COLEGIO SANTA ROSA DE LIMA

CUADERNILLO DE MATEMATICA APLICADA

6° AÑO

CICLO 2026

PROF. LOURDES MUÑOZ 2026

PROGRAMA DE EXÁMEN

1° Cuatrimestre

UNIDAD 1: FUNCIONES TRASCENDENTES

Función exponencial: dominio, imagen, características de las gráficas según sus parámetros

Logaritmo. Definición. Logaritmos decimales y neperianos. Cambio de base.

Propiedades de los logaritmos.

Función logarítmica: dominio, imagen, características de las gráficas según sus parámetros. Aplicaciones de la función logaritmo.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

UNIDAD 2: TRIGONOMETRÍA

Trigonometría: Circunferencia trigonométrica. Ángulos orientados. Sistemas de medición de ángulos. Sistema Sexagesimal. Sistema radial de medición de ángulos. Relación entre las medidas de un ángulo. Pasaje de un sistema a otro. Razones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos, resolución de triángulos oblicuángulos. Teorema del seno y del coseno. Resolución de problemas. Funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Análisis de las gráficas. Identidades trigonométricas.

2° Cuatrimestre

UNIDAD 3: LÍMITE Y CONTINUIDAD

Función: definición, dominio y codominio. Función par e impar. Crecimiento y decrecimiento. Límite de una función escalar. Propiedades de los límites. Límites infinitos. Indeterminaciones. Continuidad de una función en un punto. Discontinuidad. Asíntotas.

UNIDAD 4: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Gráficos estadísticos. Intervalos de clase. Histograma. Parámetros de tendencia central. Parámetros de dispersión. Correlación lineal. Factorial de un número. Números combinatorios. Permutaciones, variaciones y combinaciones. Cálculo de probabilidades.

ACUERDO PEDAGOGICO

Se evaluará de los alumnos de …… año …… división del Colegio Santa Rosa de Lima, contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Para el trabajo en el aula el alumno deberá usar:
  - ✓ Cuaderno o carpeta y/o guías de estudio y/o. Se sugiere el uso de papel cuadriculado.
  - ✓ Lapicera azul o negra, lápiz negro, goma y útiles de geometría.
  - ✓ Hojas de block cuadriculada tamaño N° 3, para la presentación de trabajos prácticos y evaluaciones escritas.

- Comprensión, transferencia e integración de lo aprendido. (Preguntar a el/la profesor/a, las veces que sea necesario, todas las dudas mientras se desarrollan los temas para llegar a la evaluación con la mejor preparación posible. El/la profesor/a responderá siempre que el alumno haya prestado debida atención a las explicaciones).

- Las consignas deberán ser respondidas con el alcance y profundidad solicitados, manifestando buen dominio de la terminología y coherencia en la redacción.

- Se tendrá en cuenta la "lectura" contemplando: fluidez, entonación, respeto de los signos de puntuación y la comprensión de los textos abordados.

- Responsabilidad, orden y prolijidad en la presentación de todas las actividades. Los alumnos deberán tener el cuaderno o carpeta completos. El docente puede solicitarlos en cualquier momento de la clase.

- Tareas extra-áulicas: resolverán la ejercitación pendiente y/o solicitada por el docente a cargo, se realizará la revisión de la misma para asegurar el dominio de los contenidos de manera significativa.

- En las evaluaciones escritas y trabajos prácticos se tendrá en cuenta la ortografía, presentación, redacción y expresión oral, considerando para estos ítems un puntaje de hasta un punto respecto del puntaje total de la evaluación.

- Ante la presentación de una evaluación en blanco, el alumno tendrá calificación 1 (uno), y además se le solicitará que justifique por escrito el motivo.

- Para preservar el clima áulico productivo en el desarrollo de las actividades, el alumno deberá respetar y cumplir con las pautas de convivencia.

- El alumno deberá ingresar puntualmente al aula, ya sea al terminar el izamiento de Bandera o luego de cada recreo.

- Participación activa y disciplinada en todas las actividades individuales y/o grupales.

- Colaboración desinteresada y respeto hacia sus semejantes. (Actuar solidaria y respetuosamente ante las dificultades ajenas. No interrumpir la clase sin motivo justificado. No molestar con bromas inapropiadas, sobrenombres, vocabulario inadecuado, etc.)

- Proceder con absoluta honestidad:
  - ✓ En la presentación de trabajos individuales y grupales.
  - ✓ No presentar trabajos fotocopiados o idénticos, de lo contrario le corresponderá calificación 1 (uno).

UNIDAD I

Funciones Trascendentes

La Función Exponencial, nos ayuda a mostrar fenómenos que se incrementan de manera rápida. Un ejemplo de ésta es la proliferación que tiene una bacteria en la población, ya que, si esta es infecciosa, cada cierto período de tiempo triplicará su cantidad de componentes. Esto indica que, cada cierto período de tiempo, habrá 3^x bacterias.

Estos indican que,

- Al pasar la primera hora: $f(1) = 3^1 = 3$. Tendrá tres bacterias más.
- Al transcurrir dos horas: $f(2) = 3^2 = 9$. Tendrá nueve bacterias más.
- Al pasar tres horas: $f(3) = 3^3 = 27$. Habrá veintisiete bacterias más.

Y así sucesivamente.

> Se denomina función exponencial a toda función de la forma:
>
> $y = k.a^{x-b} + c$ con $a > 0, a \neq 1, k \neq 0, b, c$ números reales

Para comparar y analizar de un modo más general estas curvas, vamos a estudiar cómo se ven afectadas por la variación de las constantes **k, a, b y c.**

Funciones de la forma: $\boldsymbol{y = a^x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = 1\,;\, b = c = 0}$

Para cada función completar la tabla de valores y realizar la gráfica aproximada y luego determinar sus características:

a) $y = 2^x$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

b) $y = (\frac{1}{2})^x$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

Conclusiones:

Cuando $k = 1$ la función corta al eje y en (0;1). Es decir $\boldsymbol{k = 1}$ *es la ordenada al origen*.

Si $\boldsymbol{a > 1}$ entonces la función es *creciente*

Si $\boldsymbol{0 < a < 1}$ entonces la función es *decreciente*

Cuando las bases son inversas, sus representaciones gráficas son *simétricas* con respecto al eje y.

Funciones de la forma: $\boldsymbol{y = k.a^x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k \neq 1\,;b = c = 0}$

Completar la tabla de valores y realizar la gráfica aproximada

c) $y = 3.2^x$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

Conclusiones:

Cuando $\boldsymbol{k \neq 1}$ la función corta al eje y en **(0; k)**. Es decir $\boldsymbol{k}$ *es la ordenada al origen*.

Funciones de la forma : $\boldsymbol{y = a^{x-b}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k = 1\,;\, b \neq 0;\, c = 0}$

Completar la tabla de valores y realizar la gráfica aproximada

d) $y = (\frac{1}{2})^{x-1}$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

Conclusiones:

- El valor b indica el desplazamiento del eje y con respecto al eje x**.** Si b es positivo el “eje y” se desplaza hacia la derecha, si b es negativo el “eje y” se desplaza hacia la izquierda.
- El valor $k = 1$ indica la ordenada al origen de los ejes trasladados.

Funciones de la forma : $\boldsymbol{y = k.a^{x-b} + c}$

Realizar la gráfica aproximada de la siguiente función sin utilizar la tabla de valores.

e) $y = 3.2^{x+1} - 4$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

f) $y = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$

Dominio:..............................

Imagen: ....

Raíz: ....

Ordenada al origen: ....

Crecimiento: ....

