Colegio San Bernardo
Prof. Sergio Baigorria
E-mail: actividadesBaigorria@gmail.com
3° año bachiller adultos
Turno tarde

Matemática

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Aprender a aprender	Reconocimiento de necesidades personales de aprendizaje. Reconocimiento de los errores como parte del proceso.	Ecuación. Ecuación de primer grado. Sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Métodos de resolución por gráficos y por determinates.

Criterios de evaluación
• Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y ordenada los ejercicios.

Consultas: a actividadesBaigorria@gmail.com o vía Nodos.
Fecha de presentación: hasta el viernes 22 de mayo de 2020.
Devolución del docente: viernes 29 de mayo de 2020.

Alumno: …………………………………………………………………….

Fecha: …… /…… /……….

Guía n°4
Sistemas de ecuaciones lineales
continuación

Hola.
Espero que estén bien. En estos días, lo más importante es cuidarnos emocionalmente, y físicamente también respetando las medidas impuestas por el gobierno.

Introducción

En esta guía, continuaremos viendo dos métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sería bueno que tengas presente el primer tema de teoría de la guía anterior en la que introdujimos los sistemas de ecuaciones lineales.

Dicho esto, empecemos

Métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales

En esta oportunidad, resolveremos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante dos **métodos** nuevos que describimos a continuación:

- **Método gráfico:** consiste en despejar siempre las incógnitas y de ambas ecuaciones. Una vez despejadas, realizamos las gráficas de las dos rectas en un solo sistema de ejes cartesianos. El punto donde se intersectan o cruzan esas rectas tiene en sus coordenadas x e y a la solución del sistema de ecuaciones.
- **Método de determinantes:** identificar los coeficientes o números de las ecuaciones del sistema y usarlos para calcular las incógnitas mediante dos fórmulas, una para calcular x y la otra para y.

Ambos métodos son más fáciles que los de la guía anterior, aunque requieren mucha concentración.
Veremos con ejemplos cómo resolver un sistema de ecuaciones usando estos nuevos métodos.

Como el primer método que veremos es el método gráfico, necesitamos hacer un repaso del año pasado sobre **cómo graficar una función lineal en un sistema de ejes cartesianos**.

Una de las maneras más comunes de escribir una función lineal es la siguiente:

variable independiente

variable dependiente

$$y = m\,x + h$$

Pendiente

Ordenada al origen

Por ejemplo:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

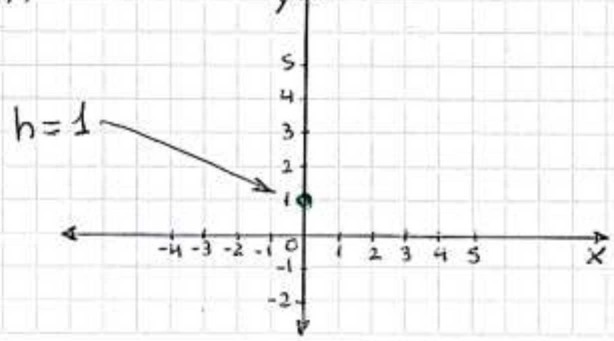
pendiente: $m = \frac{1}{2}$

ordenada al origen: $h = 1$

Para graficarla en un sistema de ejes cartesianos, hay dos métodos: el método analítico (donde se analizan la pendiente y la ordenada al origen para graficarla) y el método tabular (donde hago una tabla con algunos valores para x, calculo los valores para y, y luego grafico en los ejes cartesianos).

Veremos aquí el método más ágil para graficar la función lineal en un par de ejes cartesianos: el método analítico. Lo apliquemos al ejemplo anterior.

- Separo en términos:
  La pendiente es el coeficiente que está en el término con x (término lineal). En el ejemplo, $m = 1/2$.
  La ordenada al origen es el coeficiente (o número) que está en el término sin x (término independiente). En el ejemplo, $h = 1$.
- Grafico el primer punto de la gráfica:
  Siempre empiezo con la ordenada al origen (significa "cuánto vale y para $x = 0$"). Dibujo mi primer punto sobre el eje y en el valor que indica la ordenada al origen:

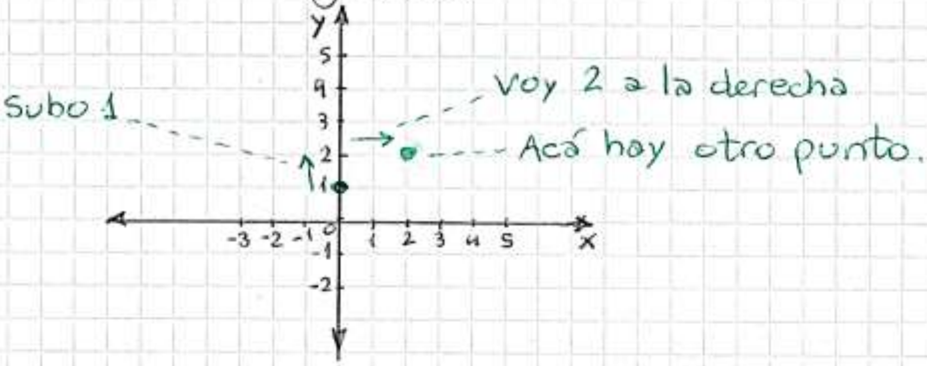


- Grafico otros puntos:
Para esto, uso la pendiente. Siempre debo analizar la pendiente como una fracción, con numerador y denominador. En el ejemplo, $m = \frac{1}{2}$. Se analiza así:

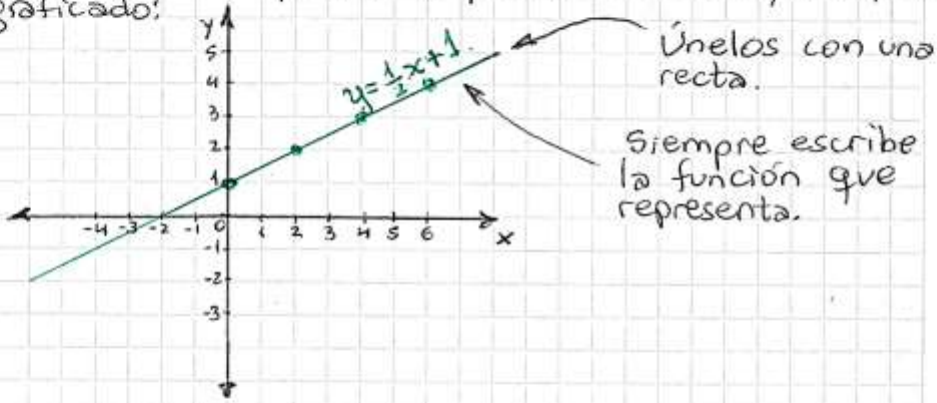
$m = \frac{1}{2}$

→ Para encontrar y graficar otro punto, voy a subir, a partir de cualquier punto ya graficado, tantas unidades como diga el numerador...

→ ...y voy a ir hacia la derecha tantas unidades como diga el denominador.
En este lugar, hay otro punto: lo grafico.



Puedes encontrar más puntos a partir de cualquier punto ya graficado:



¡Listo! Recuerda que las rectas son infinitas, pero las dibujamos cortas para que entren en el espacio de trabajo. Así que hazlas tan largas como puedas siempre dentro de un espacio razonable, como hice yo en el dibujo.

Es <u>MUY IMPORTANTE</u> que hagas bien las escalas en los ejes cartesianos, **dejando la misma distancia entre las unidades**, o sea, dejar la misma distancia entre el 0 y el 1, y entre el 1 y el 2, y así sucesivamente. Usa una regla o el cuadriculado del cuaderno para marcar las unidades en los ejes. <u>Si te quedan las unidades de la escala de los ejes a distintas distancias entonces la recta que dibujes no te quedará derecha</u>.

¿Qué hago si faltan coeficientes (números) para el análisis? Veamos ejemplos:

$y = 2x + 3$

Si no tiene denominador, es 1. $m = 2 = \frac{2}{1}$

$y = x - 4$

Si no está escrito la pendiente, vale 1.
$m = 1 = \frac{1}{1}$ ← Necesitas al denominador.

$y = 2$

Si falta todo el término lineal (el de la x) entonces vale 0.
$m = 0 = \frac{0}{1}$

$y = -\frac{3}{2}x + 1$

Si la pendiente es negativa, dale el signo negativo solo al numerador. En vez de subir para encontrar otro punto, por ser negativo, deberás bajar. Con el denominador sigue como antes, yendo a la derecha.

$m = \frac{-3}{2}$ ← Negativo: baja. (numerador) ← Sigue yendo a la derecha. (denominador)

$y = \frac{2}{3}x$

Si falta el término independiente (el que no tiene x), vale 0.

$h = 0$ ← La recta pasa por el origen del sistema de ejes cartesianos.

Si la pendiente es	Positiva $0 < m$	Nula $m = 0$	Negativa $m < 0$
La recta va (mirándola de izquierda a derecha)	Hacia arriba	Horizontal	Hacia abajo

Ahora sí, veamos un ejemplo. Resolveremos un ejemplo usando el **método gráfico**:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resuelve el sistema usando el método gráfico:

En este método, siempre despejamos y de las ecuaciones y las graficamos en un solo sistema de ejes cartesianos.

