Colegio San Bernardo
Prof. Sergio Baigorria
E-mail: actividadesBaigorria@gmail.com
3° año bachiller adultos
Turno tarde

Matemática

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Aprender a aprender	Reconocimiento de necesidades personales de aprendizaje. Reconocimiento de los errores como parte del proceso.	Funciones trigonométricas inversas: arco seno, arco coseno, arco tangente. Resolución de triángulos rectángulos: caso *lado lado. Uso de calculadora.*

Criterios de evaluación
• Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y ordenada los ejercicios.

Consultas: a actividadesBaigorria@gmail.com o vía Nodos.
Fecha videoconferencia: viernes 11/09/2020, 15hs., por Google Meet en https://meet.google.com/nku-bwdd-jjc
Fecha de presentación: hasta el martes 15/09/2020.

Guía n°7

Funciones trigonométricas inversas

¡Hola! Espero que estén muy bien. Sigámonos cuidando emocional y físicamente, respetando las medidas impuestas por el gobierno. ¡Espero que muy pronto volvamos a vernos!

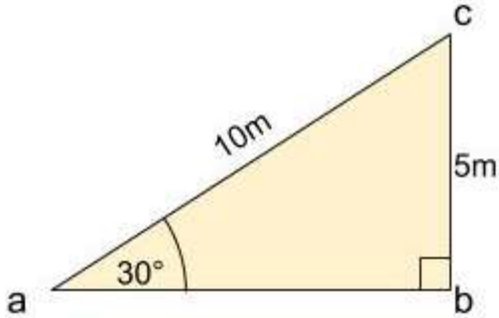
En esta nueva guía, es importante que tengas muy presentes los conceptos vistos en la guía n°5 sobre trigonometría.
En esta oportunidad, veremos cómo despejar un ángulo que está como argumento de una función trigonométrica. Esto nos permitirá trabajar con un nuevo caso de resolución de triángulos rectángulos.

Funciones trigonométricas

Cuando estudiamos las definiciones de las razones trigonométricas, vimos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{catetoopuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{catetoadyacente}{hipotenusa} \qquad \tan\alpha = \frac{catetoopuesto}{catetoadyacente}$$

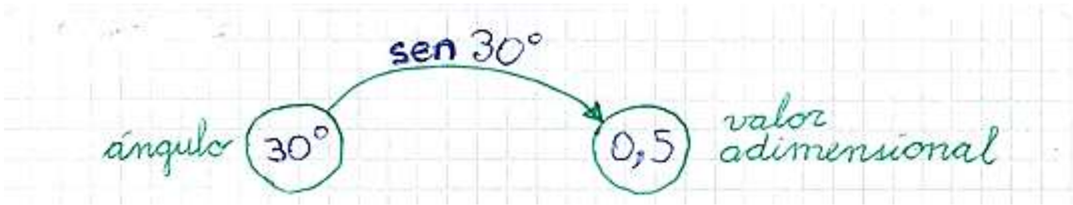
Analicemos el siguiente ejemplo:



Si calculo, digamos, el seno de 30° para este triángulo rectángulo:

$$\text{sen}\,30° = \frac{5\,\cancel{m}}{10\,\cancel{m}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Observa que simplifiqué las unidades de longitud [m] por lo que el resultado del seno de 30° es el valor 0,5 que es una **magnitud adimensional:** no tiene unidades de longitud, como por ejemplo *metros* [m], ni unidades de amplitud, como por ejemplo *grados sexagesimales* [° ‘ ”].
En un gráfico:



O sea que si a un ángulo le aplico una función trigonométrica obtendré una magnitud adimensional.

