Colegio San Bernardo
Prof. Sergio Baigorria – E-mail: actividadesBaigorria@gmail.com
5° año secundaria, orientaciones Economía y Naturales
Turno mañana

Matemática

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Función exponencial: definición. Ecuaciones exponenciales: casos de resolución de ecuaciones.

Criterios de evaluación

- Aplica los conceptos vistos.
- Usa una técnica coherente de trabajo.
- Defiende los resultados producidos.
- Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios.

Consultas: a actividadesBaigorria@gmail.com o vía Nodos.

	5° Economía	5° Naturales
Fecha de videoconferencia	Para ambos 5tos: jueves 10/09/2020, 15hs, por Google Meet: https://meet.google.com/hmz-hrcy-pwj	
Fecha de presentación	**martes 15/09/2020**	**viernes 18/09/2020**

Guía n°6

Funciones y ecuaciones exponenciales

Hola. Espero que estén bien, siendo cautos y respetando las medidas sanitarias impuestas por el gobierno.
Vamos a estudiar, en esta oportunidad, las funciones exponenciales y, particularmente, las ecuaciones exponenciales. Presentaré un par de técnicas para resolver dichas ecuaciones y aprovecharemos para repasar algunas propiedades de potenciación y radicación.
Dentro de lo posible, pónganse al día con las guías. Estoy poniendo una videoconferencia por curso, como mínimo, para salvar todas sus dudas. No hay requisitos para participar de las videoconferencias. De hecho, cuanto más problemas y dudas tengan, o más atrasado estén, será mejor así puedo ayudarlos en todo lo que haga falta.

Es su obligación consultar con sus profesores cuando tengan dudas.

Empecemos…

Introducción

Las funciones exponenciales tienen la forma:

$$f(x) = b^x$$

Donde:

$b>0$ (la base siempre será positiva) y

$b\neq 1$ (si la base fuera 1, el resultado siempre daría 1 para cualquier valor de x).

Al igual que cualquier expresión exponencial, b se llama **base** y x se llama **exponente**. El nombre "*exponencial*" hace referencia, justamente, a que la variable x está en el exponente de la potencia.

Veamos un ejemplo de función exponencial:

Crecimiento de la cantidad de bacterias:

Algunas bacterias se reproducen duplicando su cantidad cada hora. Si comienzas con 1 bacteria y se duplica en cada hora, tendrás 2^x bacterias después de x horas. Esto se puede escribir como:

$$f(x) = 2^x$$

Entonces, la cantidad de bacterias es:

Antes de empezar, $f(0) = 2^0 = 1$

Después de 1 hora $f(1) = 2^1 = 2$

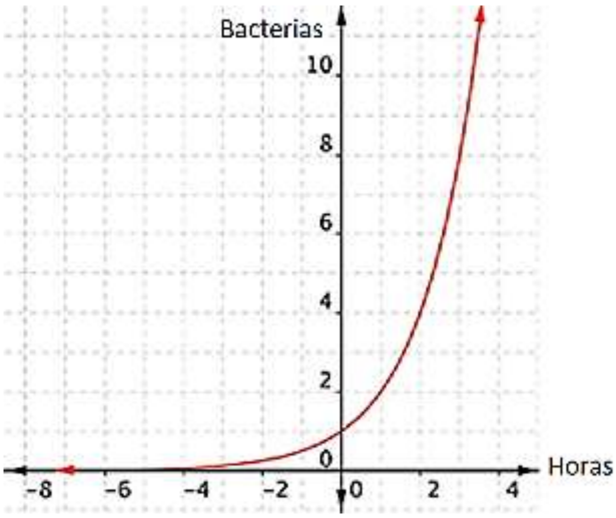
Después de 2 horas $f(2) = 2^2 = 4$

En 3 horas $f(3) = 2^3 = 8$

etc.

Para saber la cantidad de bacterias, basta con darle a la variable x la cantidad de horas transcurridas. Con la definición $f(x) = b^x$ y las restricciones de $b>0$ y $b\neq 1$, el **dominio** de la función exponencial (o sea, los valores que puede tomar x) es el conjunto de todos los números reales. El **rango** de la función exponencial (o sea, los resultados que podemos obtener) es el conjunto de todos los números reales positivos (no darán resultados negativos ni cero).

La siguiente gráfica muestra $f(x) = 2^x$.



Función exponencial: definición

Una **función exponencial** $f(x)$ es una función de la forma:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Donde:

- $a\neq 0$ (si la constante a fuera cero, al multiplicar, la función $f(x)$ siempre daría resultado cero)
- $b>0$ (la base b siempre será positiva), y
- $b\neq 1$ (si la base b fuera 1, la función $f(x)$ siempre daría 1 para cualquier valor de x).

