).

$$R = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

Los números extremos de cada intervalo se denominan “límite superior” y “límite inferior”

Amplitud de un intervalo: es la diferencia entre los límites que lo forman.

$$a = \frac{\text{límite superior} - \text{límite inferior}}{I}$$

Marca de clase: es el punto medio del intervalo

$$x_i = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$$

Número de intervalos: cantidad de intervalos a formar

$$I = 1 + 3,3 \cdot \log n \quad \text{Fórmula de Sturges}$$

REGLAS GENERALES PARA FORMAR DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS

- 1) Determinar el rango.
- 2) Todos los intervalos de clases deberán tener la misma amplitud.
- 3) Aplicar la fórmula de Sturges para hallar la cantidad de intervalos.
- 4) Determinar el ancho, a , dividiendo el rango en el número de intervalos.
- 5) Obtener la marca de clase.
- 6) Determinar el número de observaciones que caen dentro de cada intervalo de clase, es decir, hallar las frecuencias absolutas.
- 7) Obtener las frecuencias acumuladas de cada intervalo de clase.

Ejemplo: Se le pregunto a 90 estudiantes elegidos en forma aleatoria, sobre el gasto realizado el día anterior (transporte, fotocopias, artículos de librería). Las respuestas fueron las siguientes:

8 8 8 12 12 12 20 20 19 25 25 27 44 33 17 17 7 6 18 18 18
24 25 15 15 15 16 16 16 10 10 9 9 19 19 8 20 22 23 23 40 32
30 29 28 17 17 13 13 13 16 16 15 15 15 23 23 21 14 14 21 10 10
12 11 12 12 21 21 21 17 28 28 17 17 18 18 18 14 8 15 15 18 20
27 25 30 40 11 14

- 1) La tabulación comienza ordenando los datos en forma creciente, disponiéndolos en un diagrama de pilas.

$$x_2 = \frac{12+18}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ y así sucesivamente se halla la marca de clase}$$

⋮

intervalos	x_i	f_i	F	f_r
[6 ; 12)	9	15	15	$= \frac{15}{90}=0,17$
[12 ; 18)	15	33	15+33=48	$= \frac{33}{90}=0,37$
[18 ; 24)	21	24	48+24=72	$= \frac{24}{90}=0,27$
[24 ; 30)	27	11	72+11=83	0,12
[30 ; 36)	33	4	87	0,04
[36 ; 42)	39	2	89	0,02
[42 , 48]	45	1	90	0,01
Total	X	90	X	1

Gráficos estadísticos

Un gráfico estadístico permite hacer una rápida lectura de los datos recolectados de una muestra.

Si la variable es **cuantitativa** los gráficos más convenientes son el circular o el de barras.

↳ Gráfico circular:

Se utiliza con el objeto de visualizar la importancia que tiene cada categoría de la variable, en base a la cantidad de datos que contiene del conjunto total.

Se utiliza una circunferencia de un radio cualquiera, luego los ángulos que corresponden a cada categoría de la variable están asignados en correspondencia con la frecuencia relativa de c/u de ellos.

Es decir: ángulo de la categoría i-ésima

$$\alpha_i^\circ = \frac{f_i}{n} \cdot 360^\circ = f_r \cdot 360^\circ$$

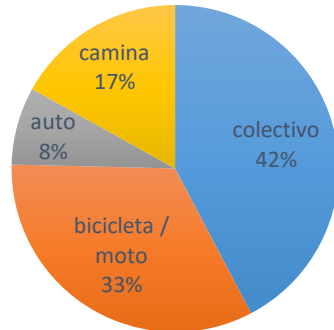
↳ Gráfico de barras

Cada clase se representa con una barra, se establece la altura de las barras teniendo en cuenta las frecuencias correspondientes.

Ejemplo para Variable cuantitativa

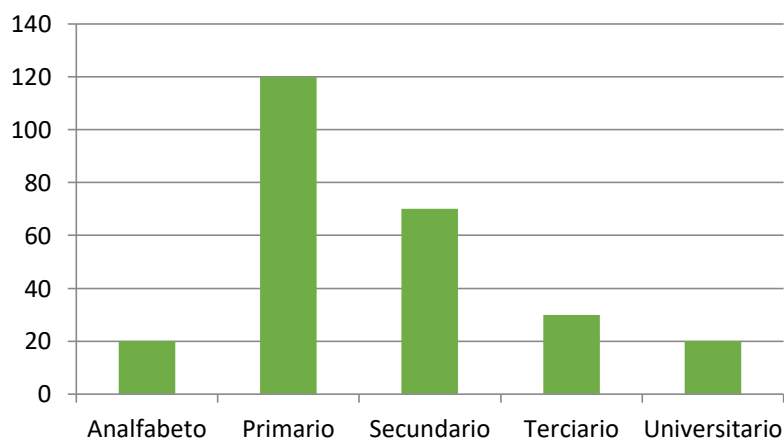
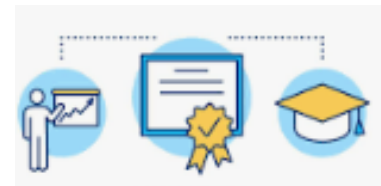
Se tomó una muestra de los alumnos del colegio (n = 260) y se les preguntó sobre el medio de transporte que utilizan para llegar al establecimiento. Las respuestas se presentan en la siguiente tabla:

Medio de transporte	f_i	f_r	α_i°	%
colectivo	110			
bicicleta / moto	86			
auto	20			
camina	44			
Total	260			



Nivel de instrucción alcanzado por el padre de los 260 alumnos entrevistados

Nivel de instrucción	f_i	F_i	f_r
Analfabeto	20		
Primario	120		
Secundario	70		
Terciario	30		
Universitario	20		
Total	260		



Si la variable es **cuantitativa y dividida en intervalos de clases** los gráficos más convenientes son el histograma y el polígono de frecuencias.

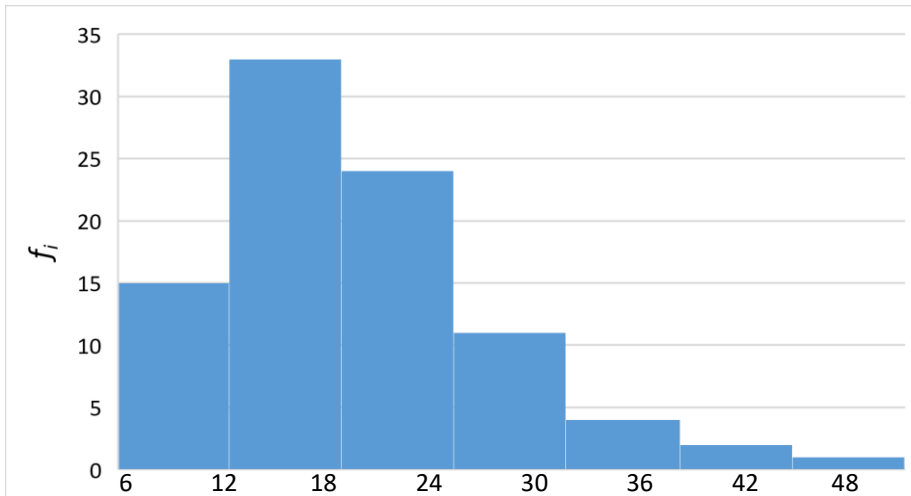
↳ Histograma:

En un sistema de coordenadas cartesianas se construyen rectángulos que tienen como base los intervalos de clases y como altura la frecuencia correspondiente a ese intervalo.

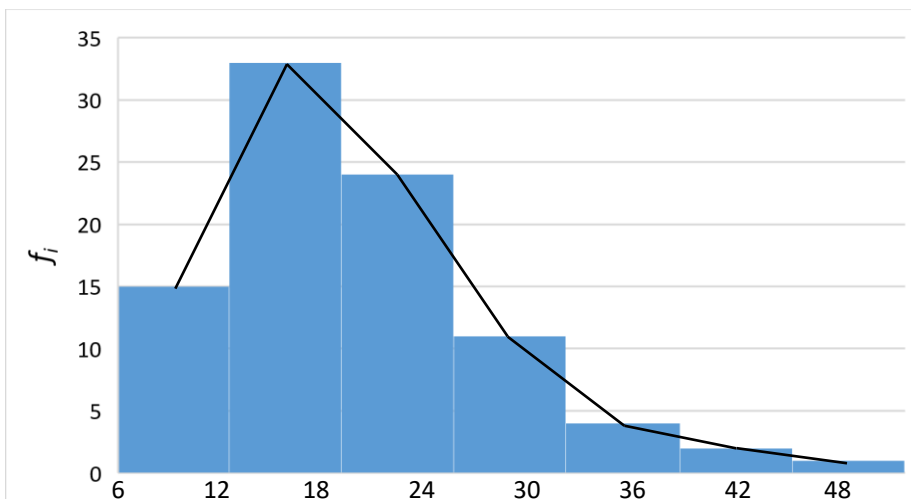
Polígono de frecuencias

Es un gráfico de líneas trazado sobre las marcas de clase. Puede obtenerse uniendo los puntos medios de los techos de los rectángulos en el histograma.

Histograma de frecuencias absolutas



Polígono de frecuencias absolutas



Actividades

- 1) Los datos de la lista corresponden al nivel de glucosa en la sangre de 50 individuos (en gramos/1000cm³).

