Colegio San Bernardo
Prof. Sergio Baigorria
E-mail: actividadesBaigorria@gmail.com
3° año bachiller adultos
Turno tarde

Matemática

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Aprender a aprender	Reconocimiento de necesidades personales de aprendizaje. Reconocimiento de los errores como parte del proceso.	Ángulos complementarios en los triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras. Funciones trigonométricas: seno, coseno, tangente. Resolución de triángulos rectángulos: caso *lado ángulo*

Criterios de evaluación
• Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y ordenada los ejercicios.

Consultas: a actividadesBaigorria@gmail.com o vía Nodos.
Fecha de presentación: hasta el martes 30 de Junio de 2020.

Alumno: …………………………………………………………………….

Fecha: …… /…… /……….

Guía n°5

Trigonometría

Resolución de triángulos rectángulos

Hola.
Espero que estén bien. En estos días, lo más importante es cuidarnos emocionalmente, y físicamente también respetando las medidas impuestas por el gobierno.

Trigonometría

Resolución de triángulos rectángulos

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto.
Sus elementos más importantes son sus 3 lados y sus 3 ángulos.
Ten presente que los triángulos tienen, para cada lado, un ángulo opuesto (en frente); y viceversa: para cada ángulo tiene un lado opuesto (en frente).

> **Resolver un triángulo** significa que debes calcular todas las medidas desconocidas de sus elementos (**incógnitas**) a partir de las medidas conocidas (**datos**).

Hay distintos casos que pueden presentarse para resolver. Comenzaremos con el caso más simple en el que debes resolver un triángulo rectángulo a partir de tener como datos a un lado y un ángulo agudo (además del ángulo recto, recuerda que el triángulo es rectángulo por tener ese ángulo recto).

Necesitarás manejar los siguientes conceptos:

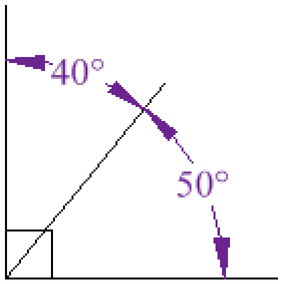
- Suma de ángulos complementarios en un triángulo rectángulo.
- Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.
- Teorema de Pitágoras.

Ángulos complementarios

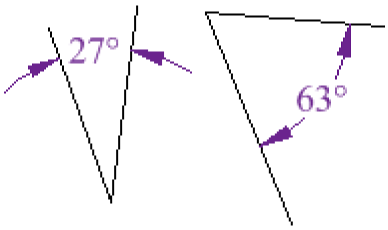
Dos ángulos son **complementarios** si suman 90 grados sexagesimales (un ángulo recto).

Por ejemplo:

Estos dos ángulos (40° y 50°) son **ángulos complementarios**, porque **suman 90°**.
Fíjate en que juntos forman un ángulo recto.

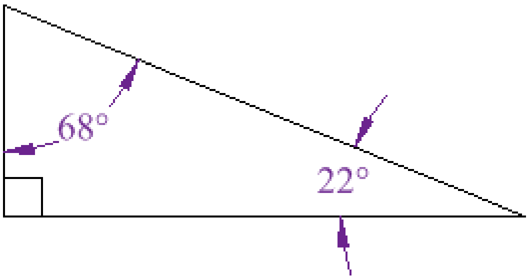


Pero los ángulos no tienen por qué estar juntos.
Estos dos son **complementarios** porque 27° + 63° = **90°**



Si los dos ángulos suman 90°, decimos que **"se complementan"**.
Complementario viene del latín *completum* que significa "completo"... porque un ángulo recto se consideraba un ángulo *completo*.