Aclaro que también existen variaciones de la función exponencial donde x puede ser multiplicada y luego sumada o restada, e incluso puede sumarse o restarse un valor al final. Sin embargo, podemos observar la variable x en el exponente de la potenciación:

$$f(x) = a \cdot b^{c\cdot x - d} + e$$

Ecuaciones exponenciales:

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en que la incógnita está en el exponente.
Por ejemplo:

a) $2^x = 16$

b) $3^{x-1} = 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

f) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

Resolución de ecuaciones exponenciales

En esta guía, estudiaremos un par de métodos para resolver ecuaciones exponenciales sin recurrir a la logaritmación (tema de la próxima guía).

Primer caso:

Se transforma la ecuación dada en una igualdad de la misma base.

Esta es la propiedad que te permitirá resolver todas las ecuaciones exponenciales (sin usar logaritmos). Estúdiala:

Si $\boldsymbol{b^m = b^p}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m = p}}$

O sea que, si tengo **igualdad de potencias con la misma base** entonces también sus **exponentes son iguales**.

Resolvamos este ejemplo, como dijimos, transformando en una igualdad de la misma base:

He puesto a la izquierda el desarrollo y a la derecha la explicación.

a) $2^x = 16$	Hago descomposición factorial de 16: $$\begin{array}{r\|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \underline{1} & \end{array} \quad \left.\right\} 2^4$$ Obtengo que $16=2^4$. Lo reemplazo en la ecuación: $$2^x = 16$$ $$2^x = 2^4$$
$2^x = 2^4$	Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base: Si $\boldsymbol{b^m = b^p}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m = p}}$ Aplicando la propiedad: Si $2^x = 2^4$ entonces $x = 4$
$\boxed{x = 4}$	

b) $3^{x-1} = 27$	Hago descomposición factorial de 27: $\begin{array}{r\|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \underline{1} & \end{array} \Big\} 3^3$ Obtengo que $27=3^3$. Lo reemplazo en la ecuación: $3^{x-1} = 27$ $3^{x-1} = 3^3$
$3^{x-1} = 3^3$	Uso la propiedad de **igualdad de potencias con misma base**: Si $\boldsymbol{b^m} = \boldsymbol{b^p}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m = p}}$ Aplicando la propiedad: Si $3^{x-1} = 3^3$ entonces $x - 1 = 3$
$x - 1 = 3$ $x = 3 + 1$ $\boxed{x = 4}$	Despejo x.

Más propiedades:

Puedes invertir una base mediante el **cambio de signo del exponente**. A esta propiedad la conocían así: *"si el exponente es negativo entonces invierto la base"*:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$$

Pero también se usa para invertir una base, si lo necesitara, cambiando el signo del exponente.

Para manejar raíces en las ecuaciones exponenciales, estudia esta propiedad:

Potencia de raíz o raíz de potencia:

$$\underbrace{\left(\sqrt[r]{\boldsymbol{b}}\right)^{p} = \sqrt[r]{\boldsymbol{b^p}}} = \boldsymbol{b}^{\frac{p}{r}}$$

Es lo mismo calcular potencia de la raíz que calcular raíz de la potencia. Cuando están juntas, no importa el orden.

¡La raíz puede escribirse como potencia! si se escribe en el denominador del exponente.

Resolvamos otro ejemplo aplicando estas propiedades:

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$	Hago descomposición factorial de 8: $\begin{array}{r\|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \underline{1} & \end{array} \Big\} 2^3$ Obtengo que $8=2^3$, así que lo reemplazo en la ecuación: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2^3}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \sqrt{2^3}$$

Tenemos un par de problemas aquí: En el primer miembro, la base es $1/2$, pero en el segundo miembro, la base es 2 y necesitamos que tengan la misma base. El otro problema es que, en el segundo miembro, tengo una raíz junta con la potencia.

Empecemos solucionando uno de los problemas: para tener la misma base en ambos miembros, aplicaré la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$ en el primer miembro:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \sqrt{2^3}$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)^{-x} = \sqrt{2^3}$$

No es necesario el denominador 1:

$$(2)^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Tampoco necesita el paréntesis:

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Ahora sí, ambos miembros tienen la misma base 2.

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Solucionemos el otro problema: para evitar la raíz en el segundo miembro, la convertiré a potencia aplicando la propiedad $\left(\sqrt[r]{\boldsymbol{b}}\right)^{p} = \sqrt[r]{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}} = \boldsymbol{b}^{\frac{p}{r}}$.