De la 1ra ecuación:

$$2x + 3y = 12$$

$$3y = 12 - 2x$$

$$y = \frac{12 - 2x}{3}$$

Distribuyo el divisor:

$$y = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \frac{2}{3}x$$

Simplifico:

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

Solo por claridad, lo ordeno:

$$y = -\frac{2}{3}x + 4$$

$$m = -\frac{2}{3} \qquad h = 4.$$

De la 2da ecuación:

$$x - y = 1$$

No puede quedar negativa

$$x = 1 + y$$

☺ Listo

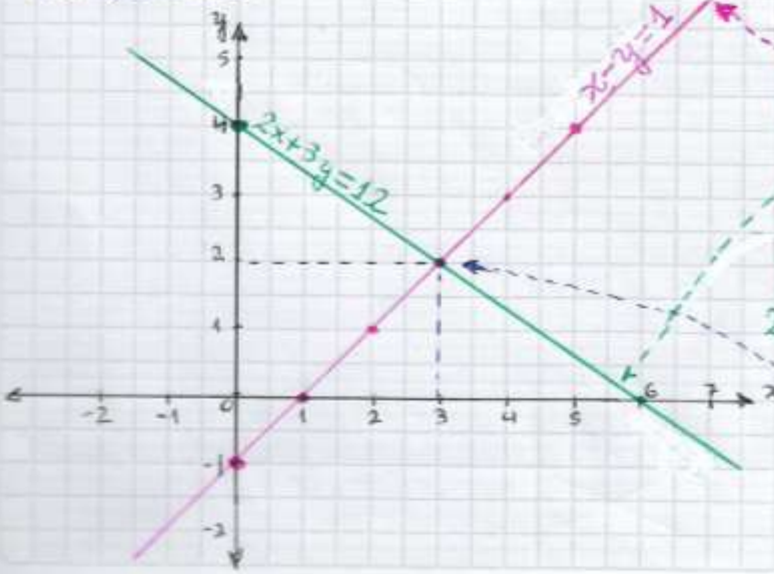
$$x - 1 = y$$

Solo por claridad, la ordeno:

$$y = x - 1$$

$$m = \frac{1}{1} \qquad h = -1.$$

Ahora, las grafico a ambas en el mismo sistema de ejes cartesianos.



Esta recta, $y = x - 1$ representa las infinitas soluciones de la ecuación $x - y = 1$

Esta otra recta, $y = -\frac{2}{3}x + 4$ representa las infinitas soluciones de la ecuación $2x + 3y = 12$

El punto donde se cruzan es la solución del sistema de ecuaciones:

$$x = 3 \quad ; \quad y = 2.$$

Conclusiones:

El **método gráfico** se trata de:

- Primero, despejar siempre y de las dos ecuaciones del sistema.
- Identificar la ordenada al origen h y la pendiente m en ambas ecuaciones.
- Luego, graficar las dos funciones lineales en un solo sistema de ejes cartesianos.
- Para terminar, la solución para x e y son las coordenadas del punto donde se intersectan las dos rectas.

Actividad 1

Para el siguiente sistema de ecuaciones, intenta obtener los valores de las incógnitas usando el **método gráfico**.

$$\begin{cases} -2x + y = 2 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

Los resultados que vas a obtener deben ser

x = -2

y = -2

En el próximo método, usaremos algunos conceptos nuevos.

Una **matriz** es un arreglo o una disposición de elementos (que pueden ser numéricos o variables) ordenados en columnas y filas, de forma rectangular.
Se representan con una letra imprenta mayúscula y sus elementos se presentan ordenados en filas y columnas y encerrados entre paréntesis. Por ejemplo, la matriz llamada M tiene los elementos a, b, c y d:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo, la matriz A y sus elementos ordenados en filas y columnas. (Aclaro que los elementos tienen ese orden y no pueden cambiarse de lugar.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

El **determinante de una matriz** es un número (que sólo se puede calcular si se trata de una matriz cuadrada, es decir, aquella en que el número de filas y de columnas coincide). Para anotarlo, se escribe el nombre de la matriz entre dos barras verticales “| |”.

¿Cómo se calcula el determinante de una matriz?

Con esta fórmula:

1° 2°

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Lo más importante es no olvidarse los signos negativos. ¡Cuidado!

Primero se resuelve la multiplicación con su regla de signos: "Si la cantidad de negativos es impar, da negativo".