0,85 0,89 1,10 0,85 1,21 0,87 0,91 0,85 1,10 0,89 1,20 0,87 1,20 0,89
 1,20 0,87 1,22 0,87 1,12 0,85 0,89 1,19 0,85 0,81 1,20 0,91 0,92 1,15
 1,21 1,10 0,87 1,12 1,12 1,12 0,83 1,10 0,85 1,12 0,87 0,90 0,90 1,10
 0,80 0,81 1,14 1,12 1,10 0,85 0,87 0,90

- ¿Cuál es la variable de estudio?
 - Clasificarla.
 - Realizar la tabla de frecuencia para datos agrupados.
 - Realizar el grafico correspondiente.
- 2) Una maquina envasa paquetes de galletitas de aproximadamente 500g, 20 de ellos pesan:

513g 495g 457g 522g 480g 507g 518g 533g 494g 547g
 512g 475g 525g 489g 541g 500g 545g 524g 503g 468g

- Construir la tabla de frecuencia para datos agrupados en intervalos de igual amplitud.
 - Realizar el histograma.
- 3) Para cierto juego, los participantes deben agruparse según la altura.

1,52 m 1,57 m 1,61 m 1,63 m 1,69 m 1,74 m 1,72 m 1,66 m 1,61 m 1,70 m
 1,65 m 1,70 m 1,74 m 1,46 m 1,60 m 1,72 m 1,66 m 1,68 m 1,64 m 1,52 m
 1,69 m 1,64 m 1,65 m 1,70 m 1,76 m 1,73 m 1,71 m 1,66 m 1,70 m 1,68 m

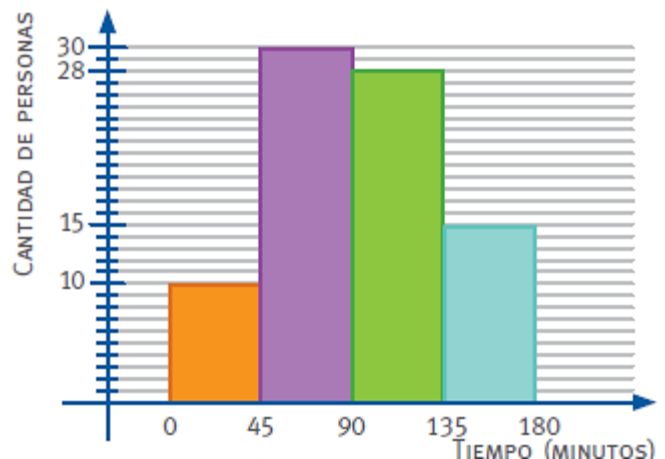
- Completar la tabla de frecuencia para datos agrupados en intervalos de igual amplitud.

Altura	x_i	f_i	f_r	F
[1,46; 1,51)				
[1,51;)				
[;)				
[;)				
[;)				
[;)				
Total				

- ¿Cuál es el tamaño de la muestra?
 - ¿Cuál es la amplitud de los intervalos?
 - ¿Cuántos intervalos hay?
 - Clasificar la variable.
- 4) Teniendo en cuenta el gráfico, resolver.

Se realizó una encuesta para saber cuánto tiempo al día mira televisión un grupo de personas de entre 20 y 25 años.

- Armar la tabla de frecuencias.
- ¿Cuántas personas fueron encuestadas?



Medidas de Posición y Dispersión

La tabulación y representación gráfica de los datos observados, es sin dudas el primer paso a seguir en el análisis e interpretación de un fenómeno. Ahora pasamos a otra etapa, que consiste en el **análisis y medición de datos**.

La comparación de distribuciones de frecuencias se hace relativamente fácil mediante los gráficos.

Pero cuando se trata de comparar tablas con muy abundantes datos, la tarea es compleja y poco clara.

Se observa generalmente una tendencia a agruparse alrededor de ciertos valores centrales llamados **medidas o parámetros de posición**. Los más conocidos son:

- La media aritmética (promedio)
- La mediana
- La moda

Estos parámetros caracterizan a la distribución y representan a los valores de la serie.

Pero para tener una idea más compleja de una distribución de frecuencias, además de los valores centrales, es necesario conocer la forma de **dispersión** de los datos, es decir, la desviación con respecto a los valores centrales.

Como el valor central más usado es el promedio los desvíos se miden con respecto a él.

Los parámetros de dispersión que analizaremos son:

- Varianza
- Desviación estándar

Medidas de Posición

a) Media aritmética (promedio)

Es el promedio de las observaciones. Esta medida se simboliza \bar{x} .

Para calcularla, pueden utilizarse las siguientes expresiones:

- ✓ Para distribuciones de **variables discretas**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{n}$$

f_i : es la frecuencia absoluta del intervalo

n : es el número total de observaciones

x_i : cada uno de los distintos valores que toma la variable

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n$$

- ✓ Para distribuciones de **variables continuas separadas en intervalos de clase**

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^k x_{mi} \cdot f_i}{n}$$

x_{mi} : es la marca de clase

f_i : es la frecuencia absoluta del intervalo

k : la cantidad de intervalos de la distribución

n : total de observaciones

La marca de clase se calcula: $x_{mi} = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$

b) La Moda

Es el valor de la variable que presenta la mayor frecuencia. Se simboliza **M_o**

- ✓ Para distribuciones de **variables discretas**

Es el dato que posee la mayor frecuencia.