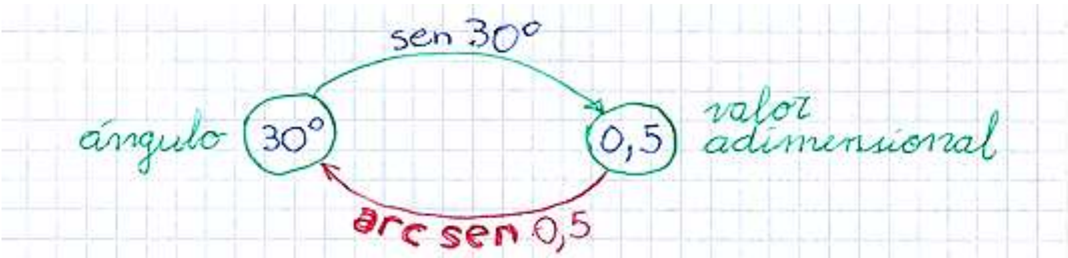
Todas las razones trigonométricas, *seno*, *coseno* y *tangente*, para un ángulo cualquiera siempre dan como resultado una magnitud adimensional.

Funciones trigonométricas inversas

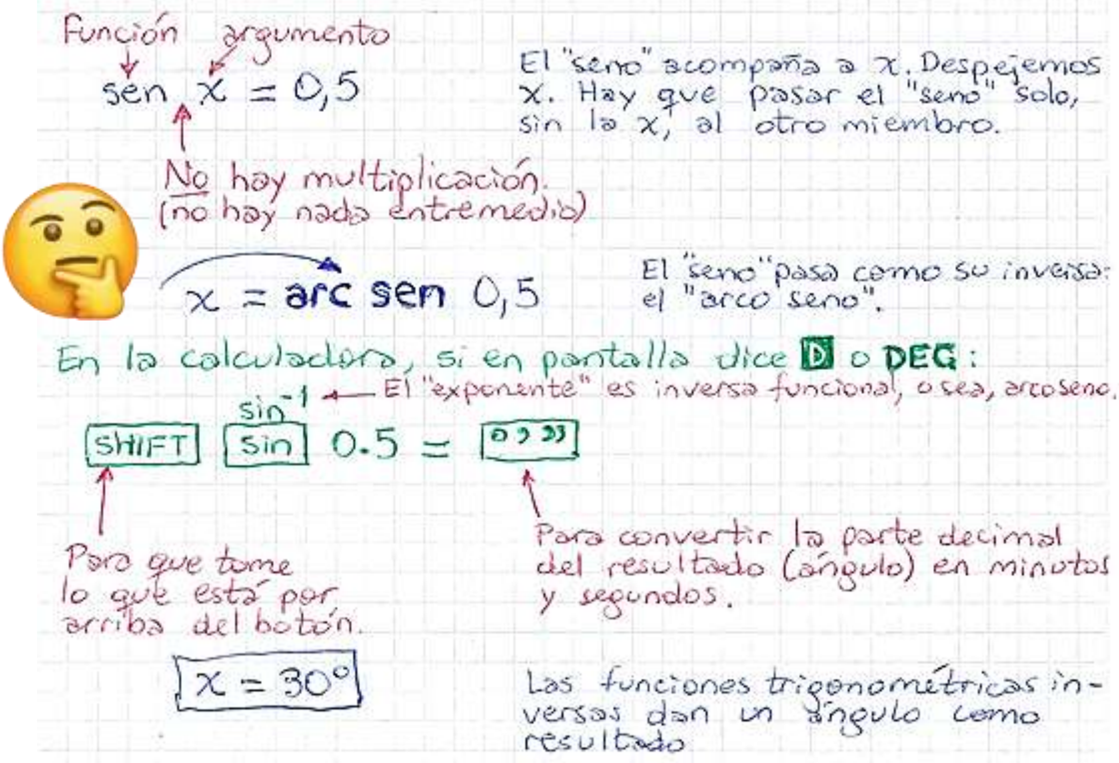
Supongamos que debo resolver la siguiente ecuación:

$$\text{sen}\,x = 0{,}5$$

¿Cómo despejo *x*? Pues necesito pasar la función *seno* hacia el otro miembro, hacia el otro lado del signo =, y deberá pasar como la inversa del seno.
La inversa del seno se llama “arco seno”. En el gráfico, en rojo:



El *"arco seno de 0,5"* se interpreta como *"¿cuál es el arco* (ángulo) *cuyo seno da 0,5?"* Ya sabemos, por el ejemplo anterior, que x vale 30°, pero ¿cómo despejamos y cómo lo obtengo con la calculadora?