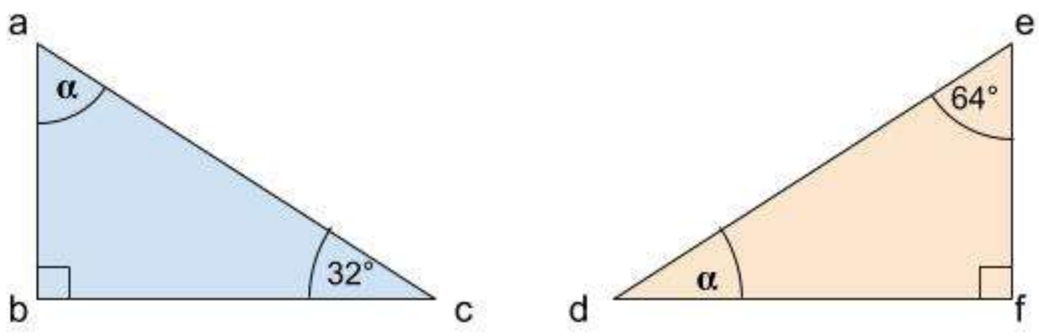
Observa:
En un triángulo rectángulo, **los dos ángulos agudos son complementarios**, porque en cualquier triángulo, los tres ángulos suman 180°: el ángulo recto tiene 90° y los otros dos ángulos agudos suman los otros 90°.



Actividades

Ejercicio 1

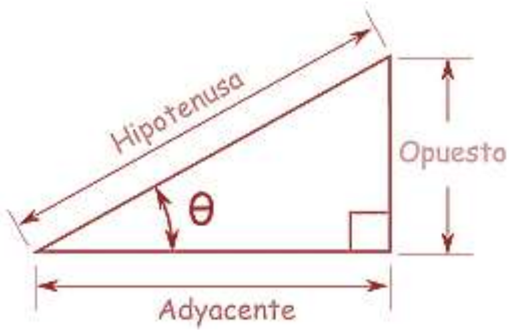
Calcula el ángulo α (alfa) en ambos triángulos:



Funciones trigonométricas *seno*, *coseno* y *tangente*

Nombres de los lados

Antes de concentrarnos en las funciones, le daremos **nombres a los lados** de un triángulo rectángulo tomando como referencia a un ángulo agudo θ (*zeta*):



Adyacente significa *tocando el ángulo*, y **opuesto** es opuesto al ángulo ¡claro!

Los dos lados que forman el ángulo recto se llaman **cateto opuesto** y **cateto adyacente**. El lado más largo y que está opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

Seno, coseno y tangente

Las tres funciones más importantes en trigonometría son el seno, el coseno y la tangente. Cada una es la longitud de un lado dividida entre la longitud de otro... ¡sólo tienes que aprenderte qué lados son!

Para el ángulo θ :

Función **seno**: $$\operatorname{sen}(\theta)=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}$$

Función **coseno**: $$\cos(\theta)=\frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}$$

Función **tangente**: $$\tan(\theta)=\frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}$$

Nota: el seno se suele denotar **sin( )** (por la palabra inglesa "sine") o **sen( )**. Aquí utilizaremos **sen( )** pero puedes encontrarte la otra notación en otros libros o sitios web.

SOHCAHTOA

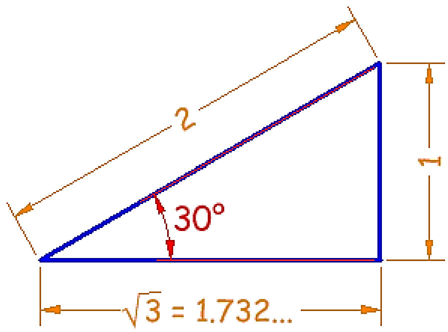
SOHCA...*¿QUÉ?* ¡Sólo es una manera de recordar qué lados se dividen! Así:

SOH...	**S**eno = **O**puesto / **H**ipotenusa
...CAH...	**C**oseno = **A**dyacente / **H**ipotenusa
...TOA	**T**angente = **O**puesto / **A**dyacente

Apréndete "sohcahtoa" - ¡te puede ayudar en un examen!