- ✓ Para distribuciones de **variables continuas separadas en intervalos de clase.**

Es la marca de clase correspondiente al intervalo de mayor frecuencia absoluta.

c) La Mediana

Es el valor correspondiente a la posición central de la distribución, cuyos datos están ordenados en forma creciente (de menor a mayor). Es el valor que divide a la distribución en dos partes de igual cantidad de observaciones. Se simboliza **M_e**

- ✓ Para distribuciones de **variables discretas**

- si n es impar, es el dato numérico central;
- si n es par, es el promedio de los datos centrales.

- ✓ Para distribuciones de **variables continuas o con datos agrupados.**

$$Me = l_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{a\ m-1}}{f_m} \right) \cdot a$$

Donde:

l_i : es el límite inferior del intervalo de clase de la mediana.

n : tamaño de la muestra.

$f_{a\ m-1}$: es la frecuencia absoluta acumulada del intervalo anterior a la mediana.

f_m : es la frecuencia absoluta del intervalo correspondiente a la mediana

a : amplitud del intervalo

Ejemplo:

1) Sea la cantidad de asignaturas aprobadas por los estudiantes que ingresan a 2° año de una carrera universitaria. La variable es cuantitativa discreta.

x_i	f_i	f_r	f_{ai}	f_{ar}	$x_i \cdot f_i$
0	21				$0 \cdot 21 = 0$
1	29				$1 \cdot 29 = 29$
2	36				$2 \cdot 36 = 72$
3	30				
4	23				
5	13				
6	8				
7	13				
Total	173				

a) **Media aritmética:**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot f_i}{n} = \frac{487}{173} = 2,81$$

El promedio de asignaturas aprobadas es 2,81, esto es aproximadamente 3 materias aprobadas

b) **Moda:**

La mayor frecuencia absoluta es 36, por lo tanto el valor de la moda es: $M_o = 2$

Significa que la mayor cantidad de alumnos poseen 2 asignaturas aprobadas.

c) **Mediana:**

Como $n = 173$ (número impar) es el valor numérico central, es decir $\frac{n}{2} = \frac{173}{2} = 86,5$; por lo tanto la $M_e = 3$

2) Se le pregunto a 90 estudiantes elegidos en forma aleatoria, sobre el gasto realizado el día anterior (transporte, fotocopias, artículos de librería). Las respuestas fueron las siguientes:

8 8 8 12 12 12 20 20 19 25 25 27 44 33 17 17 7 6 18 18 18
 24 25 15 15 15 16 16 16 10 10 9 9 19 19 8 20 22 23 23 40 32
 30 29 28 17 17 13 13 13 16 16 15 15 15 23 23 21 14 14 21 10 10
 12 11 12 12 21 21 21 17 28 28 17 17 18 18 18 14 8 15 15 18 20
 27 25 30 40 11 14

La tabla de frecuencia es:

intervalos	x_{mi}	f_i	f_{ai}	f_r	f_{ar}	$x_i \cdot f_i$
[6 ; 12)	9	15				$9 \cdot 15 = 135$
[12 ; 18)	15	33				$15 \cdot 33 = 495$
[18 ; 24)						
[24 ; 30)						
[30 ; 36)						
[36 ; 42)						
[42 , 48]						
Total						

Media aritmética (promedio)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_{mi} \cdot f_i}{n} = \frac{1686}{90} = 18,73$$

el gasto promedio de los 90 estudiantes es de \$ 18,73

La Mediana

1. Determinamos el intervalo que contiene la mediana, para ello se efectúa:

$$\frac{n}{2} = \frac{90}{2} = 45$$

Se ubica en la columna de las frecuencias acumuladas f_{ai} quien es el primero contiene ese valor (45) . el intervalo buscado es el [12; 18).

2. Se obtienen el valor de la mediana

$$Me = l_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{a\ m-1}}{f_m} \right) \cdot a = 12 + \left(\frac{\frac{90}{2} - 15}{33} \right) \cdot 6 = 12 + \left(\frac{30}{33} \right) \cdot 6 = 17,45$$

$$Me = 17,45$$

Significa que a la izquierda de 17,45 se encuentran el 50% de las observaciones y hacia la derecha de ese valor el 50% de las observaciones restantes.