Solo hay que poner el índice de la raíz (no está escrito, pero es 2) en el denominador del exponente:

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Ahora sí puedo usar la propiedad de igualdad de potencias con misma base:

Si $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{p}}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p}}$

Aplicando la propiedad:

Si $2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$ entonces $-x = \frac{3}{2}$

$$-x = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{x = -\frac{3}{2}}$$

Despejo x pasando el negativo al segundo miembro.

Actividades

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $5^{x} = 625$

2) $3^{x-1} = 81$

3) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

4) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$

5) $6^{2x-2} = 1$ Recuerda que $6^0 = 1$

6) $4^{\frac{x-2}{x+3}} = 4^{\frac{x}{x+2}}$

Segundo caso:

Las ecuaciones necesitan que apliquemos propiedades.

Necesitas repasar la propiedad **producto de potencias con igual base** $b^m \cdot b^p = b^{m+p}$ solo que ahora usaremos su **recíproca** (al revés):

$$b^{m+p} = b^m \cdot b^p$$

Ejemplos:

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$	En el primer miembro, aplicamos la propiedad $b^{m+p} = b^m \cdot b^p$ a ambos términos: $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^1 = 90$ No es necesario el exponente 1.
$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$	Saco factor común 3^x: $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$ $3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$
$3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$	Resuelvo dentro del paréntesis: $3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$ *Cálculos auxiliares*: $3^{-1} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3}$ Recuerda que, en la suma de fracciones, primero obtienes el m.c.m. que es 3, luego divides en los denominadores (de abajo) y multiplicas en los numeradores (de arriba). El resultado ya no necesita paréntesis: $3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$
$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$	Paso $10/3$ al segundo miembro: el 3 pasa multiplicando y el 10 pasa dividiendo. $3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$ $3^x = 90 \cdot \frac{3}{10}$
$3^x = 90 \cdot \frac{3}{10}$	Simplifico y resuelvo: $3^x = 9\cancel{0} \cdot \frac{3}{1\cancel{0}}$ $3^x = 9 \cdot 3$ $3^x = 27$
$3^x = 27$	Ya habiendo aplicado propiedades, podemos realizar los pasos que ya aprendimos cuando estudiamos el primer caso: Descompongo factorialmente 27 y lo reemplazo con 3^3: $3^x = 27$ $3^x = 3^3$
$3^x = 3^3$	Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base: Si $\boldsymbol{b^m = b^p}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m = p}}$ Aplicando la propiedad: Si $3^x = 3^3$ entonces $x = 3$
$\boxed{x = 3}$	

Otra propiedad necesaria es **potencia de potencia**:

$$(b^m)^p = b^{m \cdot p}$$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$	Primero, paso el 3 dividiendo al segundo miembro: $$3 \cdot 4^{x+1} = 96$$ $$4^{x+1} = \frac{96}{3}$$ Y resuelvo: $$4^{x+1} = 32$$
$4^{x+1} = 32$	Aplicamos la propiedad: $$4^{x+1} = 32$$ $$4^{x} \cdot 4^{1} = 32$$ No es necesario el exponente 1: $$4^{x} \cdot 4 = 32$$
$4^{x} \cdot 4 = 32$	Paso el 4 dividiendo: $$4^{x} \cdot 4 = 32$$ $$4^{x} = \frac{32}{4}$$ Resuelvo: $$4^{x} = 8$$
$4^{x} = 8$	Para tener bases iguales, descompongo factorialmente al 4 y al 8, y los reemplazo: $$4^{x} = 8$$ $$(2^2)^x = 2^3$$
$(2^2)^x = 2^3$	En el primer miembro, aplico la propiedad potencia de potencia $(b^m)^p = b^{m \cdot p}$: $$(2^2)^x = 2^3$$ $$2^{2x} = 2^3$$
$2^{2x} = 2^3$	Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base: Si $\boldsymbol{b^m} = \boldsymbol{b^p}$ entonces $\boxed{\boldsymbol{m = p}}$ Aplicando la propiedad: Si $2^{2x} = 2^3$ entonces $2x = 3$
$2x = 3$	Despejo x: $$2x = 3$$ $$x = \frac{3}{2}$$
$\boxed{x = \frac{3}{2}}$	

Actividades

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

7) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 17$

8) $3^{x-5} = 27^{1-x}$

9) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

10) $3^{x} - 3^{x-2} + 3^{x+2} = 89$

Te dejo los resultados para que controles:

1) x=4
2) x=5
3) x=-6
4) x=-1 y también x=+1
5) x=1
6) x=-4/3
7) x=1
8) x=2
9) x=2
10) x=2

No dudes en preguntar a actividadesBaigorria@gmail.com

¡Mucha suerte!