Conclusión Final

Indica la ordenada al origen de los ejes trasladados

Indica desplazamiento del eje y

$$\boldsymbol{y = k.a^{x-b} + c}$$

Si $a > 1$ es **creciente**

Si $0 < a < 1$ es **decreciente**

Indica el desplazamiento del eje x

ESTUDIAR

PRACTICA 1

Actividad 1: Indicar cuál de las siguientes funciones son exponenciales. Justificar adecuadamente.

a) $y = 9^x$

b) $y = (0,3)^x$

c) $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$

d) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

e) $y = x^5$

f) $y = (-4)^x$

g) $y = 1^x$

h) $y = 0^x$

Actividad 2: Unir con una flecha cada función con su asíntota correspondiente. Justificar realizando la gráfica de cada función.

a) $y = 4^{x+3}$ — $y = -4$
b) $y = 2^{x-4}$ — $y = -3$
c) $y = (\frac{2}{3})^x + 3$ — $y = 0$
d) $y = -3 - 2^{x-3}$ — $y = 1$
e) $y = 5.2^{x-3} + 4$ — $y = 4$

Actividad 3: Representar gráficamente, sin tabla, las siguientes funciones. Analizar en forma completa.

a) $y = 2.3^x$
b) $y = 3^x - 2$
c) $y = 3^{x-2}$
d) $y = 2.(\frac{1}{4})^x$
e) $y = 2.(\frac{1}{4})^{x-1}$
f) $y = 2.(\frac{1}{4})^{x-1} + 3$

Actividad 4: Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones del medio en que se encuentren (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que inicialmente hay una ameba.

a) Calcula el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y completa esta tabla.

Tiempo	0h	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h
Número de amebas	1								

b) Halla la fórmula de la función que representa esta reproducción y gráfica la función.

Actividad 5: Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias, y lo hacen con mayor o menor rapidez según de cual se trate. Supongamos que tenemos 1kg. De una sustancia radioactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año. El resto de la masa no desaparece, sino que se transforma en otro componente químico distinto.

a) Averigua que cantidad de sustancia radiactiva. Utiliza la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales.

Tiempo en años	0	1	2	3	4
Kg de sustancia	1				

b) Halla la fórmula de la función que representa esta desintegración y grafica la función.

Actividad 6: Dadas las siguientes funciones:

$a)\ y = 2.3^x$ $b)\ y = 2.(\frac{1}{4})^x$ c) $y = 2.(\frac{1}{4})^{x-1}$

1) Representarlas gráficamente, en distintos sistemas de coordenadas

2) Observando la gráfica analice y determine, de cada una de ellas:
- Dominio
- Imagen
- Raíces
- Ordenada
- Crecimiento
- Asíntota

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Las *ecuaciones exponenciales* son aquellas en la que la incógnita aparece como exponente.

Veamos algunos *ejemplos*:

a) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

b) $3.4^{x+1} = 96$

c) $2^{2x} - 9.2^{x} + 8 = 0$

Para resolver una *ecuación exponencial* se debe aplicar la siguiente PROPIEDAD:

$$z^m = z^t \quad \text{entonces} \quad m = t \qquad (\text{con } z \neq 0, z \neq 1 \text{ y } z \neq -1)$$

Solución de ecuaciones exponenciales

PRIMER CASO: "TRANSFORMANDO LA BASE"

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4 \Rightarrow \quad x = 4$ igualando los exponentes

b) $3^{x-1} = 27$

$3^{x-1} = 3^3$

$x - 1 = 3 \Rightarrow \quad x = 4$ igualando los exponentes

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

$[(2)^{-1}]^x = 2^{\frac{3}{2}}$

$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$-x = \frac{3}{2} \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$ igualando los exponentes

SEGUNDO CASO: "APLICANDO PROPIEDADES DE POTENCIA"

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ aplicamos propiedades de potencia

$$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^1 = 90$$

$$3^x \left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90$$

$$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$$

$$3^x = 90 : \frac{10}{3}$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$ igualando los exponentes

e) $3.4^{x+1} = 96$

$$4^{x+1} = 96 : 3$$

$$4^{x+1} = 32$$

$$(2^2)^{x+1} = 2^5$$

$$2^{2x+2} = 2^5$$

$$2x + 2 = 5$$

$$2x = 5 - 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$ igualando los exponentes

TERCER CASO: "A través de una ecuación de segundo grado"

f) $2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0$ aplicamos propiedades de potencia

$$(2^x)^2 - 9.2^x + 8 = 0$$ reemplazamos $(2^x = Z)$

$$z^2 - 9 \cdot z + 8 = 0$$ resolvemos la ecuación de segundo grado

Resolviendo obtenemos que $z_1 = 8$ y $z_2 = 1$. Como $2^x = z$, resulta que,

Cuando $z_1 = 8$, entonces $2^x = 8$. Luego $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$.

Cuando $z_2 = 1$, entonces $2^x = 1$. Luego $2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$.

PRACTICA 2

Actividad 1: Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y verifique los resultados obtenidos. Justifique adecuadamente.

a) $5^{x} = 625$

b) $3^{x-1} = 81$

c) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

d) $2^{2x-3} = \frac{1}{4}$

e) $6^{2x-2} = 1$

f) $3^{x-5} = 27^{x} - 1$

g) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

h) $3^{x} - 3^{x-2} + 3^{x+2} = 89$

i) $4^{x} - 5.2^{x} + 4 = 0$

j) $4^{\frac{x-2}{x+3}} = 4^{\frac{x}{x+2}}$

Actividad 2: Resolver los siguientes problemas aplicando ecuaciones exponenciales. Justificar adecuadamente.

a) la circulación de un periódico por día está dada por la ecuación $C = 2^{t+1}$. Si la tirada es de 32 mil periódicos ¿En qué tiempo se alcanzó?

b) El número de bacterias de un cultivo está dado por Nt = 500. 3^{t+2} donde t se mide en horas. Si el número de bacterias es de 22113.

¿Cuánto tiempo transcurrió?

Ecuación Logarítmica

El logaritmo es una operación entre dos números reales a y b, llamados base y argumento respectivamente y se define como:

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ (Se lee: "logaritmo en base "a" de "b" es "c")

Es decir: el logaritmo en base "a" de un número "b" es el número "c", si "a" elevado a la exponente "c" da como resultado "b"

Nota importante:

"a", es la base del logaritmo y debe ser un número real positivo y distinto de 1 (a>0; a≠1)

"b" es el argumento del logaritmo y debe ser un número real positivo (b>0)

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- PROPIEDAD 1: $\log_b b = 1 \; porque \; b^1 = 1$

  Ejemplo: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

- PROPIEDAD 2: $\log_b 1 = 0 \; porque \; b^0 = 1$

  Ejemplo: $\log_3 1 = 0 \leftrightarrow 3^0 = 1$

- PROPIEDAD 3: El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.

  $$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_x y$$

  Ejemplo: $\log_5 (5.25) = \log_5 5 + \log_5 25$ = 1 + 2 =3

- PROPIEDAD 4: El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos.

  $$\log_b (x:y) = \log_b x - \log_x y$$

  Ejemplo: $\log_3 \left(\frac{81}{27}\right) = \log_3 (81:27) = \log_3 81 - \log_3 27$ = 4 −3 = 1

- PROPIEDAD 5: El logaritmo de una potencia es igual a la multiplicación del exponente por el logaritmo de la base.

  $$\log_b x^y = y.\log_b x$$

  Ejemplo: $\log_6 216^4$= 4.$\log_6 216$ = 4.3 = 12

- PROPIEDAD 5: El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido en el índice de la raíz.

  $$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{\log_b x}{n}$$

Ejemplo: $\log_3 \sqrt[4]{81} = \frac{\log_3 81}{4} = \frac{4}{4} = 1$

PRACTICA 3

Actividad 1: Indique V (verdadero) o F (falso)

a) $\log_3 7 + \log_5 9 = \log_8(7+9)$

b) $\log_3 24^2 = 2.\log_3 24$

c) $ln(3.27) = 3.ln27$

d) $ln = ln10 + ln11$

e) $\log_8 5^3 = 3.\frac{\log 5}{\log 8}$

f) $\log_9 41 = \frac{\log 41}{\log 9}$

Actividad 2: Resuelve aplicando propiedades

a) $\log_8\left(2.\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) =$

b) $\log_3 \frac{\sqrt[3]{3}.27}{81} =$

c) $\log_3 \frac{\sqrt{3}.\frac{1}{9}}{81} =$

d) $\log\left(\frac{0{,}001}{\sqrt{10}}\right)^3 =$

e) $\log_2 \frac{8}{\sqrt{2}} =$

Actividad 3: Exprese los siguientes logaritmos en función de a y b sabiendo que $\log_7 2 =$ a y $\log_7 3 =$ b

a) $\log_7 12 =$

b) $\log_7 72 =$

c) $\log_7 \sqrt{6} =$

d) $\log_7 \sqrt[3]{9} =$

e) $\log_7(\sqrt{2}.\sqrt{3}) =$

¡Ayuda! A continuación, te daré un ejemplo de cómo resolver el ejercicio planteado, en este caso tienes el logaritmo en base 7 de 6, para poder calcularlo debes pensar como formar el 6 con los datos brindados, teniendo en cuenta las propiedades. Es un ejercicio que pone a prueba tu razonamiento y tú comprensión del tema. ¡Éxitos!