La Moda

1. Se obtiene el intervalo modal; el que presenta mayor frecuencia absoluta [12; 18).
2. El valor de la moda será la marca de clase de dicho intervalo

$$Mo = 16$$

ACTIVIDADES

- 1) La siguiente tabla muestra los valores de una encuesta realizada para conocer el número de veces que un estudiante de quinto año, revisa su celular en un día.

x_i	f_i	f_r	F	$x_i \cdot f_i$
24	5			
25	6			
26	9			
27	10			
28	2			
Total	32			



- a) Completar la tabla.
 - b) ¿Cuál es la mayor cantidad de veces que un estudiante revisa su celular? ¿Cómo se llama este parámetro?
 - c) Calcula la media aritmética
 - d) ¿Cuál es la mediana?
- 2) Se realizó un estudio acerca de los montos de ventas diarias, en pesos, de 25 comercios elegidos al azar. Los datos recopilados son los siguientes:

180	321	142	180	100
230	420	190	180	130
240	430	230	230	135
275	513	250	280	230
350	520	251	600	303

a) Completar la tabla.

intervalos	x_i	f_i	f_r	F	$x_i \cdot f_i$
[100; 184)		7			
[184; 268)		8			
[268; 352)		5			
[352; 436)		2			
[436; 520)		1			
[520; 604]		2			
Total	⊗	25		⊗	



b) ¿Cuál es la mayor cantidad de ventas diarias? ¿Cómo se llama este parámetro?

c) Calcula la media aritmética

d) ¿Cuál es la mediana?

Medidas de Dispersión

El uso de las medidas de dispersión, permite analizar un grupo de datos y obtener información en dos aspectos:

- Descubrir las irregularidades que existen y resumirlas por medio de un valor, como puede ser el promedio, la moda y la mediana.
- Establecer en qué medida, en un grupo de datos, estos se concentran o se dispersan alrededor de un valor típico, por ejemplo, el promedio.

La dispersión de un grupo de datos, con base en el promedio (valor típico) indica la confiabilidad de este valor, para inferir en relación con el resto de la población.

Por ejemplo, si la edad promedio en Argentina de la niñez que ingresa a primer grado de escuela, es de seis años y su dispersión es poca, esta información permite a las autoridades del Ministerio de Educación, diseñar contenidos temáticos dirigidos a niños de esta edad.

Por otro lado, si la dispersión es alta, tendríamos niños con edades diferentes al promedio de seis años, incluso, se puede tener niños con edades de 10 o más, lo que implicaría que el diseño de los contenidos temáticos iniciales, no se adaptaría de forma adecuada a los niños mayores.

Es importante señalar, que podemos encontrar diferentes grupos de datos con el mismo promedio, sin embargo, con diferente dispersión o variabilidad con respecto al valor típico (por ejemplo, al promedio).

Dentro de las medidas de dispersión más comunes, se tiene el recorrido, varianza, desviación estándar, dispersión relativa o coeficiente de variación.

1. Recorrido o amplitud total (R)

El recorrido es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor del conjunto de datos.

Ejemplo 1: si tenemos los siguientes valores, que representan una muestra del tiempo en minutos que duran en ser atendidos seis clientes en un banco: 10, 12, 14, 15, 20, 25, el recorrido será:

$$R = 25 - 10 = 15 \text{ minutos}$$

El recorrido presenta ciertas limitaciones que no hacen muy popular su uso, entre ellas, el no tomar en cuenta todos los datos, sea de la población o de la muestra, ya que su cálculo se realiza solamente tomando el valor mayor y el menor.

2. Varianza

La varianza es el promedio de la suma del cuadrado de las desviaciones de cada observación respecto de su media. Sus fórmulas para datos agrupados y datos no agrupados, son las siguientes:

Para la muestra
<p>Datos no agrupados</p> $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$
<p>Datos agrupados</p> $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$



Para datos no agrupados

Se ilustra el procedimiento de cálculo, con los siguientes valores.

Ejemplo 2: Suponga que los datos se refieren a una muestra de los días que pernoctan los turistas que ingresan por el Aeropuerto Internacional de Ezeiza, de la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Días	f_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	1	2	-4,11	16,90
3	1	3	-3,11	9,68
4	1	4	-2,11	4,46
5	3	15	-1,11	1,23
8	1	9	1,89	3,57
10	1	10	3,89	15,12
12	1	12	5,89	34,68
Total	9	55	X	85,64

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i \cdot f_i}{n} = \frac{55}{9} = 6,11$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{85,64}{9} = 9,51 = 10$$

Interpretación: El promedio del cuadrado de las distancias entre cada observación y el promedio de muestra, es de 10. Si las observaciones se expresan en días, la varianza queda en términos de días al cuadrado.

3. Desviación Estándar

La desviación estándar es el promedio de las desviaciones de cada observación respecto de su media. Indica cuánto se alejan en promedio las observaciones, de la media del conjunto. Es la medida de dispersión más usada en estadística. Su fórmula es la raíz cuadrada de la varianza:

Para la muestra
<p>Datos no agrupados</p> $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$
<p>Datos agrupados</p> $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}}$

Ejemplo: El siguiente conjunto de datos: 2, 3, 4, 5, 5, 5, 8, 10, 12, del ejemplo 2 tiene varianza de 10 y su desviación estándar es de:

$$\sigma = \sqrt{10} = 3,16$$

En promedio, el número de las noches que pernoctan los turistas que llegan al aeropuerto, se aleja 3,16 noches, a partir de la media.