Las "**funciones" trigonométricas inversas** son las inversas del seno, del coseno y de la tangente:

Nombre	**Notación**
arco seno	*arc sen*
arco coseno	*arc cos*
arco tangente	*arc tan*

(Cuidado con el *coseno* y su inversa: no es *"ar coseno"* sino que es *arco **co**seno*.)

Como trabajaremos con calculadora científica en los ejercicios de resolución de triángulos rectángulos, siempre obtendremos como resultado un solo ángulo entre 0° y 90°.

Actividades

Ejercicio 1

Despeja la incógnita (muestra cómo pasas la función trigonométrica hacia el otro miembro) y obtenla usando calculadora científica:

$$\operatorname{sen} a = 0{,}505\,071\,685$$

$$\cos b = 0{,}814\,959\,255$$

$$\tan c = 1{,}792\,553\,005$$

Los resultados serán:

$$a = 30°\,20'10"$$
$$b = 35°\,25'$$
$$c = 60°\,50'40"$$

Cómo resolver un triángulo rectángulo: caso *lado-lado*

Recuerda:

Resolver un triángulo rectángulo es encontrar todos sus elementos a partir de dos elementos conocidos (además del ángulo recto de dicho triángulo que ya sabemos que mide 90°grados). Los elementos desconocidos pueden ser son los catetos y la hipotenusa o los ángulos internos del triángulo exceptuando el ángulo recto.

El caso que estudiamos en la guía anterior era el **caso *lado-ángulo*** en el que teníamos como datos a un lado y un ángulo. En esta guía, estudiaremos el nuevo **caso *lado-lado*** donde los datos son dos lados. En ambos casos, el ángulo recto está presente.

No se puede resolver un triángulo teniendo solo los ángulos. Siempre se necesita como mínimo a uno de los lados como dato.

Los pasos para resolver un triángulo rectángulo son:

1. Elegir el ángulo de referencia α (no puede ser el ángulo recto) y determinar cuáles son el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa.
2. Detectar cuáles son los datos y cuáles son las incógnitas.
3. Completar con datos y nombres de incógnitas en las expresiones:

$$\alpha + \beta = 90°$$

$$catetoopuesto^2 + catetoadyacente^2 = hipotenusa^2$$

$$\sin\alpha = \frac{catetoopuesto}{hipotenusa}$$

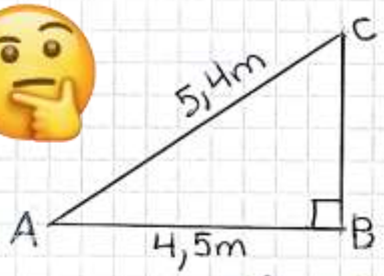
$$\cos\alpha = \frac{catetoadyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{catetoopuesto}{catetoadyacente}$$

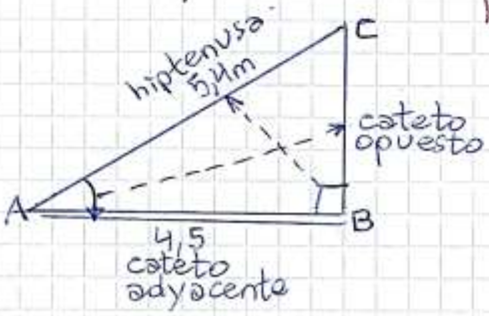
4. Despeja las incógnitas en aquellas ecuaciones con una sola incógnita. (Puedes reemplazar en cualquier momento a una incógnita si ya la calculaste.)

Ahora, veamos un ejemplo:

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



Lo primero que hacemos es tomar uno de los ángulos agudos, $\hat{A}$ o $\hat{C}$, como ángulo de referencia para poder distinguir los catetos opuesto y adyacente.
Yo elegiré el ángulo $\hat{A}$ como referencia, por capricho. Recuerda que nunca se puede tomar al ángulo recto como referencia.



