**"CON DOMINGO, SOMOS PEREGRINOS DE ESPERANZA"**

## ***Teoría y guía de actividades***

## ***FUNCIÓN***

Definición: Llamamos función a una relación de dependencia entre dos conjuntos, A y B en la que a cada elemento ***x*** del conjunto A, le corresponde un **único** elemento ***y*** del conjunto B.

Se simboliza mediante la siguiente notación:

$$f: A \to B$$

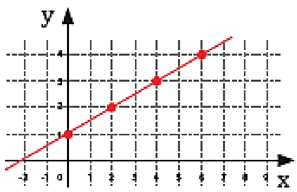
$$x \to y = f(x)$$

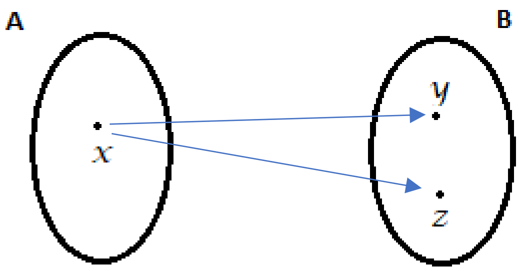
Se lee "$y$ es igual a $f$ de $x$", esta notación no significa "$f$ multiplicado por $x$", sino que es una manera de indicar que $y$ corresponde a $x$.

Si un elemento $x$ del conjunto A se corresponde con un elemento $y$ del conjunto B, decimos que $y$ es la imagen de $x$ por medio de la función $f$, o que $x$ es una preimagen de $y$.

En la expresión $y = f(x)$, llamamos variable independiente a $\boldsymbol{x}$ y variable independiente a $\boldsymbol{y}$

Representación de una función:

<table>
<tr><th></th><th>Expresión verbal</th><th>Expresión algebraica</th><th>Tabla de valores</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>Descripción</td><td>Un texto puede indicarnos cómo se relacionan entre sí dos variables.</td><td>Describimos la relación entre las dos variables mediante una expresión algebraica.</td><td>Identificamos cada variable independiente con su variable dependiente, mediante una tabla.</td><td>Representamos en unos ejes de coordenadas todos los pares (x, 1(x)).</td></tr>
<tr><td>Ejemplo</td><td>A cada número real le corresponde su mitad más uno.</td><td>$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$<br>$x \to y = f(x) = 0,5x + 1$<br>Aunque, si no existe confusión, se habla simplemente de:<br>$f(x) = 0,5x + 1$</td><td>Es una tabla donde se toma una pequeña parte de los valores de la variable independiente<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

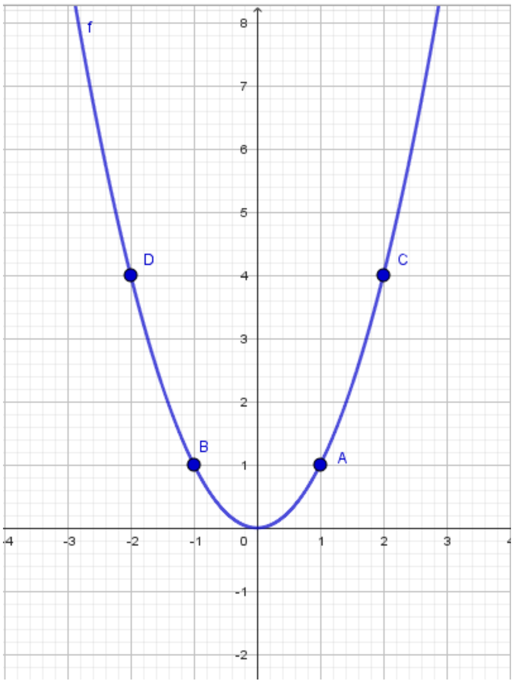



**Dominio** **Imagen**

<u>Ejemplo de función:</u>

$f(x) = x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | $1^2 = 1$ |
| -1 | $(-1)^2 = 1$ |
| 2 | $2^2 = 4$ |
| -2 | $(-2)^2 = 4$ |




### *Dominio e imagen de una función*

- Dominio: Es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable independiente $\boldsymbol{x}$ y se simboliza como $Dom(f)$.
- Imagen: Es el conjunto formado por todos los valores que toma la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y se simboliza como $Im(f)$.

Pensemos en una máquina: le das un valor de entrada (del dominio) y ella te da un valor de salida (de la imagen). La regla que usa la máquina para transformar la entrada en salida es la función.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ toma un número y lo duplica. Si le das 3, te devuelve 6. Si le das 5, te devuelve 10 y así sucesivamente.