Ejemplos

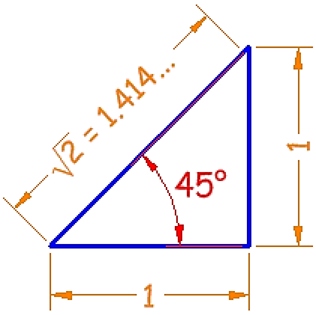
Ejemplo 1: ¿cuáles son el seno, coseno y tangente de 30°?
El triángulo clásico de 30° tiene hipotenusa de longitud 2, lado opuesto de longitud 1 y lado adyacente de longitud √3:



Seno	sen(30°) = 1 / 2 = 0.5
Coseno	cos(30°) = 1.732 / 2 = 0.866
Tangente	tan(30°) = 1 / 1.732 = 0.577

(¡saca la calculadora y compruébalo!)

Ejemplo 2: ¿cuáles son el seno, coseno y tangente de 45°?
El triángulo clásico de 45° tiene dos lados de 1 e hipotenusa √2:



Seno $\sin(45°) = 1 / 1.414 = 0.707$

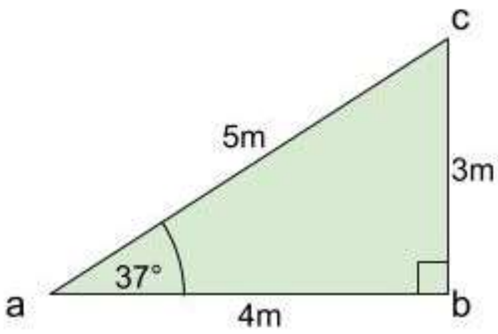
Coseno $\cos(45°) = 1 / 1.414 = 0.707$

Tangente $\tan(45°) = 1 / 1 = 1$

Actividades

Ejercicio 2 

Calcular seno, coseno y tangente para el siguiente triángulo rectángulo. Redondea a 3 decimales.

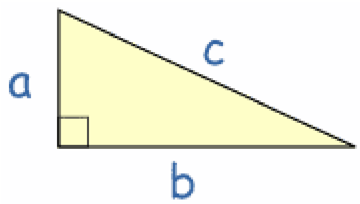


Teorema de Pitágoras

Hace años, un hombre llamado Pitágoras descubrió un hecho asombroso sobre triángulos:

El **teorema de Pitágoras** dice que: *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

$$a^2 + b^2 = c^2$$



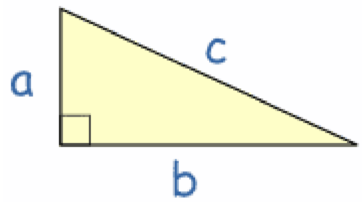
Entonces, el cuadrado de **a** (a^2) más el cuadrado de **b** (b^2) es igual al cuadrado de **c** (c^2)

¿Por qué es útil esto?

Si sabemos las longitudes de **dos lados** de un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos ayuda a encontrar la longitud del **tercer lado**. (¡Pero recuerda que sólo funciona en triángulos rectángulos!)

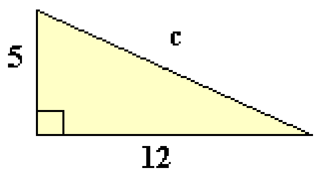
¿Cómo lo uso?

Escríbelo como una ecuación:

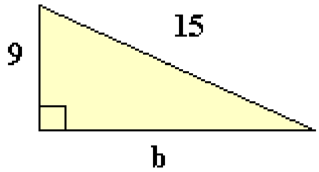


$a^2 + b^2 = c^2$

Ahora puedes usar álgebra para encontrar el valor que falta, como en estos ejemplos:



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$5^2 + 12^2 = c^2$$
$$169 = c^2$$
$$\sqrt{169} = c$$
$$13 = c$$