Ahora, voy a completar, en las cinco expresiones que estudiamos en la guía anterior, con los datos y las incógnitas.
Recuerda que me servirán aquellas ecuaciones que tengan una sola incógnita:

▸ $\alpha + \beta = 90°$

$\hat{A} + \hat{C} = 90°$

Tiene dos incógnitas.
Ahora mismo, no me sirve.

▸ $cop^2 + cad^2 = hip^2$

$\overline{BC}^2 + (4{,}5m)^2 = (5{,}4m)^2$

Esta ecuación me sirve pues tengo una sola incógnita.
La despejo:

$\overline{BC}^2 = (5{,}4m)^2 - (4{,}5m)^2$

$\overline{BC} = \sqrt{(5{,}4m)^2 - (4{,}5m)^2}$

En la calculadora: $\boxed{\sqrt{\ }}$ (5.4 $\boxed{x^2}$ − 4.5 $\boxed{x^2}$) =

En la pantalla se verá así: $\sqrt{(5.4^2 - 4.5^2)}$ El radicando lleva paréntesis en calculadora.

Errores comunes en calculadora:

$\sqrt{\ }(5.4)^2 - (4.5)^2 =$ Error en los paréntesis, permite separar en términos y resolver la raíz antes de la resta.

$\sqrt{\ }5.4^2 - 4.5^2 =$ Mismo problema de antes.

$\boxed{\overline{BC} \cong 2{,}985\ m}$ cateto opuesto

▶ $\text{sen } \alpha = \dfrac{\text{cop}}{\text{hip}}$

$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{\overline{BC}}{5{,}4m}$

No me sirve ya pues tiene más de una incógnita.

▶ $\cos \alpha = \dfrac{\text{cad}}{\text{hip}}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{4{,}5m}{5{,}4m}$

Me sirve pues tiene solo una incógnita. Despejo:

$\hat{A} = \text{arc cos } \dfrac{4{,}5\cancel{m}}{5{,}4\cancel{m}}$

Al simplificar, me queda un valor adimensional (sin "metros" ni "grados").

En la calculadora, es obligatorio poner paréntesis (porque en matemática se resuelven primero las funciones y después las divisiones.) El paréntesis obliga a la calculadora a hacer la división primera porque está "encerrada" y le aplicará el arco seno al resultado de la división.

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \overset{\cos^{-1}}{\boxed{\text{COS}}}\ (4.5 \div 5.4) = \boxed{\circ\ '\ ''}$

$\boxed{\hat{A} \approx 33^\circ 33' 26{,}32''}$

▶ $\tan \alpha = \dfrac{\text{cop}}{\text{cad}}$

$\tan \hat{A} = \dfrac{\overline{BC}}{4{,}5m}$ Tiene dos incógnitas.

Observa que ya usé las cinco expresiones pero aún me falta calcular el ángulo $\hat{C}$. La forma más fácil de calcularlo es colocando el valor que obtuve para $\hat{A}$ en:

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$33^\circ 33' 26{,}32'' + \hat{C} = 90^\circ$

$\hat{C} = 90^\circ - 33^\circ 33' 26{,}32''$

En calculadora: $90 \boxed{\circ\ '\ ''} - 33 \boxed{\circ\ '\ ''}\ 33 \boxed{\circ\ '\ ''}\ 26.32 \boxed{\circ\ '\ ''} =$

$\boxed{\hat{C} = 56^\circ\ 26'\ 33{,}68''}$

Como viste en el cálculo del último ángulo, puedes reemplazar a una incógnita si ya la calculaste, en cualquier momento y no necesariamente al final como hice. En el ejemplo, habiendo calculado el lado BC usando el teorema de Pitágoras, podría haber reemplazado en la ecuación del seno al lado BC con 2,985m, y habría calculado allí mismo el ángulo A.