$$\log_7 6 = \log_7(2.3) = \log_7 2 + \log_7 3 = a + b$$

Actividad 4: Resolver cada ecuación utilizando definición y propiedades de logaritmo.

a) $4\log_{10} x = 2\log_{10} x + \log 4 + 2 = 1$

b) $log(x^4) = log\, x^2 + log\, 4 + log100$

c) $log\, \frac{x^4}{4} = \log_{10}(100x^2)$

d) $log(7x + 1) = 2\, log(x + 3) - log\, 2$

e) $2log(x - 1) = 0$

f) $\log_2 x^2 + 3\log_2 x = 10$

Propiedades de Logaritmos	
Logaritmo de un producto	$log_a(m.n) = log_a m + log_a n$
Logaritmo de un cociente	$log_a\left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$
Logaritmo de una potencia	$log_a m^r = r.log_a m$
Logaritmo de una raíz	$log_a \sqrt[n]{m} = log_a m^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.log_a m$
Logaritmo de uno	$log_a a = 1$
Cambio de base	$log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$
Regla de la cadena	$log_b a.log_c b.log_d c = log_d a$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se define *función logarítmica* de base b a la función inversa de la función exponencial de base b.

$$f(x) = y = log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, siendo\ x > 0; b > 0; b \neq 1$$

PRACTICA 4

Actividad 1: Representarlas gráficamente, en distintos sistemas de coordenadas. Luego observando las gráficas, analice y complete el cuadro.

Función	Dominio	Imagen	Raíz	Ordenada	Crecimiento	Asíntota
$y = 4\log_2(x-3)$						
$y = \log_4(3x-10)$						
$y = \log_2 x$						
$y = \log_{10} x + 1$						

Actividad 2: Dada las siguientes funciones:

a) $f(x) = log_2(x+3)$

b) $f(x) = \ log_3(x-1) + 4$

c) $f(x) = \ log_{1/2}(5+x) - 2$

d) $f(x) = log_3(-x+1) - 3$

e) $f(x) = -0{,}3\ log_2(x+3)$

Grafica y realiza un análisis completo de cada función:

- Encuentra la raíz. Ordenada al Origen
- Asíntota
- Dominio
- Imagen
- Tramo de crecimiento y/o decrecimiento

UNIDAD 2

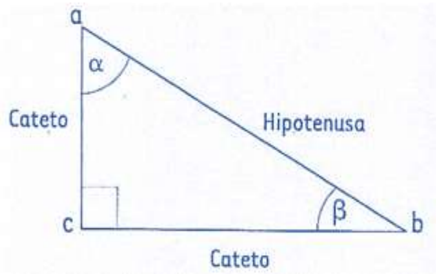
Trigonometría

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

En un triángulo rectángulo se cumple:

- Que los ángulos agudos son complementarios,

  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$
- El Teorema de Pitágoras, $\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{cb}^2$.



Razones trigonométricas

Se llaman razones trigonométricas a aquellas que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.

Para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, uno de los catetos es el adyacente y el otro es el opuesto.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

- Seno de un ángulo: es *la razón (cociente) entre el cateto opuesto y la hipotenusa*.

$$\mathbf{sen}\ x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- Coseno de un ángulo: es *la razón (cociente) entre el cateto adyacente y la hipotenusa*.

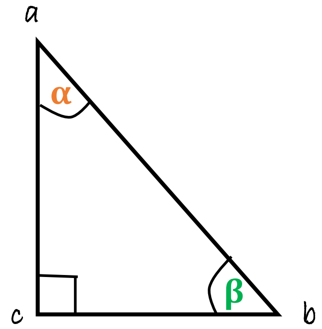
$$\mathbf{cos}\ x = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- Tangente de un ángulo: es *la razón (cociente) entre el cateto opuesto y el cateto adyacente*.

$$\mathbf{tg}\ x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Cateto opuesto a $\hat{\beta}$

Cateto adyacente a $\hat{\alpha}$



Cateto adyacente a $\hat{\beta}$

Cateto opuesto a $\hat{\alpha}$

$$\textbf{sen}\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ab}} \quad \text{y} \quad \textbf{sen}\,\hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}}$$

$$\textbf{cos}\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} \quad \text{y} \quad \textbf{cos}\,\hat{\beta} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ab}}$$

$$\textbf{tg}\,\hat{\alpha} = \frac{\overline{cb}}{\overline{ac}} \quad \text{y} \quad \textbf{tg}\,\hat{\beta} = \frac{\overline{ac}}{\overline{cb}}$$

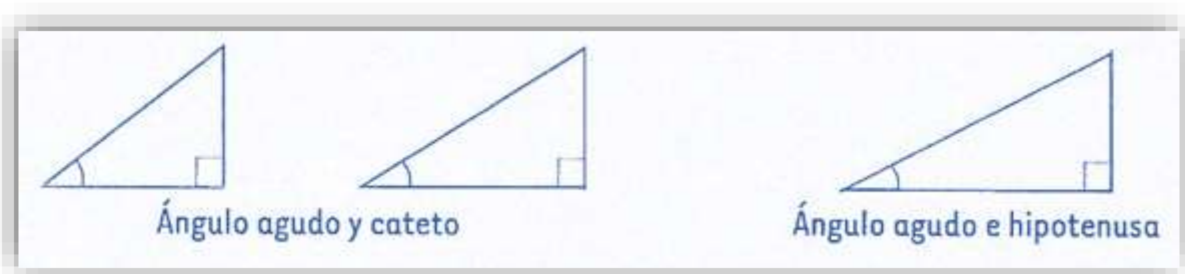
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo significa conocer el valor de sus *tres ángulos* y sus *tres lados*.

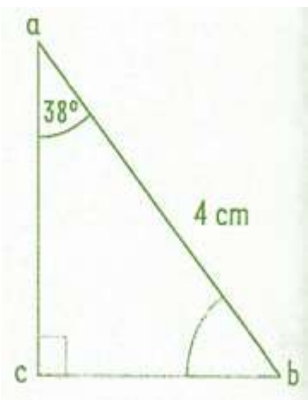
Un triángulo queda perfectamente determinado si se conocen tres de sus elementos, siempre que uno de ellos sea un lado.

Para resolver un *triángulo rectángulo*, como el ángulo recto ya está determinado, se debe conocer al menos el valor de uno de sus ángulos agudos y un lado, o el valor de dos de sus lados.