Variancia en datos agrupados

Los datos u observaciones cuando se encuentran agrupados en una distribución de frecuencia, pierden su individualidad. Para calcular la varianza se requiere del cálculo previo de los puntos medios de cada clase, que vienen a ser el valor representativo de los datos u observaciones contenidas en cada clase. La frecuencia de cada clase representa el número de datos que se encuentran en cada una de las diferentes clases.

Ejemplo 3: Una empresa de auditoría es contratada por el banco BNG para determinar la dispersión en el monto de los cheques que se cambian diariamente en la oficina principal. Al director de operaciones del banco, le preocupa tener una desviación estándar en el monto de cambio mayor a \$200 ¿Debe preocuparse el director?

La siguiente distribución de frecuencia se presenta por la empresa auditora.

Obtener la variancia y la desviación estándar.

Clase (monto del Cheque) miles de dólares	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[0 ; 200)	10	100	1000	-490	240100	2401000

[200; 400)	13	300	3900	-290	84100	1093300
[400; 600)	17	500	8500	-90	8100	137700
[600; 800)	42	700	29400	110	12100	508200
[800; 1000]	18	900	16200	310	96100	1729800
Total	100		59000			5870000

Calculamos el promedio:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i}{n} = \frac{59000}{100} = 590$$

Calculamos la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{5870000}{100} = 58700$$

Desviación Estándar:

$$\sigma = \sqrt{58700} = 242,28$$

4. Dispersión Relativa o Coeficiente de variación (CV)

La dispersión relativa, permite comparar diferentes grupos de datos, en cuanto a su variabilidad, ya sea que estén expresados en la misma unidad de medida o en unidades distintas, o bien, exista una gran diferencia entre los promedios de los conjuntos de datos. Es el desvío promedio de las observaciones respecto del promedio. Se calcula dividiendo la desviación estándar entre el promedio. Su fórmula es:

Para la muestra
$Cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$

Ejemplo 4: Una empresa dedicada al empaque de comida rápida le interesa medir la variabilidad de los diferentes turnos de trabajo. En una muestra de cinco horas para los turnos de trabajo diurno y nocturno, se obtuvo el siguiente conteo por hora:

Turno diurno: 700, 715, 699, 720, 718.

Turno nocturno 675, 695, 725, 740, 750.



Calcule el coeficiente de variación para cada turno de trabajo.

Turno Diurno	
x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
699	129,96
700	108,16
715	21,16
718	57,76
720	92,16
Total: 3552	409,2

Turno Nocturno	
x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
675	1764
695	484
725	64
740	529
750	1089
Total: 3585	3930

Turno Diurno	
Promedio	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i}{n}$ $= \frac{3552}{5} = 710,4$

Turno Nocturno	
Promedio	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i}{n}$ $= \frac{3585}{5} = 717$

Varianza	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{n}$ $= \frac{409,2}{5} = 81,84$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{81,84} = 9,05$
Coefficiente de variación	$Cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ $= \frac{9,05}{710,4} \cdot 100\%$ $= 1,27$

Varianza	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{n}$ $= \frac{3930}{5} = 786$
Desviación estándar	$\sigma = \sqrt{786} = 28,04$
Coefficiente de variación	$Cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ $= \frac{28,04}{717} \cdot 100\%$ $= 3,91$

En el turno nocturno se presenta una mayor variabilidad porcentual.

Ejercicios

Ejercicio 1. Se realiza una encuesta de salida en el Aeropuerto Internacional Ezeiza, de la ciudad de Buenos Aires, con el objetivo de conocer el gasto realizado en dólares de los turistas con permanencia en Argentina. Se obtiene la siguiente información.

Clase (gastos en dólares)	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[500; 550)	12				
[550; 600)	14				
[600; 650)	18				
[650; 700)	10				
[700; 750]	6				
Total					

Calcular promedio, moda, mediana, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Ejercicio 2. Según una muestra realizada por el Ministerio de Comercio Exterior, las importaciones de bienes y servicios en millones de dólares, por producto, para el año 2019, se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias:

Importaciones en millones de dólares	Cantidad de productos f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[5; 10)	10				
[10; 15)	12				
[15; 20)	18				
[20; 25)	22				
[25; 30)	24				
[30; 35]	26				
Total					

Calcular promedio, moda, mediana, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Ejercicio 3. Los datos siguientes corresponden a una muestra de las comisiones ganadas por corredores de bolsa de valores durante el mes de diciembre del 2019, en miles de dólares.

Miles de dólares	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[5; 10)	3				
[10; 15)	4				
[15; 20)	6				
[20; 25)	5				

[25; 30]	3				
Total					

Calcular promedio, moda, mediana, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Probabilidades

Un *suceso aleatorio* (S) es un hecho que depende exclusivamente del azar y del que no se pueden anticipar sus resultados.

El *espacio muestral* (E) de un suceso son todos los resultados posibles.

Ejemplo: Se lanza una moneda al aire. El espacio muestral será $E = \{\text{cara o ceca}\}$



Definición:

La *probabilidad* $P(S)$ de que ocurra un suceso aleatorio surge de dividir la cantidad de casos favorables a este suceso por el espacio muestral, y es un número entre 0 y 1.

$$P(S) = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}}$$

Esta definición recibe el nombre de **definición clásica de probabilidad**.