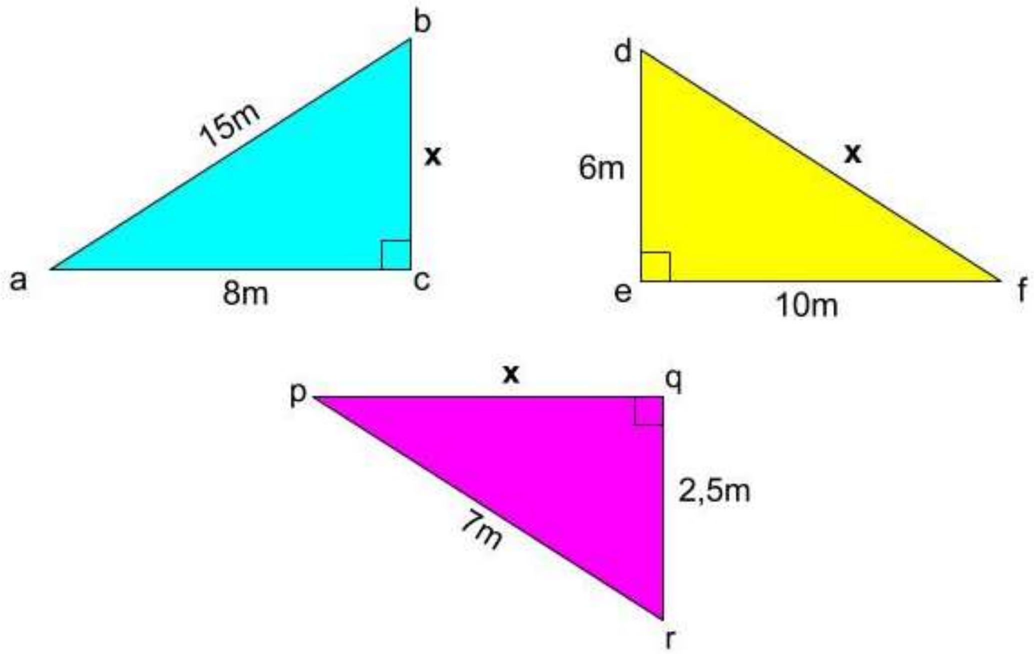


$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$9^2 + b^2 = 15^2$$
$$81 + b^2 = 225$$
$$b^2 = 225 - 81$$
$$b^2 = 144$$
$$b = \sqrt{144}$$
$$b = 12$$

Actividades

Ejercicio 3

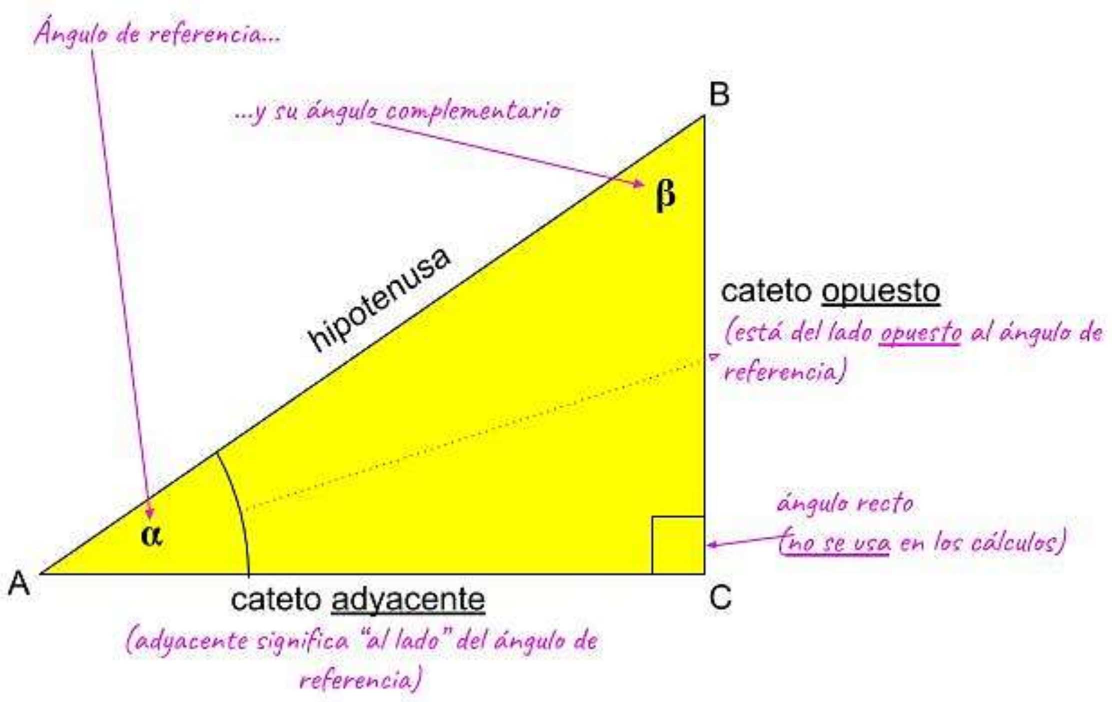
Usando el teorema de Pitágoras, calcula el lado **x** de cada triángulo rectángulo:



Resolución de triángulos rectángulos

Cómo resolver un triángulo rectángulo: caso *ángulo-lado*

Comenzaremos estudiando el caso más simple que es resolver un triángulo rectángulo teniendo un lado y uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo.
Para resolverlo, usaremos las siguientes expresiones:



Suma de ángulos complementarios:
Los dos ángulos agudos α y β son complementarios porque su suma da 90° grados.

$$\alpha + \beta = 90°$$

Teorema de Pitágoras:
La suma de los catetos elevados al cuadrado es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$catetoopuesto^2 + catetoadyacente^2 = hipotenusa^2$$

Razones trigonométricas
Usaremos solo tres: seno, coseno y tangente de un ángulo.

$$\sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \tan\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

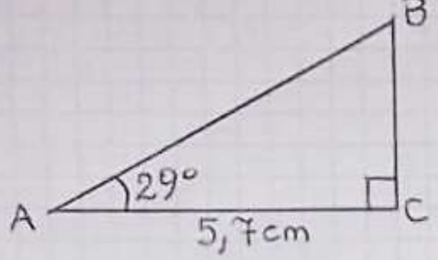
Siempre usaremos algunas de estas cinco expresiones. Resolver un triángulo rectángulo significa calcular todas sus incógnitas; no se trata de usar todas las expresiones anteriores. Además, puede resolverse un triángulo rectángulo de distintas maneras, pero siempre usando algunas de estas cinco expresiones.
Ya lo verás en el ejemplo.

Ejemplo

¡A leerlo con MUCHÍSIMA ATENCIÓN y **comprendiendo** lo que dice!

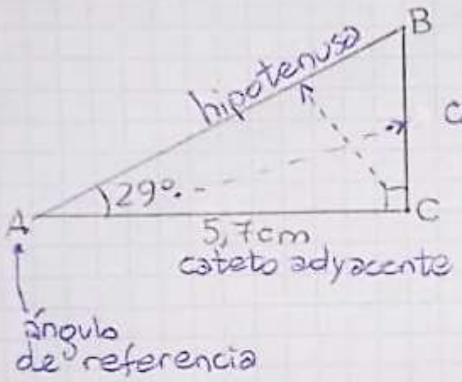
Es material de estudio.

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



1er paso: Identificar ángulo de referencia (aquí siempre se toma como referencia al ángulo cuya medida conozco), cateto opuesto (frente al ángulo de referencia), cateto adyacente (lado junto al ángulo de referencia) y la hipotenusa (lado más largo frente al ángulo recto).

Para este ejemplo:



Observamos:

DATOS:

$\hat{A} = 29°$

$\overline{CA} = 5{,}7\text{cm}$

$\hat{C} = 90°$

INCÓGNITAS:

$\hat{B}$; $\overline{AB}$; $\overline{BC}$.

2do paso: Completar en las cinco expresiones ya vistas con los nombres de las incógnitas y con los valores de los datos.

$\alpha + \beta = 90°$

$29° + \hat{B} = 90°$

ángulo de referencia

$cop^2 + cad^2 = hip^2$

$\overline{BC}^2 + (5{,}7\text{cm})^2 = \overline{AB}^2$

cateto opuesto — cateto adyacente — hipotenusa.