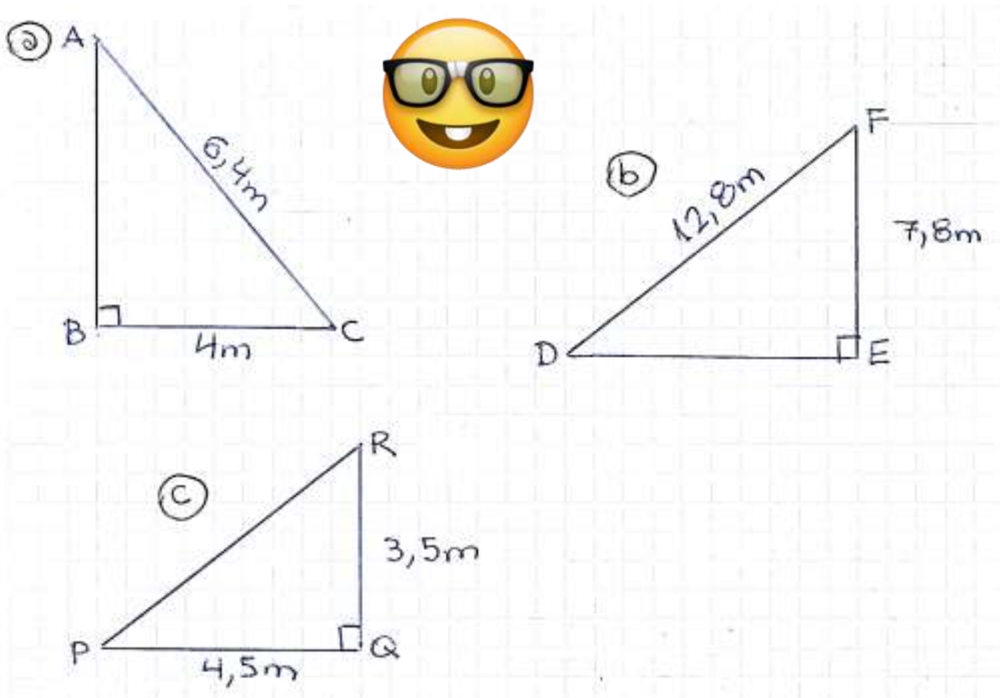
Conclusión:

Este otro caso no presenta nada nuevo aparte de la necesidad de despejar un ángulo.
Resolviendo un triángulo rectángulo en el caso *lado-lado*, igual que en el caso anterior:

- Primero identificamos al **ángulo de referencia** que no puede ser el ángulo recto (de él depende qué cateto es opuesto y cuál es adyacente), su **ángulo complementario** (o sea el otro ángulo agudo), el **cateto opuesto**, el **cateto adyacente** y la **hipotenusa** (es muy importante que no los confundas)
- Detectamos cuáles de ellos son **datos** y cuáles son **incógnitas**.
- Luego, escribimos las cinco expresiones: **suma de ángulos complementarios, teorema de Pitágoras y seno, coseno y tangente de un ángulo**. En ellas, completamos con valores de los datos y nombres de las incógnitas.
- Despejamos las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan **una sola incógnita**. Recuerda que para calcular el ángulo que falta, reemplaza en la ecuación de la suma de ángulos complementarios con el valor que obtuviste para tu ángulo de referencia.

Actividades

Ejercicio 2 
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Sigue los pasos del ejemplo. Claro que, al tener datos e incógnitas distintos, los desarrollos variarán.

Para que controles ejercicios: estos son los resultados que debes obtener. En el caso que no obtengas estos resultados, no modifiques aleatoriamente tus desarrollos para obtener los resultados esperados. Más bien consulta a tu profesor.

a) $\overline{AB} = 4{,}996\ m$
$\hat{C} = 51°\ 19'4{,}13''$
$\hat{A} = 38°\ 40'\ 55{,}87''$

b) $\overline{DE} = 10{,}149\ m$
$\hat{D} = 37°\ 32'39{,}57''$
$\hat{F} = 52°\ 27'\ 20{,}43''$

c) $\overline{RP} = 5{,}701\ m$
$\hat{P} = 37°\ 52'\ 29{,}94''$
$\hat{R} = 52°\ 7',06''$

Eso es todo por ahora.
Espero que disfruten los desafíos
y no olvides que **debes consultarme ante cualquier duda**.
¡Nos vemos pronto!

Cualquier pregunta, no dudes en consultar a actividadesBaigorria@gmail.com

¡Mucha suerte!