- *Conocidos un ángulo agudo y uno de sus lados.*



Ejemplo:



Para calcular el ángulo $\hat{b}$, se debe aplicar la propiedad de los ángulos agudos.

$$\hat{a} + \hat{b} = 90° \quad \Rightarrow \quad \hat{b} = 90° - \hat{a} = 90° - 38° = 52° \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hat{b} = 52°}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{ac} = \overline{ab} \cdot \cos \hat{a} = 4cm \cdot \cos 38° \cong 4cm \cdot 0{,}79 \cong 3{,}16\ cm$$

Para calcular el lado $\overline{ac}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el lado.

$$\overline{\boldsymbol{ac}} \cong \mathbf{3,16}\ \boldsymbol{cm}$$

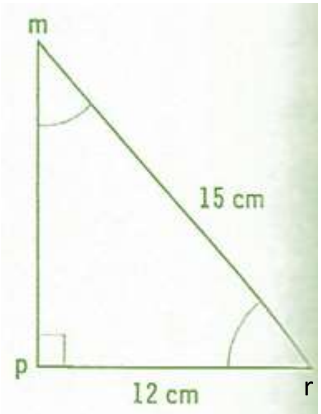
Para calcular el lado $\overline{bc}$ se razona de la misma manera.

$$\operatorname{sen} \hat{a} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} \quad \Rightarrow \quad \overline{bc} = \overline{ab} \cdot \operatorname{sen} \hat{a} = 4cm \cdot \operatorname{sen} 38° \cong 4cm \cdot 0{,}62 \cong 2{,}48\ cm$$

$$\overline{\boldsymbol{bc}} \cong \mathbf{2,48}\ \boldsymbol{cm}$$

- *Conocidos dos de sus lados.*

<u>Ejemplo:</u>



Para calcular el lado $\overline{mp}$, se debe aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\overline{mr}^2 = \overline{rp}^2 + \overline{mp}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{mp} = \sqrt{\overline{mr}^2 - \overline{rp}^2} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{mp} = \sqrt{(15cm)^2 - (12cm)^2} = \sqrt{225cm^2 - 144cm^2} = 9cm$$

$$\overline{\boldsymbol{mp}} = \mathbf{9}\boldsymbol{cm}$$

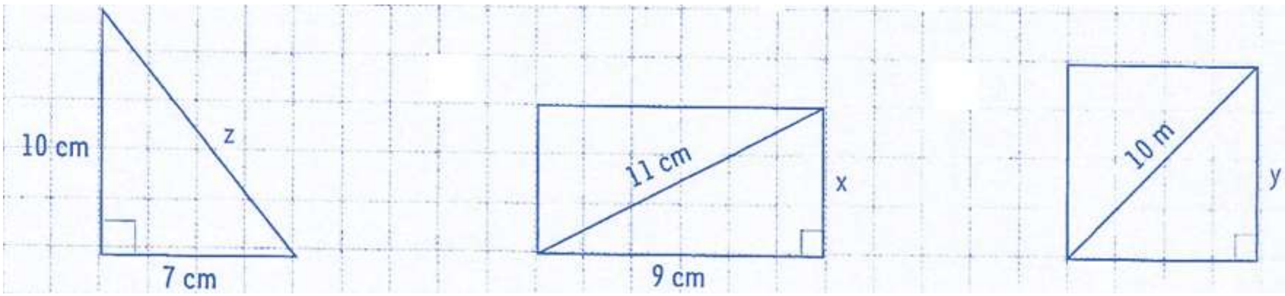
Para calcular el ángulo $\hat{m}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el ángulo.

$$\operatorname{sen} \hat{m} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \hat{m} = \frac{12cm}{15cm} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{m}} \cong \mathbf{53°}$$

Para calcular el ángulo $\hat{r}$, se debe razonar de la misma manera.

$$\cos \hat{r} = \frac{\overline{rp}}{\overline{mr}} \quad \Rightarrow \quad \cos \hat{r} = \frac{12cm}{15cm} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}} \cong \mathbf{36°}$$

Actividad 1: Halle el valor del lado desconocido en cada una de las siguientes figuras.



Actividad 2: Halle la razón trigonométrica y, con la calculadora, el ángulo correspondiente.

a) $\operatorname{sen}\hat{\varepsilon} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\varepsilon} \cong$

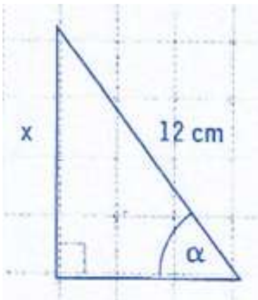
b) $\cos\hat{\varepsilon} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\varepsilon} \cong$

c) $\operatorname{sen}\hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$

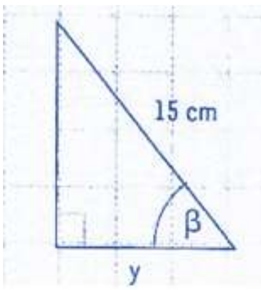
d) $\operatorname{tg}\hat{\delta} =$ $\Rightarrow$ $\hat{\delta} \cong$

Actividad 3: Calcule los valores de x y de y, teniendo en cuenta los datos correspondientes a cada figura.

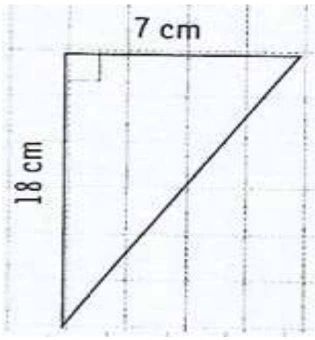
a) $\operatorname{sen}\hat{\alpha} = 0.896$

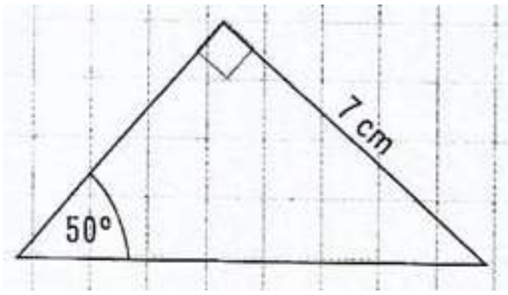


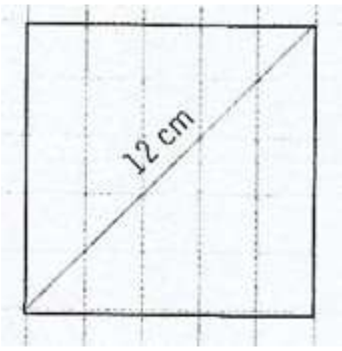
b) $\cos\hat{\beta} = 0.347$

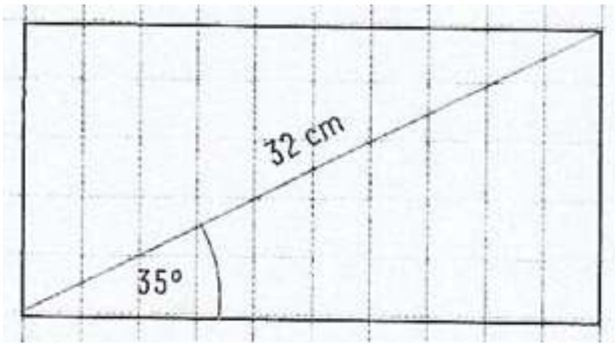


Actividad 4: Calcule el perímetro de cada una de las siguientes figuras.



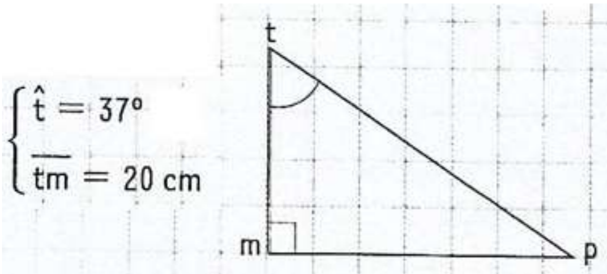




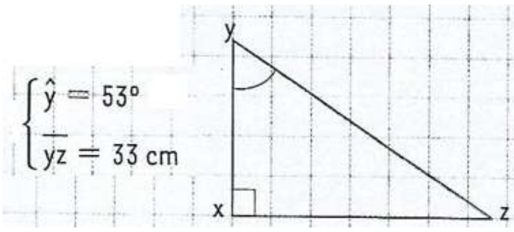


Actividad 5: Resuelva los siguientes triángulos rectángulos.

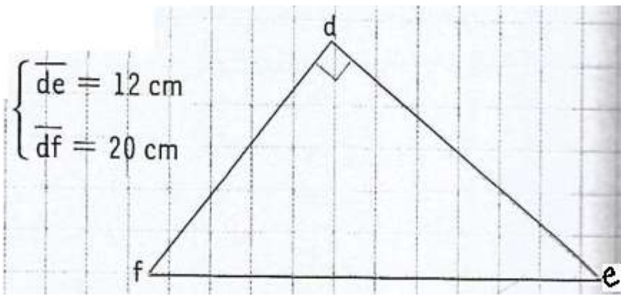
c)



d)

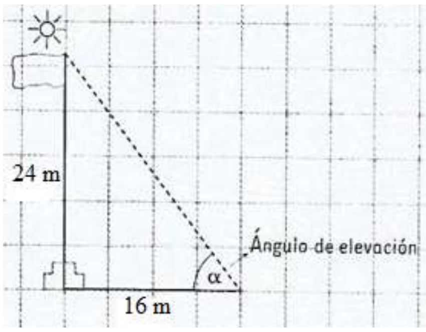


e)

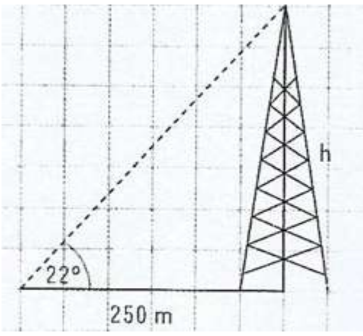


Actividad 6: Plantee y resuelva los siguientes problemas.