Si S es un suceso **seguro**, $P(S) = 1$.

Por ejemplo, la probabilidad de que al arrojar un dado equilibrado salga un número mayor que 0 y menor que 7 es 1, porque es un suceso seguro.

Si S es un suceso **imposible**, $P(S) = 0$.

Por ejemplo, la probabilidad de que salga un número mayor que 6 al arrojar un dado equilibrado es 0, porque es un suceso imposible.

La probabilidad de que ocurra un suceso S verifica que:

$$0 \leq P(S) \leq 1$$

Ejemplo: Una caja tiene 27 tarjetas, cada una con una letra del abecedario español (no están la **ch** ni la **ll**). ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una vocal?

Casos favorables: $A = \{a; e; i; o; u\}$

Por lo tanto, $P(A) = \frac{5}{27}$

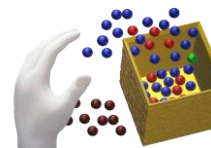


Actividades.

- Escribir el espacio muestral de cada suceso.
 - Arrojar un dado y una moneda.
 - Adivinar el estado civil de una persona elegida al azar.
 - El signo zodiacal de una persona elegida al azar.
 - Sacar un número de un mazo de 40 cartas.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de espada?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de oro y mayor que 3?
- ¿Cuál es la probabilidad de ganar una rifa de 500 números si se compran 10?
- De un mazo de 40 cartas españolas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta múltiplo de 3?
- ¿De un mazo de 50 cartas españolas cuál es la probabilidad de obtener una figura?



7. En una bolsa hay 10 fichas iguales con los siguientes colores: 1 verde, 3 azules, 4 blancas y 2 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una ficha de color blanco?



8. En un estante hay 3 libros de matemática y dos de biología. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan elija (sin mirar) dos libros de matemática?

9. En una bolsa hay 6 medias blancas y 8 negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una media blanca?



10. Se lanza al aire una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara y un número par?

Probabilidad de sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** o **mutuamente excluyentes** si no pueden ocurrir ambos a la vez.

Si los sucesos A y B son **incompatibles**, la probabilidad de que ocurra el suceso A o el suceso B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

$$A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar un dado equilibrado salga un número primo o un múltiplo de 6?

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$A = \{\text{Que salga un número primo}\} = \{2; 3; 5\}$$

$$B = \{\text{Que salga un múltiplo de 6}\} = \{6\}$$

Se observa que A y B son sucesos incompatibles



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Probabilidad de sucesos compatibles

Si dos sucesos A y B tienen algún elemento en común, se llaman **compatibles**, pueden ocurrir juntos.

Si dos sucesos A y B son **compatibles**, para calcular la probabilidad de que ocurra alguno de ellos o ambos hay que sumar las probabilidades de cada uno y descontar la probabilidad de que se produzcan a la vez.

$$A \text{ y } B \text{ compatibles} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ley de la probabilidad total

Ejemplo: Al arrojar un dado equilibrado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par o salga un 4?

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$A = \{\text{Que salga un número par}\} = \{2; 4; 6\}$

$B = \{\text{Que salga 4}\} = \{4\}$

Se observa que A y B son sucesos compatibles, ya que el número 4 aparecen en los dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Actividades

- 1) Se arrojan dos dados equilibrados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea menor que 6 o múltiplo de 4?
- 2) Se arrojan 3 monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras o dos cecas?
- 3) Se arrojan dos dados equilibrados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea menor que 4 o mayor que 9?
- 4) En una urna hay 9 tarjetas: 3 rojas, 3 verdes y 3 azules, numeradas las de cada color de 1 al 3. ¿cuál es la probabilidad de sacar al azar un 1 o una tarjeta azul?

Probabilidad condicionada

Si A y B son dos sucesos compatibles, donde la P(A) y la P(B) son no nulas, la probabilidad del suceso B condicionada al suceso A es la probabilidad de que **ocurra B si ya se produjo A**. Se lo representa **P(B/A)** y se calcula con la expresión:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo: En un curso hay 54 alumnos. Se forman dos grupos, cuya composición se muestra en la siguiente tabla. Tomando al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido una alumna sabiendo que es del grupo 1?

	Varones	Mujeres	Total
Grupo 1	15	12	27
Grupo 2	14	16	30
Total	29	28	57

$A = \{\text{elegir una alumna}\}$

$B = \{\text{elegir alguno del grupo 1}\}$

$$P(A \cap B) = P\{\text{elegir una alumna y que este en el grupo 1}\} = \frac{12}{57}$$

$$P(B) = P\{\text{elegir alguno del grupo 1}\} = \frac{27}{57}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{12}{57}}{\frac{27}{57}} = \frac{12}{27}$$

Actividades

- 1) En un curso hay 54 alumnos. Se forman dos grupos, cuya composición se muestra en la siguiente tabla. Tomando al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido un varón sabiendo que es del grupo 2?

