COLEGIO SANTA ROSA DE LIMA

"Sembradores de esperanza, artesanos de fraternidad"

Asignatura: *Matemática.* ***Profesoras:*** *Paola Sánchez, Cecilia Vallejo.*
Cursos: *4° "A", 4° "B".*

"Cuando Dios te quiere,
te busca, te sigue,
te persigue y
te consigue."

Potencias de la Unidad Imaginaria

Aplicando las propiedades de potenciación en R, se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria i.

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$
$$i^1 = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \qquad i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Y así sucesivamente se observa que las potencias de **i** son: 1, i, -1 y –i y se repiten periódicamente

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$

El resultado de elevar la unidad imaginaria a un número natural n es igual a elevarlo al resto de la división entre n y 4. Por ejemplo:

$$i^{75} = i^3 = -i$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 4 \\ \hline \mathbf{3} & 18 \end{array}$$

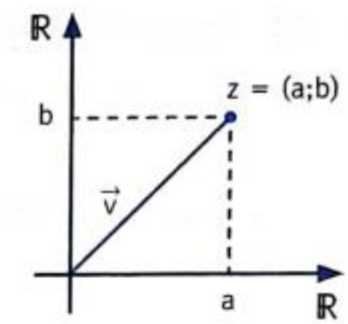
Actividad 1: Une con la respuesta correcta.

a. $\sqrt{3}\ i^{35}\ .\ i^{29}\ =$	• -1
b. $i^{23}\ :\ i^{13}\ =$	• $\sqrt{3}\,i$
c. $i^{30}\ .\ i^{12}\ :\ i\ =$	• 1
d. $\sqrt{3}\ i^{18}\ :\ i^{13}\ =$	• i
e. $i^{12}\ .\ i^{15}\ :\ i^{17}\ =$	• $\sqrt{3}$
f. $i^{13}\ :\ (i^{4}\ .\ i^{18})\ =$	• $-i$

Módulo de un número complejo

A cada número complejo $z = (a;b)$ le está asociado un vector $\vec{v}$, con origen en el punto $(0;0)$ y extremo en el punto $(a;b)$.

De este modo se puede hacer corresponder un vector a cada número complejo.

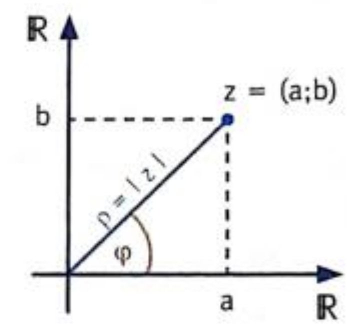


El módulo de ese vector es el **módulo del complejo** y se representa con la letra ρ.

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = 2 + 3i \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al ángulo $\hat{\varphi}$ se lo llama **argumento.**



Operaciones con números complejos

Suma y resta

Para sumar o restar dos o más números complejos, se deben sumar o restar por un lado las componentes reales entre sí y por otro lado, las componentes imaginarias. En símbolos:

Por ejemplo:

Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ calcular: $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$

Resolución:

$$z_1 + z_2 = (-3+5i)+(-1-2i)$$
$$z_1 + z_2 = (\text{-}3\text{ - }1)+(5\text{i - }2\text{i})$$
$$z_1 + z_2 = \text{-}4 + 3\text{i}$$

$$z_1 - z_2 = (-3+5i)-(-1-2i)$$
$$z_1 - z_2 = (\text{-}3+1)+(5\text{i}+2\text{i})$$
$$z_1 - z_2 = \text{-}2 + 7\text{i}$$

<u>Actividad 2</u>: Resuelve las siguientes sumas algebraicas.

a. $2i+8i+(-3i)=$

b. $5i+1-\dfrac{1}{3}i-5+2i=$

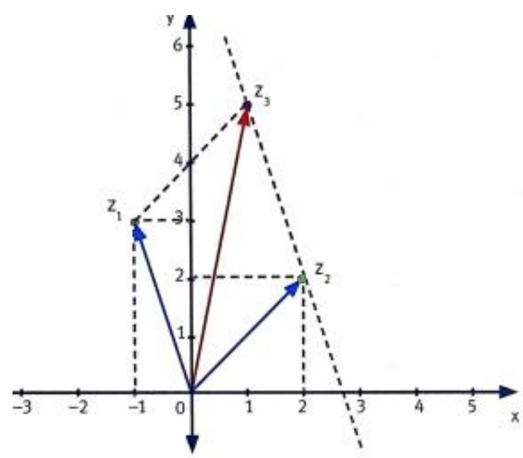
c. $(3-i)-(4+3i)+(1-2i)=$

d. $\left(\dfrac{1}{2}+2i\right)+\left(-\dfrac{1}{3}+4i\right)-\left(\dfrac{1}{2}-i\right)=$

Suma y resta de enteros en forma gráfica.