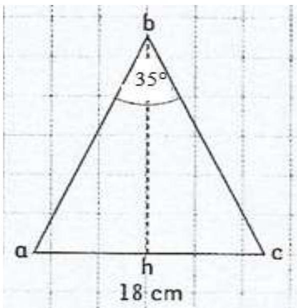
f) ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 24 m proyecta una sombra de 16 m?



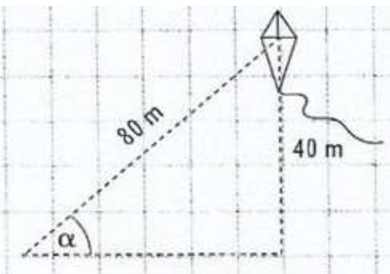
g) ¿Cuál es la altura de una antena si una persona que se encuentra a 250 m de su base, observa su punta bajo un ángulo de 22°?



h) ¿Cuál es el área de un triángulo isósceles, cuya base mide 18 cm y el ángulo opuesto a ella mide 35°?



i) Un barrilete se encuentra a 40 m de altura y su cuerda tiene una longitud de 80 m. ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con el piso?

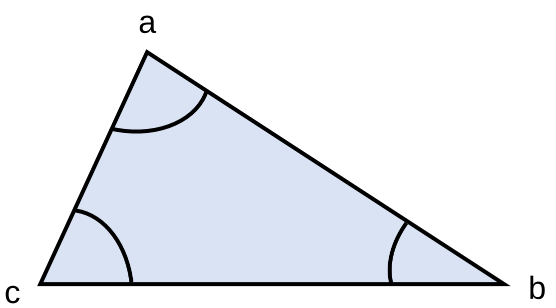


No siempre se tienen triángulos rectángulos. Para todos aquellos problemas que se traducen a otros tipos de triángulos existen dos teoremas. El Teorema de Coseno y el Teorema del Seno. Cabe destacar que también se pueden aplicar a triángulos rectángulos. Es decir, estos dos teoremas sirven para todos los triángulos.

TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO.

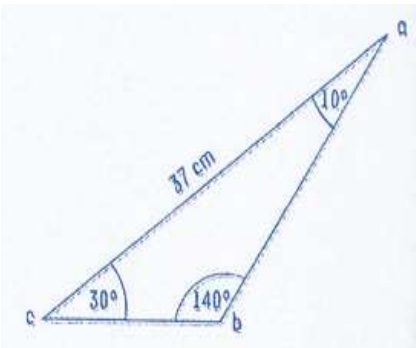
Los siguientes teoremas relacionan los lados de cualquier triángulo con sus ángulos interiores.

Teorema del seno: *En todo triángulo, sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*



$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}\hat{a}} = \frac{\overline{ac}}{\operatorname{sen}\hat{b}}$$

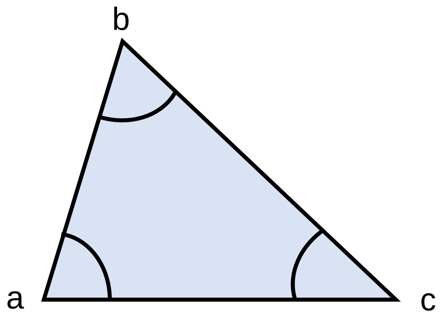
<u>Ejemplo</u> Para calcular los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cb}$, del siguiente triángulo, se aplica el teorema del seno.



$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}30°} = \frac{37\ cm}{\operatorname{sen}140°} \Rightarrow \overline{ab} = \frac{37\ cm}{\operatorname{sen}140°}\cdot\operatorname{sen}30° \cong 28{,}78\ cm$$

$$\frac{\overline{cb}}{\operatorname{sen}10°} = \frac{37\ cm}{\operatorname{sen}140°} \Rightarrow \overline{cb} = \frac{37\ cm}{\operatorname{sen}140°}\cdot\operatorname{sen}10° \cong 10\ cm$$

Teorema del coseno: El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

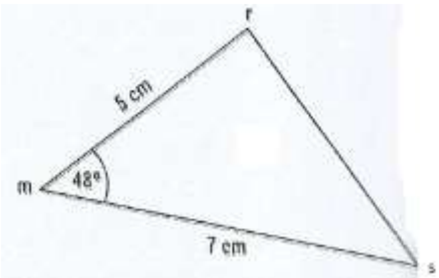


$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ca}^2 - 2 \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} \cdot \cos \hat{c}$$

$$\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2 - 2 \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab} \cdot \cos \hat{a}$$

$$\overline{ca}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \cos \hat{b}$$

Ejemplo. Para calcular el lado $\overline{rs}$, del siguiente triángulo, se aplica el teorema del coseno.

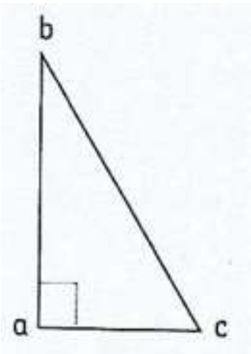


$$\overline{rs}^2 = \overline{sm}^2 + \overline{mr}^2 - 2 \cdot \overline{sm} \cdot \overline{mr} \cdot \cos \hat{m}$$

$$\overline{rs}^2 = (7\ cm)^2 + (5\ cm)^2 - 2 \cdot 7cm \cdot 5cm \cdot \cos 48°$$

$$\overline{rs}^2 \cong 27{,}16\ cm^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{rs} = \sqrt{27{,}16cm^2} \cong 5{,}21\ cm$$

El *Teorema de Pitágoras* es un caso particular del teorema del coseno.



$$\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2 - 2 \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab} \cdot \cos \hat{a}$$

$$\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2 - \underbrace{2 \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab} \cdot \cos 90°}_{0}$$

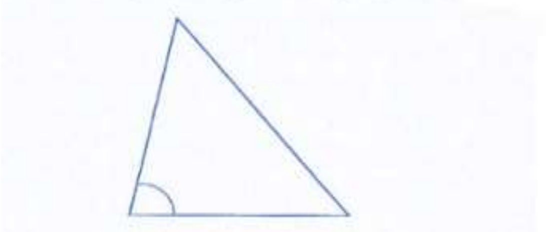
$$\overline{bc}^2 = \overline{ca}^2 + \overline{ab}^2$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

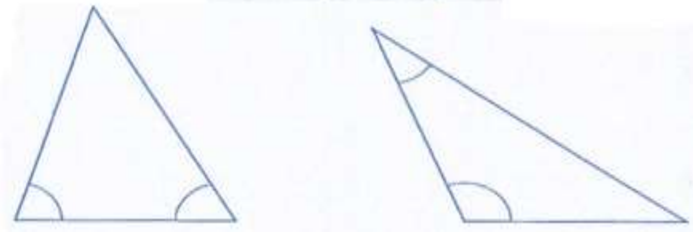
Un triángulo es *oblicuángulo* cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto. Resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados. Para ello hay que aplicar el teorema del seno, del coseno y la propiedad de la suma de sus ángulos interiores, que es 180°.

Se pueden presentar distintos casos.