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{cop}{hip}$

$\text{sen}\,29° = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

$\cos\alpha = \dfrac{cad}{hip}$

$\cos 29° = \dfrac{5{,}7\text{cm}}{\overline{AB}}$

$\tan\alpha = \dfrac{cop}{cad}$

$\tan 29° = \dfrac{\overline{BC}}{5{,}7\text{cm}}$

O sea, si sabes cuánto vale entonces escribe su valor, pero si no sabes cuánto vale, colócale un nombre (que no sean x).

(A veces, los alumnos tienden a llamarle "x" a todas las incógnitas y solo crean confusión porque necesitamos identificar a cada incógnita por separado.)

3er paso: Despejar las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan solo una incógnita.
Analicemos cuáles de las cinco ecuaciones anteriores son útiles y cuáles no.

- $29° + \hat{B} = 90°$

Tiene una sola incógnita, entonces esta ecuación sirve. Despejémosla:

$$29° + \hat{B} = 90°$$
$$\hat{B} = \underbrace{90° - 29°}$$
$$\hat{B} = 61°$$

¡Listo! ☺

IMPORTANTE:
La idea al despejar una incógnita es que nos quede sola en un miembro (o lado del signo =), positiva y en el numerador (o sea, al nivel del renglón, nunca "abajo" o dividiendo)

- $\overline{BC}^2 + (5{,}7cm)^2 = \overline{AB}^2$ ☹

Tiene más de una incógnita, entonces esta ecuación (en este momento) no nos sirve. (Luego, más tarde, podría servir).

- $\text{sen } 29° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ← Tiene más de una incógnita; no sirve (al menos por ahora). ☹

- $\cos 29° = \frac{5{,}7cm}{\overline{AB}}$

Tiene una sola incógnita. Sirve. Despejemos:

$$\cos 29° = \frac{5{,}7cm}{\overline{AB}}$$

← IMPORTANTE:
La incógnita no puede quedarnos allí debajo. LO PRIMERO ES INTENTAR SACARLA DE ALLÍ DEBAJO.

$\cos 29° = \dfrac{5{,}7cm}{\overline{AB}}$ ←--- Esta incógnita está dividiendo (porque está ABAJO como DIVISOR) así que pasa multiplicando.

$\cos 29° \cdot \overline{AB} = 5{,}7cm$.

Ahora sí, podemos despejarla.
Movamos el cos 29° al otro miembro dividiendo. Pasan juntos.

$\overline{AB} = \dfrac{5{,}7cm}{\cos 29°}$ Ya quedó despejada.

¿Cómo hago este cálculo en calculadora?
Primero, hay que indicar a la calculadora que usamos grados sexagesimales para los ángulos.
Mira la pantalla de la calculadora. Debería tener escrito alguna de estas:

$\boxed{D}$ o DEG

Si no las tiene, toca la tecla $\boxed{\text{Mode}}$ varias veces hasta que la pantalla diga:

Deg Rad Gra
1 2 3

y toca $\boxed{1}$. En inglés, DEG es "degree" o "grado".
RAD es "radián", otra unidad de amplitud.
GRA es "gradián", no es "grado". ¡Cuidado!

Ahora sí: $5.7 \div \cos 29 =$

$\overline{AB} \approx 6{,}51711 8187$ cm.

Redondeamos en clase a 3 cifras decimales.

$\overline{AB} \approx 6{,}517$ cm ¡Lista otra más! ☺

▶ Ya la última:

$\tan 29° = \dfrac{\overline{BC}}{5{,}7cm}$ ←--- sí sirve porque tiene una incógnita. Por suerte, está positiva y en el numerador. Solo falta dejarla sola.

El 5,7cm la está dividiendo así que lo pasamos multiplicando:

$\tan 29° \cdot 5{,}7\,cm = \overline{BC}$

En calculadora:

tan 29 x 5.7 =

Si tu calculadora escribe paréntesis, debes cerrarlo en el ángulo:

tan(29) x 5.7 =

$3{,}159561593\,cm \approx \overline{BC}$

Redondeamos:

$3{,}16\,cm \approx \overline{BC}$ ¡Terminamos!