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de entrada permitidos. Es la "materia prima" que puede procesar nuestra máquina. En el ejemplo anterior, serían todos los números reales.

En cambio, en la función $g(x) = \frac{1}{x}$ el dominio son todos los números reales excepto el 0, ya que la división por cero no está definida.

La **imagen** de una función es el conjunto de todos los valores de salida que la función puede producir. Son todos los resultados posibles que podemos obtener de nuestra máquina.

Si consideramos la función $f(x) = 2x$, su imagen será el conjunto formado por todos los números reales. La función $g(x) = \frac{1}{x}$, al igual que su dominio, tendrá como imagen todos los números reales excepto el 0 debido a que no existe ningún número que al reemplazarlo em la fórmula de como resultado cero.

O bien, la imagen de la función $h(x) = x^2$ son todos los números reales no negativos, ya que cualquier número al cuadrado siempre será positivo o cero.

---

**Análisis de una función a partir de su gráfico**

Analizar una función significa estudiar su comportamiento y sus características a partir de su representación gráfica.

### 1. Intersecciones con los ejes:

- **Raíces o ceros:** Son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x. En estos puntos, el valor de la función es 0. Para encontrarlas, se iguala la función a 0

  $(f(x) = 0)$ y se resuelve la ecuación.

- **Ordenada al origen:** Es el punto donde la gráfica de la función corta al eje y. En este punto, el valor de la variable independiente es 0. Para encontrarla, se calcula $f\,(0)$.

### 2. Comportamiento de la función:

- **Intervalos de crecimiento:** Son los tramos del dominio donde la función "sube" a medida que avanzamos hacia la derecha. Los valores de la función aumenten cuando $x$ aumenta.

  Una función $f\colon D \sqsubseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente en un intervalo $I \sqsubseteq D$ si, para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que:

  $$f(x_1) \leq f(x_2)$$

- **Intervalos de decrecimiento:** Son los tramos del dominio donde la función "baja" a medida que avanzamos hacia la derecha. Los valores de la función disminuyen cuando $x$ aumenta.

  Una función $f\colon D \sqsubseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente en un intervalo $I \sqsubseteq D$ si, para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, se cumple que:

  $$f(x_1) \geq f(x_2)$$

- **Máximos y mínimos:** Son los puntos del gráfico donde la función alcanza su mayor o menor valor en un tramo específico. Un **máximo** es un punto "cúspide" y un **mínimo** es un punto "valle".

  **<u>MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS</u>**

  Dada una función $f\colon D \sqsubseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in D$

  Decimos que $f$ tiene un **máximo relativo en** $c$ si existe un intervalo abierto $I$que contiene a $c$ , tal que:

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in I \cap D$$

Decimos que $f$ tiene un **mínimo relativo en** $c$ si existe un intervalo abierto $I$que contiene a $c$ , tal que:

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in I \cap D$$

Es decir que, el valor de $f(c)$ es el más grande o más pequeño dentro de un **vecindario** de $c$.

**MAXIMOS Y MINIMOS ABSOLUTOS**

Decimos que $f$ tiene un **máximo absoluto en** $c$, si:

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in D$$

Decimos que $f$ tiene un **mínimo absoluto en** $c$, si:

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in D$$

Es decir que, el valor de $f(c)$ es el mayor o menor de **toda la función en su dominio**.

### 3. Signo de la función:

- **Intervalos de positividad (C+):** Son los tramos del dominio donde la gráfica está por encima del eje $x$ (la función toma valores positivos).

  Dada una función $f: D \sqsubseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  Se dice que $f$ es positiva en un intervalo $I \sqsubseteq D$ si:

$$f(x) > 0, \forall x \in I$$

- **Intervalos de negatividad (C−):** Son los tramos del dominio donde la gráfica está por debajo del eje $x$ (la función toma valores negativos).

  Dada una función $f: D \sqsubseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  Se dice que $f$ es positiva en un intervalo $I \sqsubseteq D$ si:

$$f(x) < 0, \forall x \in I$$

### 4. Paridad de una función:

La paridad describe la simetría de una función.

- **Función par:** Es aquella que es simétrica respecto al eje y. Esto significa que:

$$f(-x) \ = f(x)$$

  Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es par.

- **Función impar:** Es aquella que es simétrica respecto al origen de coordenadas. Esto significa que:

$$f(-x) = -f(x)$$

Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es impar.