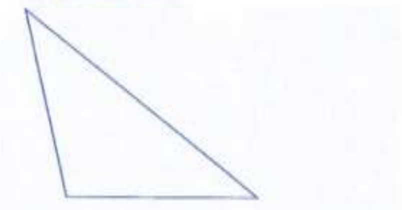
Dos lados y el ángulo comprendido



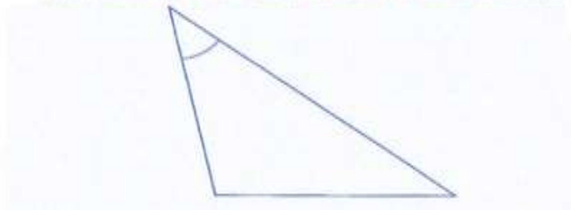
Un lado y dos ángulos



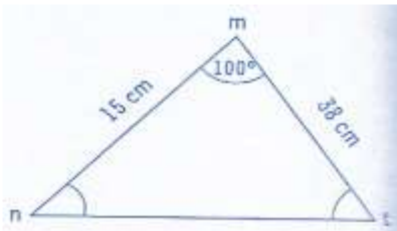
Los tres lados



Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos



Ejemplo: Resolver el siguiente triángulo oblicuángulo dados *dos lados* y el *ángulo comprendido* entre ellos.



- Se aplica el teorema del coseno para calcular el lado $\overline{nt}$.

$$\overline{nt}^2 = (38\ cm)^2 + (15\ cm)^2 - 2 \cdot 38cm \cdot 15cm \cdot \cos 100°$$

$$\overline{nt}^2 \cong 1866{,}96\ cm^2$$

$$\overline{nt} = \sqrt{1866{,}96cm^2} \cong 43{,}2\ cm$$

- Se aplica el teorema del seno para determinar el ángulo $\hat{n}$.

$$\frac{38\ cm}{\operatorname{sen}\hat{n}} = \frac{43{,}2\ cm}{\operatorname{sen} 100°} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\hat{n}}{38\ cm} = \frac{\operatorname{sen} 100°}{43{,}2\ cm} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\hat{n} = \frac{\operatorname{sen} 100°}{43{,}2\ cm} \cdot 38\ cm \cong 0{,}866$$

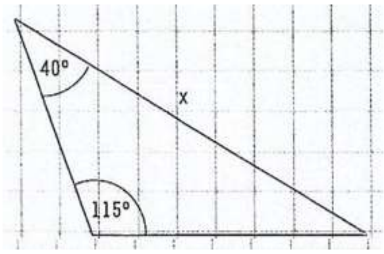
$$\Rightarrow \quad \hat{n} = \operatorname{arcsen} 0{,}866 \cong 60° \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hat{n} = 60°}$$

- Se aplica la propiedad de la suma de los ángulos interiores, que es 180°, para averiguar $\hat{t}$.

$$\hat{t} + \hat{m} + \hat{n} = 180° \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = 180° - \hat{m} - \hat{n} = 180° - 100° - 60° = 20° \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\hat{t} = 20°}$$

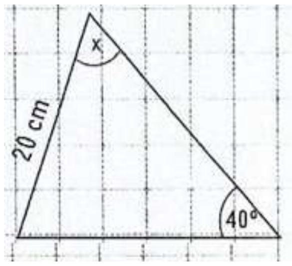
Actividad 1: Calcule el valor de x en cada una de las siguientes figuras.

a.



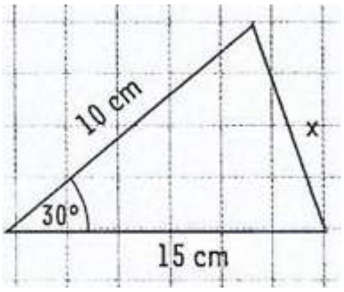
45 cm

b.

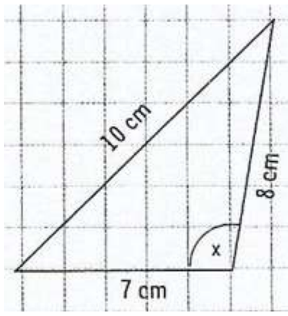


30 cm

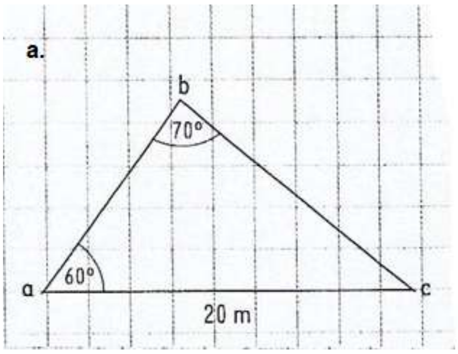
c.



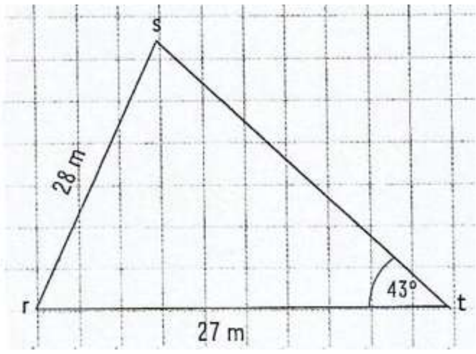
d.



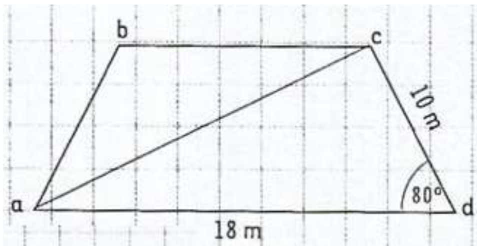
Actividad 2: Resuelva los siguientes triángulos oblicuángulos.



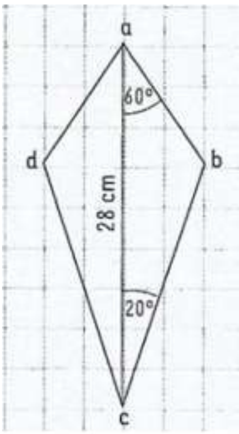
b.



Actividad 3: Calcule el valor de la diagonal $\overline{ac}$, del trapecio isósceles $abcd$.

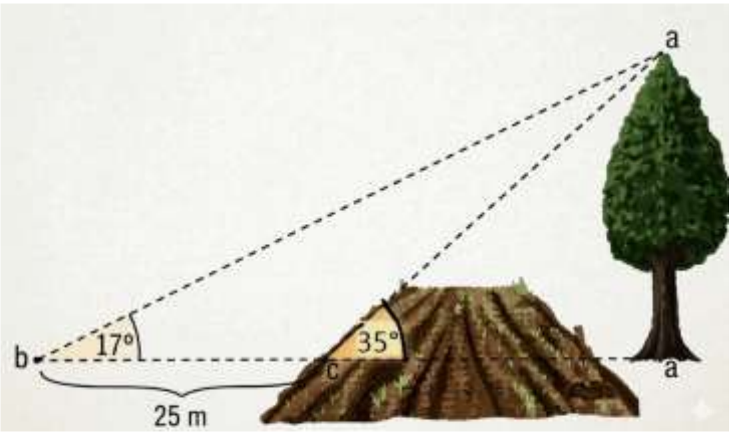


Actividad 4: Calcule el perímetro del romboide $abcd$.

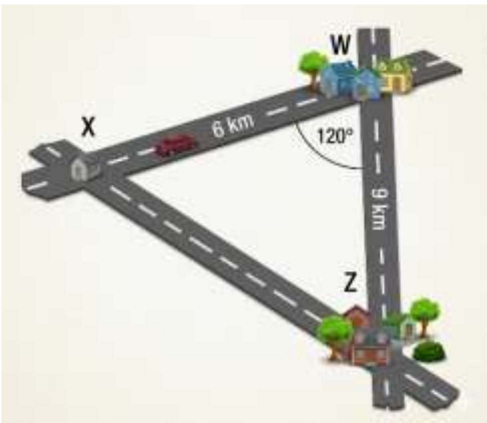


Actividad 5: Plantee y resuelva cada uno de los siguientes problemas.

a) Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto, ubicado en la otra margen del río, determina un ángulo de elevación de 17°. Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?