	Varones	Mujeres	Total
Grupo 1	15	12	27
Grupo 2	14	16	30
Total	29	28	57

- 2) Al turno mañana de un curso concurren 25 mujeres y 12 varones; al turno tarde, 20 mujeres y 23 varones. Se eligió un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de haber elegido un varón, sabiendo que es del turno tarde? ¿Y la de haber elegido un estudiante del turno mañana, sabiendo que es mujer?
- 3) Una urna contiene 4 fichas blancas y 6 negras. Se saca una y, sin reponerla en la urna, se extrae otra. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas fichas sean blancas? ¿Y de que sean la primera blanca y la segunda negra?

Probabilidad de sucesos dependientes

Dos sucesos A y B son **dependiente** si el hecho de que ocurra uno de ellos afecta la probabilidad de que se produzca el otro.

Para calcular la **probabilidad de sucesos dependientes**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Ejemplo: En una urna hay 5 fichas rojas y 5 azules. Se extrae una al azar y, sin reponerla en la urna, se extrae otra. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean rojas?

Que la primera ficha sea roja afecta la probabilidad de que la segunda también lo sea, esto es, si no hay reposición de la primera ficha, la probabilidad de volver a sacar otra del mismo color se modifica.

Para la primera ficha, $P(A) = \frac{5}{10}$

Si la primera ficha no se repone en la urna, la probabilidad de que la segunda sea roja sabiendo que la primera fue roja es $P(B/A) = \frac{4}{9}$, porque hay una ficha roja menos en la urna.

Finalmente: $P(\text{sacar dos veces sucesivas una ficha roja}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

Probabilidad de sucesos independientes

Dos sucesos A y B son **independiente** si el hecho de que ocurra uno de ellos no afecta la probabilidad de que se produzca el otro.

Para calcular la **probabilidad de sucesos independientes**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

En el **ejemplo anterior** se repone la primera ficha en la urna:

$$P(\text{Sacar dos veces sucesivas una ficha roja}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$$

Actividades

- 1) En una caja hay 12 bolillas rojas y 10 blancas.
 - a) Si se extraen dos bolillas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad que las dos bolillas extraídas sean rojas?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bolilla sea blanca siendo roja la primera?
- 2) Calcular la probabilidad de que de una bolsa en la que hay 15 caramelos de naranja y 14 caramelos de frutilla saque dos caramelos de frutilla seguidos.
- 3) De un mazo de 40 cartas españolas, ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos figuras seguidas reponiendo la primera carta al mazo?



Revisión Final de todo lo visto

- 1) Clasificar en cualitativa o cuantitativa discreta o continua a cada una de las variables.
 - a) Tipo de música que pasan por una radio FM.
 - b) Cantidad de personas que usan bicicletas como medio de transporte.
 - c) Color preferido por un grupo de chicas.
 - d) Estatura de un grupo de empleados de una empresa.
- 2) Una agencia de turismo llevó a cabo una encuesta a 100 estudiantes de último año de secundaria para conocer cuál es su destino turístico preferido para un viaje de fin de curso. A partir de esta situación, Responder:
 - a) ¿Cuál es la población analizada?
 - b) ¿Cuál es la muestra?
 - c) ¿Cuál es la variable estadística?
- 3) Se pidió realizar un análisis estadístico sobre un conjunto de datos que representa el número de turistas que visitaron un parque recreativo durante 25 días consecutivos.
5, 7, 8, 5, 10, 12, 6, 7, 8, 6, 7, 9, 8, 7, 10, 11, 12, 5, 9, 8, 7, 6, 10, 9, 8
 - a) Construir la tabla de frecuencia y realizar el gráfico correspondiente.
 - b) Calcular el promedio del número de turistas por día.
 - c) Calcular la mediana del número de turistas por día.
 - d) Determinar la moda del número de turistas por día.
- 4) Se ha realizado una encuesta a 30 turistas sobre cuánto dinero (en miles de pesos) gastaron en actividades recreativas durante su estadía en un resort. Los gastos son los siguientes:

5	7	8	10	9	6	8	11	12	13
12	17	19	20	16	13	18	21	23	22
14	11	12	10	9	13	8	6	5	7

 - a) Arma una tabla de frecuencias en intervalos de **igual amplitud**.
 - b) Hallar el promedio de los gastos.
 - c) Calcular las medidas de posición: mediana y moda.
 - d) Obtener varianza, desviación estándar y coeficiente de variación
- 5) Se arrojan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos números sea menor que 6?
- 6) ¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar un dado salga un número primo?
- 7) ¿Cuál es la probabilidad al arrojar una moneda que salga cara?
- 8) De un mazo de 40 cartas españolas, ¿cuál es la probabilidad de sacar el 6 de oro?
- 9) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una cara y una seca al arrojar dos monedas al aire?
- 10) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de bastos o menor que 5?