**Video tutorial acerca del análisis de una función**

https://youtu.be/xb_bdonec6I?si=1dDvp_aDayXupgMY

---

**Ejemplo acerca del análisis de una función**

Vamos a analizar gráficamente la función $f(x) = x^2 - 3$

- **Dominio**

La función es un polinomio, por lo tanto, su **dominio** son todos los números reales:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

- **Imagen**

Como es una parábola con vértice mínimo, su imagen serán los valores desde el mínimo hacia arriba:

$$Im(f) = (-3, +\infty)$$

- **Intersecciones con los ejes**

  - **Con el eje *Y* (ordenada al origen):**
    Evaluamos en $x = 0$:

$$f(0) = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$$

Punto: $(0, -3)$

  - **Con el eje *X* (raíces):**
    Resolvemos $x^2 - 3 = 0$

$$x_1 = \pm\sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Puntos: $(-1.73, 0)$ y $(1.73, 0)$

- **Vértice**

La forma es $f(x) = x^2 - 3$ con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -3$

El vértice está en:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2.1} = 0 \text{ y } y_v = f(0) = -3$$

Vértice: (0,−3) → es un **mínimo**.

- **Crecimiento y decrecimiento**

- La parábola abre hacia arriba ($a > 0$).
- Decrece en el intervalo $(-\infty; 0)$.
- Crece en el intervalo $(0, \infty)$.

- **Intervalos de positividad y negatividad**

**Positividad**: son los valores de $x$ para los cuales la función cumple $f(x) > 0$

Es decir, la gráfica de la función está **por encima del eje $x$**.

**Negatividad**: son los valores de $x$ para los cuales la función cumple $f(x) < 0$

Es decir, la gráfica de la función está **por debajo del eje $x$**.

- **Paridad**

$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$ y $f(x) = x^2 - 3 = f(x)$

Es una **función par**, simétrica respecto al eje $y$

## *EJERCITACIÓN*

1. Un programa social entrega becas a estudiantes según el siguiente esquema:

$$f(x) = 1500x + 3000f(x) = 1500x + 3000$$

donde $x$ es el número de meses desde el inicio del programa y $f(x)$ el monto total acumulado.

**a)** Determina el **dominio** y el **rango** si el programa dura 12 meses.
**b)** ¿La función es creciente o decreciente? Justifica
**c)** Calcula el monto recibido al cabo de 6 meses.
**d)** Representa gráficamente la función.
**e)** ¿Qué significado tienen la ordenada al origen y la raíz con respecto a la situación?

2. Se estima que la productividad de una empresa se modela con la función:

$$f(x) = -2x^2 + 12x + 20$$

donde $x$ son los años de actividad y $f(x)$ la productividad.

**a)** Identifica el **máximo/mínimo** de la función (año y productividad).
**b)** Determina tanto los intervalos de **crecimiento** y **decrecimiento** como los intervalos de **positividad** y **negatividad.**
**c)** Interpreta qué significa socialmente el valor máximo/mínimo en términos de productividad laboral.

3. La cantidad de usuarios de una red social se estima con la función:

$$f(x) = 2 \cdot 3^x$$

donde $x$ son los años desde su lanzamiento y $f(x)$ el número de millones de usuarios.

**a)** Calcula la cantidad de usuarios en los años $x = 0,1,2,3,4$.
**b)** Representa los valores en una tabla y un gráfico.
**c)** ¿Cómo varía la función? ¿Es creciente o decreciente? Justifica.
**d)** ¿Qué implicancias sociales podría tener un crecimiento tan acelerado en el uso de esta red?

4. A continuación, se presenta el gráfico de la **participación electoral en Argentina (2007–2023):**


**a)** Determina el dominio y el rango de la función.
**b)** Identifica el máximo y el mínimo.
**c)** Describí los intervalos de decrecimiento.
**d)** Escribí una conclusión sobre cómo evolucionó la participación ciudadana en estos años.

5. El siguiente gráfico muestra la evolución de la pobreza (%) en el país en los últimos 10 años.


**a)** Identifica periodos de **crecimiento** y **disminución**.
**b)** Relaciona máximos y mínimos con posibles eventos históricos (crisis, cambios de gobierno, pandemia, etc.).
**c)** ¿Hay un **cambio de tendencia** en algún punto?
**d)** Si fueras periodista, redacta un **título creativo** para ese gráfico.

6. Dada la siguiente función indiquen el dominio, la imagen, la intersección con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y de positividad y negatividad.