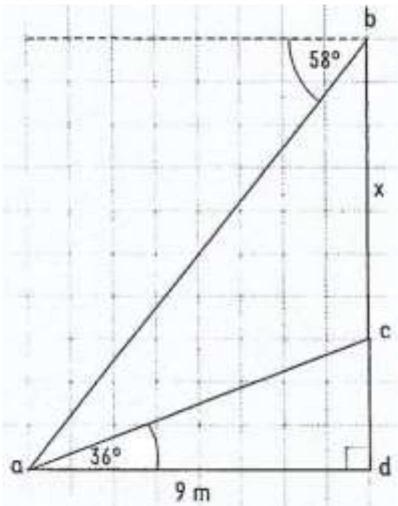


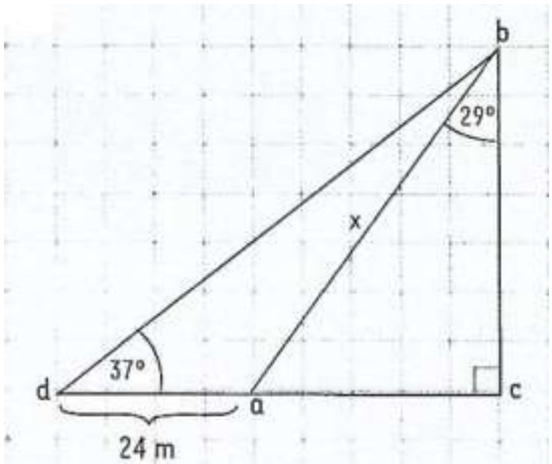
b) Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6 km; a los pueblos W y Z los separan 9 km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°. ¿Qué distancia hay entre X y Z?



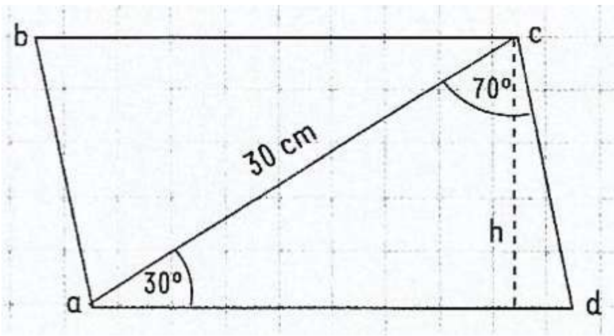
c) En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m. ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?

d) Calcule el valor de x en cada una de las siguientes figuras.





e) Calcule el perímetro y el área del siguiente paralelogramo.



UNIDAD 3

Límite y Continuidad

Concepto intuitivo de límite.

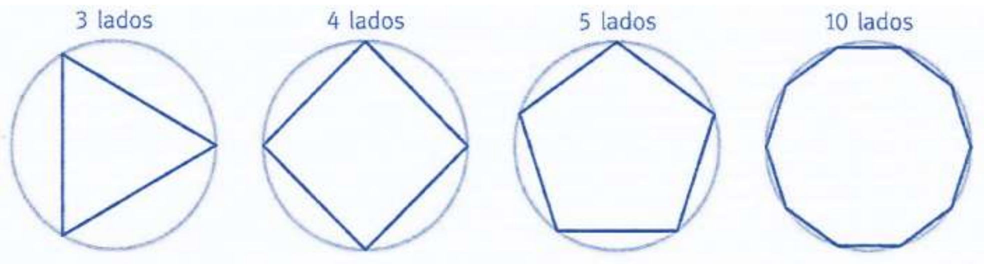
Las propiedades de continuidad y densidad de los números reales están íntimamente ligadas al concepto de *límite*..

Densidad. El conjunto de los números reales es denso porque entre dos números reales, siempre existe otro número real.

Continuidad. El conjunto de los números reales es continuo porque a cada punto de la recta numérica, le corresponde un número real y recíprocamente.

A partir de los siguientes ejemplos es posible acercarse a la definición de *límite.*

- Podemos aproximarnos a la longitud de una circunferencia a partir de una sucesión de polígonos inscriptos en la misma.



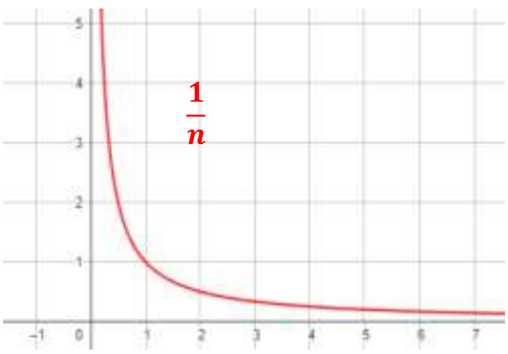
A medida que aumenta la cantidad de lados, se obtienen polígonos cuyos perímetros se aproximan a la longitud de la circunferencia.

Decimos que la longitud de la circunferencia es el límite de la sucesión de polígonos inscriptos en la misma.

- En la sucesión $\frac{1}{n}$, podemos considerar los siguientes valores:

$\boldsymbol{n}$	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\boldsymbol{\frac{1}{n}}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001

Decimos que 0 es el límite de la sucesión $\frac{1}{n}$



Para valores de n cada vez más grandes, la sucesión toma valores cada vez más pequeños, es decir que tienden a acercarse a cero.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$, se calculan los valores de $f(x)$ próximos a $x = 1$.

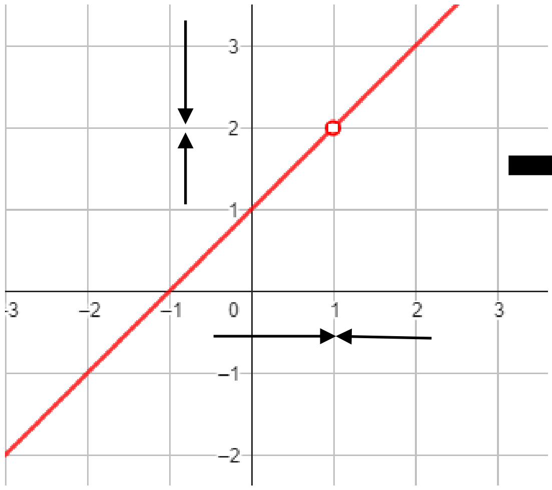
x se aproxima a 1 por izquierda → ← x se aproxima a 1 por derecha

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2,0001	2,001	2,01	2,1

f(x) se aproxima a 2 → ← f(x) se aproxima a 2

Para graficar $f(x)$, se factoriza y simplifica su expresión,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$



$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Como se observa en el gráfico, el punto de abscisa 1 no pertenece al dominio de la función, pero a medida que x se aproxima a 1, los valores de $f(x)$ se aproximan a 2.

Se determina así que el "límite de la función $f(x)$, cuando x tiende (se aproxima) a 1, es 2".

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo, que incluya o no al número "a", el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a es L, si $|f(x) - L|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera cuando $|x - a|$ es lo suficientemente pequeña.

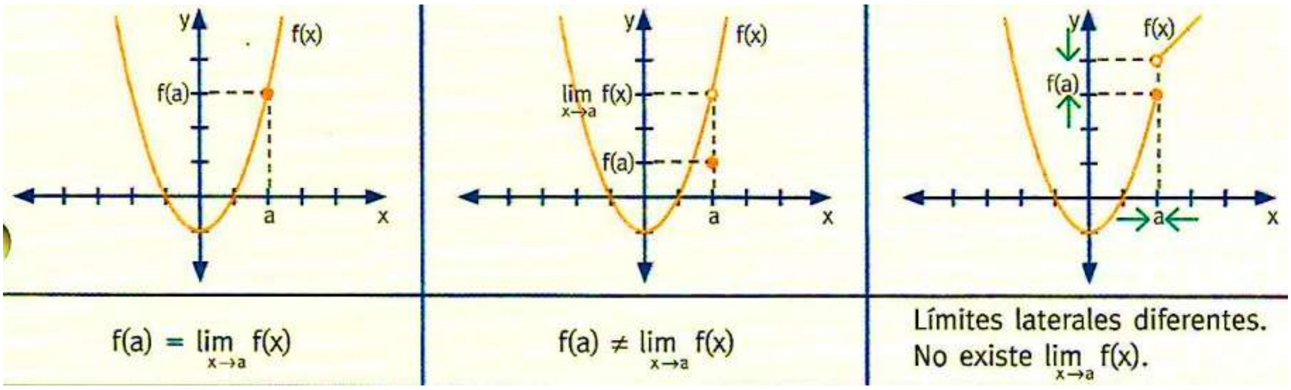
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - L| \text{ es arbitrariamente pequeño,}$$

cuando x es lo suficientemente cercano a a

En la definición de límite no es importante el valor de la función en $x = a$; no necesariamente la función debe estar definida para ese valor de x. También puede suceder que existiendo $f(a)$, sea $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Es importante para que exista el límite de x, cuando x tiende a a, que los límites por izquierda y por derecha coincidan. Estos límites reciben el nombre de *límites laterales*.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = L$$



LÍMITE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR.