Luego, se resuelve la resta. Recuerda que si hay un signo "−" adelante de un paréntesis, se suprimen los paréntesis y el signo de adelante, mientras que el signo de adentro, cambia. Por ej: $-(-5) = \cancel{-(}-5\cancel{)} = +5$.
La regla de signos de suma y resta es: ⊕ "tengo", ⊖ "debo".

Ejemplo: Calcula el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 =$$

Primero resuelvo el producto:

$$= \underbrace{3 \cdot 1} - \underbrace{(-2) \cdot 4} =$$

$$= 3 \cancel{-} \cancel{(}-8\cancel{)} =$$ Suprimo paréntesis.

$$= 3 + 8 = \boxed{11}$$ ← Determinante.

Actividad 2

Calcula el determinante para la siguiente matriz. El resultado debe ser -7.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Mucho cuidado con el orden de las operaciones y las reglas de signos.

Vamos a ver cómo es el **método por determinantes**. Parece complicado, pero es muy fácil. Solo observa el orden en que aparecen los coeficientes (números) en el sistema de ecuaciones. Después, resolveremos el mismo sistema de ecuaciones del principio. Las incógnitas se calculan mediante fórmulas en las que se dividen dos determinantes. He colocado letras para expresar cómo desarrollar el método en general, y he puesto colores para dar claridad a las fórmulas para calcular *x* e *y*. (Después pondré números en un ejemplo.)

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Fórmulas para calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

No es una "H". Es la división de dos determinantes.

Ejemplo: Resuelve el sistema de ecuaciones usando el método de determinantes.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Primero, analicemos cuáles son los coeficientes con que trabajaremos. Recuerda que si no está escrito el coeficiente del término, vale 1. ¡Y no te olvides los signos negativos!

$a=2$, $b=3$, $e=12$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$c=1$, $d=-1$, $f=1$

En realidad, no importa tanto el nombre o la letra del coeficiente, sino solo el orden en que están en las ecuaciones.

En las fórmulas para calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

Observa que, en verde, he puesto los coeficientes en el mismo orden en que estaban en el sistema de ecuaciones.

(Excepto los rosa), están en este orden:

$$\begin{array}{cc|l} 2 & 3 & \text{— de la } 1^{ra} \text{ ecuación} \\ 1 & -1 & \text{— de la } 2^{da} \text{ ecuación} \\ \text{de } x & \text{de } y & \end{array}$$

Respecto de los rosados, en la fórmula para calcular x, solo en el dividendo (arriba) se reemplazan a los coeficientes de x, con los coeficientes e y f.

Mientras que, en la fórmula para calcular y, solo en el dividendo (arriba) se reemplazan los coeficientes de y, b y d, con los coeficientes e y f.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

Listo. Resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{12\cdot(-1) - 3\cdot 1}{2\cdot(-1) - 3\cdot 1} = \frac{(-12) - 3}{(-2) - 3} = \frac{-12-3}{-2-3} = \frac{-\cancel{15}^{\,3}}{-\cancel{5}_{\,1}} = \boxed{+3}$$

Multiplico. Suprimo paréntesis. Sumo y resto

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 1 - 12\cdot 1}{2\cdot(-1) - 3\cdot 1} = \frac{2-12}{(-2) - 3} = \frac{2-12}{-2-3} = \frac{-\cancel{10}^{\,2}}{-\cancel{5}_{\,1}} = \boxed{+2}$$

Si se te complican las operaciones:

Primero, dentro de los determinantes, resuelve primero la multiplicación y luego la resta.

- La regla de signos de la multiplicación es “si la cantidad de negativos es impar, da negativo”.
- Antes de restar, debes suprimir paréntesis: si el signo de adelante es negativo, suprime el negativo y los paréntesis, y cambia el signo de lo de adentro.
- La regla de signos de la suma y la resta es “+ tengo, - debo”.

Al final, haz la división y simplifica si es necesario.

- La regla de signos de la división es la misma de la multiplicación.

Conclusiones:

El **método de determinantes** se trata de:

- Primero, observar cuáles son los coeficientes (o números) del sistema de ecuaciones.
- Luego, construir las fórmulas para calcular las incógnitas respetando el orden de los coeficientes en las ecuaciones.
- Para terminar, hacer los cálculos de las fórmulas para obtener las incógnitas.

Y lo más importante de estas dos últimas guías:

> No importa qué método elijas ni qué desarrollo hagas, **siempre debes obtener los mismos resultados para *x* e *y*.**

Actividad 3

Usando ahora el método de determinantes, calcula los valores de las incógnitas.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$$

Los resultados que vas a obtener deben ser $x = 1$ e $y = -1$.

Cualquier pregunta, no dudes en consultar a actividadesBaigorria@gmail.com

¡Mucha suerte!