Rtas: $\hat{B} = 61°$

Hipotenusa: $\overline{AB} \approx 6{,}517\,cm$.

Cateto opuesto: $\overline{BC} \approx 3{,}16\,cm$.

Cuando tengas más práctica, sabrás, antes de escribir ninguna ecuación, qué expresiones usarás y cuáles no.

Conclusión:

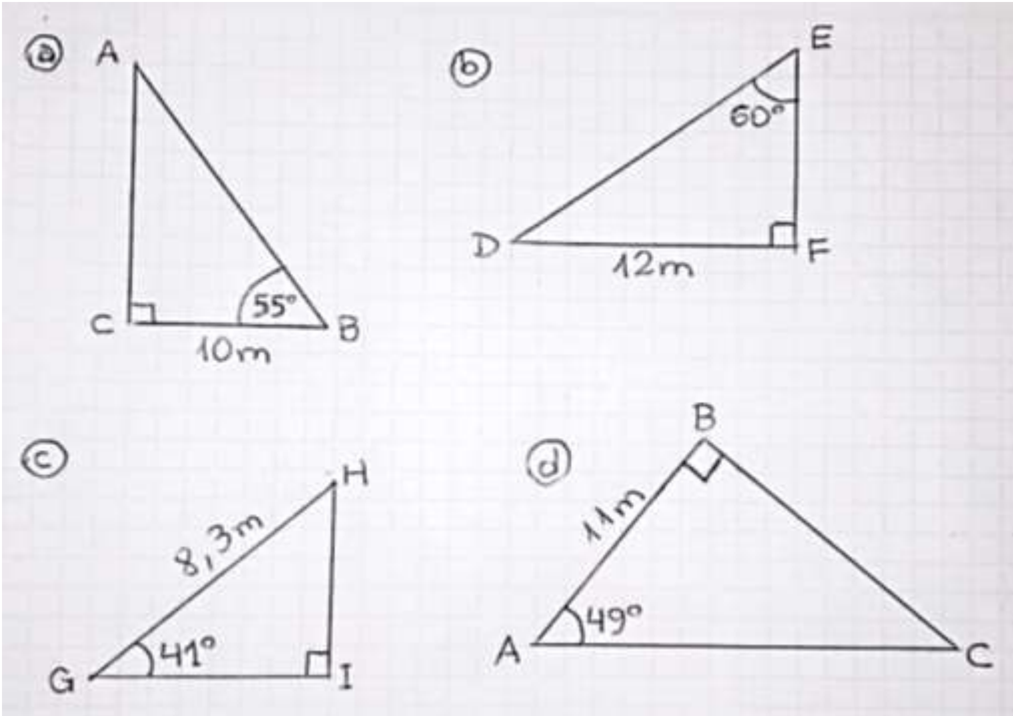
Resolviendo un triángulo rectángulo en el caso *lado-ángulo*:

- Primero identificamos al **ángulo de referencia** (de él depende qué cateto es opuesto y cuál es adyacente), su **ángulo complementario** (o sea el otro ángulo agudo), el **cateto opuesto**, el **cateto adyacente** y la **hipotenusa** (es muy importante que no los confundas), y observamos cuáles de ellos son **datos** y cuáles son **incógnitas**.
- Luego, escribimos las cinco expresiones: **suma de ángulos complementarios, teorema de Pitágoras y seno, coseno y tangente de un ángulo**. En ellas, completamos con valores de los datos y nombres de las incógnitas.
- Despejamos las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan **una sola incógnita**. Y algo importante: si la incógnita está dividiendo ("abajo"), **lo primero** será sacarla de ahí abajo pasándola al otro miembro multiplicando.

Actividades

Ejercicio 4

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Sigue los pasos del ejemplo. Claro que, al tener datos e incógnitas distintos, los desarrollos variarán.

Cualquier pregunta, no dudes en consultar a actividadesBaigorria@gmail.com

¡Mucha suerte!