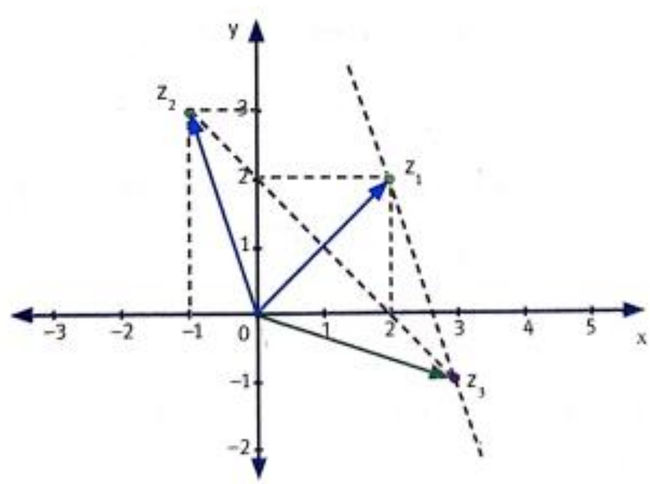
Para **sumar gráficamente dos números** complejos ($z_1 + z_2$), se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza la recta paralela al vector asociado a uno de los números complejos (z_1) que pase por el otro (z_2).
2. Se traza un vector con origen en z_2 con el mismo módulo y sentido que z_1. El extremo de ese vector determina z_3 ($z_1 + z_2$).



Para **restar gráficamente dos números complejos** ($z_1 - z_2$), se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza la recta paralela al vector asociado a uno de los números complejos (z_2) que pase por el otro (z_1).
2. Se traza un vector con origen en z_1 con el mismo módulo y sentido opuesto a z_2. El extremo de ese vector determina z_3 ($z_1 - z_2$).



Multiplicación.

Para multiplicar dos números complejos en forma binómica se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y/o resta.

Ejemplo: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 - 2i$ calcular: $z_1 \cdot z_2$

Resolución:

$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (-1 - 2i)$

$z_1 \cdot z_2 = -3 \cdot (-1 - 2i) + 5i \cdot (-1 - 2i)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 + 6i - 5i - 10i^2$

$z_1 \cdot z_2 = 3 + i - 10 \cdot (-1)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 + i + 10$

$z_1 \cdot z_2 = 13 + i$

Actividad 3: Resuelve.

a. $(-2 + 3i) \,.\, (-2 - 3i) =$ ______

b. $(4 - 5i) \,.\, (-2 - i) =$ ______

c. $(\sqrt{7} + \sqrt{5}\,i) \,.\, (\sqrt{7} - \sqrt{5}\,i) =$ ______

d. $\left(5;\frac{3}{2}\right) . \left(4;\frac{1}{3}\right) =$ ______

División

Para dividir dos números complejos en forma binómica se multiplica al dividendo y al divisor por el conjugado del divisor, y luego se resuelven las operaciones resultantes

Ejemplo: Dados $z_1 = -3 + 5i$ y $z_2 = -1 + 2i$ calcular: $z_1 \div z_2$

Resolución: $\dfrac{-3+5i}{-1+2i} = \dfrac{-3+5i}{-1+2i} \cdot \dfrac{-1-2i}{-1-2i} = \dfrac{-3 \cdot (-1-2i) + 5i \cdot (-1-2i)}{(-1)^2 - (2i)^2} = \dfrac{13+i}{1-4i^2} = \dfrac{13+i}{1+4} = \dfrac{13+i}{5} = \dfrac{13}{5} + \dfrac{1}{5}i$

Actividad 4: Resuelve.

a) $\dfrac{4+2i}{4-2i}=$

b) $\dfrac{2+i}{3-2i}=$

c) $\dfrac{(6+2i)\cdot(5+3i)}{2+2i}=$

Actividad 5: Desarrolla las siguientes potencias.

a) $(3-5i)^2=$

b) $(-1+3i)^2=$

c) $(2-i)^2=$

Operaciones combinadas.

Las **operaciones combinadas entre números complejos** se resuelven respetando la jerarquía de cada una de ellas.

1.° Se resuelven las potencias y raíces;

2.° se resuelven las multiplicaciones y divisiones;

3.° se resuelven las sumas y restas.

Los paréntesis alteran el orden de resolución de las operaciones.

$$\frac{(3+i).(4-2i)}{(5+i)^2}=\frac{3.4+3.(-2i)+i.4+i.(-2i)}{5^2+2.5.i+i^2}$$ *Se resuelven la multiplicación y el cuadrado del binomio.*

$$=\frac{12-6i+4i+2}{25+10i-1}$$

$$=\frac{14-2i}{24+10i}\cdot\frac{24-10i}{24-10i}$$ *Se resuelve la división.*

$$=\frac{14.24+14.(-10i)-2i.24-2i.(-10i)}{24^2+10^2}$$

$$=\frac{336-140i-48i-20}{576+100}$$

$$=\frac{316-188i}{676}$$

$$=\frac{316}{676}-\frac{188}{676}i$$

$$=\frac{79}{169}-\frac{47}{169}i$$

<u>Actividad 6</u>: Resuelve los siguientes cálculos combinados.

$a)\ \dfrac{3-i}{2i^{12}-5i^{3}} =$

$b)\ \dfrac{2-i^{14}}{2+i} =$

$c)\ \dfrac{i^{3}+3i^{2}+i}{-1-i^{7}} =$

Antes de terminar, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aprendiste en esta guía? ¿Qué relación tiene con lo trabajado en la guía anterior?

b) ¿Qué dificultades tuviste para comprender el tema?

c) ¿Cuál de las operaciones te resultó más compleja? ¿Por qué?