PRACTICA 7 (PARTE A)

Actividad 1: Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to -2} (2x^2 + 5x + 3)$

b) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3}\right)$

c) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{2x + 1}\right)$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x^2 - 3x}$

e) $\lim_{x \to -3} \left(\frac{x^2 - 9}{x + 3}\right)$

Actividad 2: Verifique los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sen\, x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} cosec\, x$

b) $\lim_{x \to 0} \left(tg(2x) \cdot cosec(2x)\right) = \lim_{x \to 0} \sec(2x)$

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

Si el límite de una función existe, este es único. Es decir, una función no puede tener dos límites diferentes para un mismo valor de x.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} f(x) = L_2 \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2$$

Para hallar el límite de una función, se pueden considerar las siguientes propiedades, siempre y cuando los límites sean finitos.

Propiedad	Ejemplo
$\lim_{x\to a} k = k \quad \wedge \quad k \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to 5} 7 = 7$
$\lim_{x\to a} x = a$	$\lim_{x\to 5} x = 5$
$\lim_{x\to a}(mx+b) = \lim_{x\to a} mx + \lim_{x\to a} b = ma + b$ $m \in \mathbb{R}\ , b \in \mathbb{R}$	$\lim_{x\to 1}(-5x+3) = \lim_{x\to 1}(-5x) + \lim_{x\to 1} 3$ $= -5\cdot 1 + 3 = -2$
$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to 1}[2^x + 5x] = \lim_{x\to 1} 2^x + \lim_{x\to 1} 5x = 2 + 5 = 7$
$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to 3}[6 - x^2] = \lim_{x\to 3} 6 - \lim_{x\to 3} x^2 = 6 - 9 = -3$
$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to 2}[3x\cdot 4^x] = \lim_{x\to 2} 3x \cdot \lim_{x\to 2} 4^x = 6\cdot 16 = 96$
$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim_{x\to -2}\frac{x}{x^3} = \frac{\lim_{x\to -2} x}{\lim_{x\to -2} x^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$	$\lim_{x\to 1}[2x]^3 = \left[\lim_{x\to 1} 2x\right]^3 = 8$
$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim_{x\to 2}[x+1]^x = \left[\lim_{x\to 2}(x+1)\right]^{\lim_{x\to 2} x} = 3^2 = 9$

PRACTICA 7 (PARTE B)

Actividad 3: Halle los siguientes límites, aplicando las propiedades correspondientes:

a. $\lim_{x \to 4} (-3x + 5)$

b. $\lim_{x \to 2} (2x^2 + 7)$

c. $\lim_{x \to 3} (x^2 - 7x + 5)$

d. $\lim_{x \to 4} \sqrt{\frac{2x-4}{x+2}}$

e. $\lim_{x \to -1} \frac{2x+1}{x^2-3x+4}$

f. $\lim_{x \to 1} 4^{\frac{2x+1}{x+5}}$

g. $\lim_{x \to 0} [(1 + \cos x)^{x+4}]$

h. $\lim_{x \to 2} \left[sen\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot (1 + \ln x^{x+2})\right]$

LÍMITES INFINITOS.

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\} \,/\, f(x) = \frac{1}{x}$, se analiza su comportamiento para valores de x próximos a 0.

x se acerca a 0 por derecha

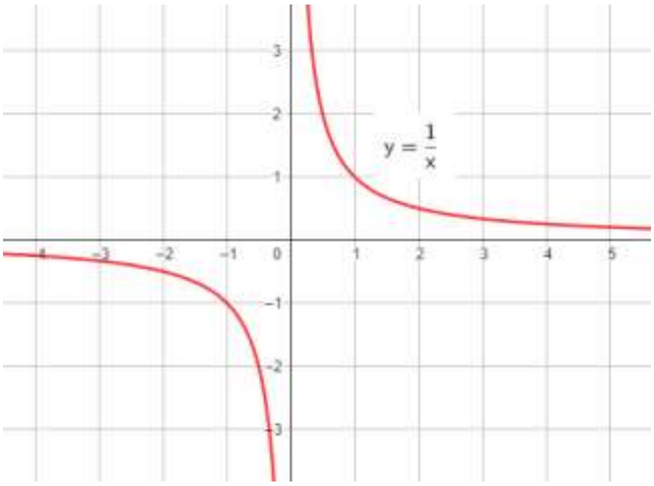
x	f(x)
0,1	10
0,01	100
0,001	1 000
0,0001	10 000
...	...
–0,0001	–10 000
–0,001	–1 000
–0,01	–100
–0,1	–10

x se acerca a 0 por izquierda

la función aumenta su valor
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

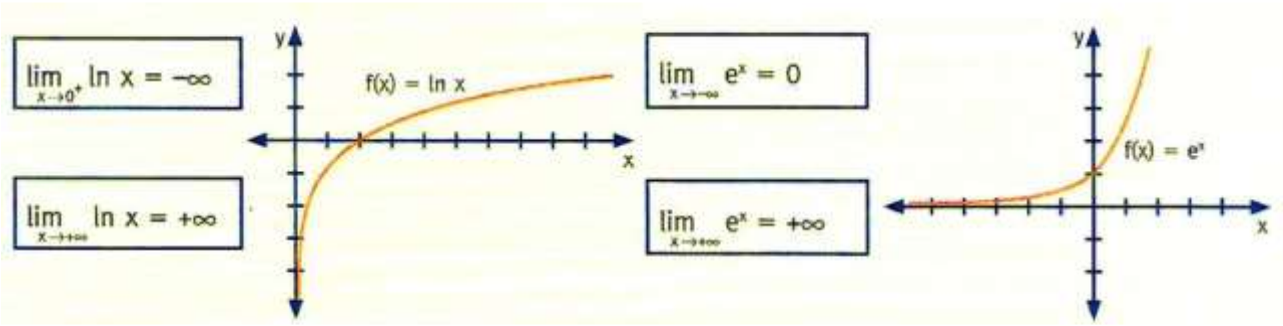
la función disminuye su valor
$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

- Cuando x aumenta o disminuye, tomando valores muy grandes en valor absoluto, la función tiende a valer 0.



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- Si se analizan las funciones exponenciales y logarítmicas, se obtienen *límites infinitos.*



PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, entonces:

a) $0 \cdot \lim_{x\to a} f(x) = 0$

b) $\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = \infty^n = +\infty \quad , \quad n > 0$

c) $k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot \infty = \infty \quad , \quad k > 0$

d) $k \cdot \lim_{x\to a} f(x) = k \cdot \infty = -\infty \quad , \quad k < 0$

Actividad 4: Halle los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-5}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+3}{x^2-9}$

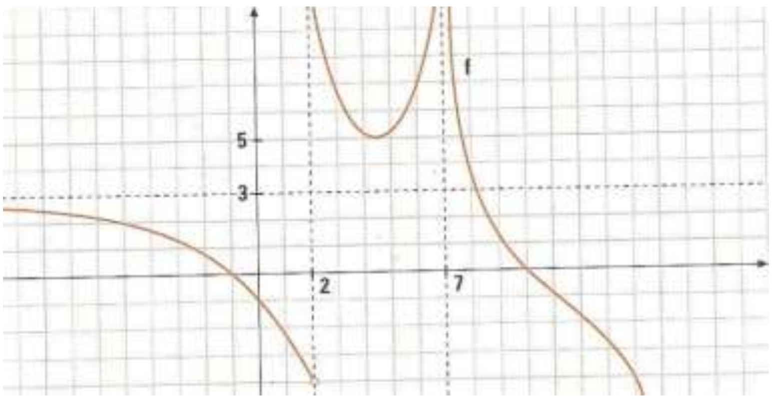
e) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x-9}{x^2-9x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1)$

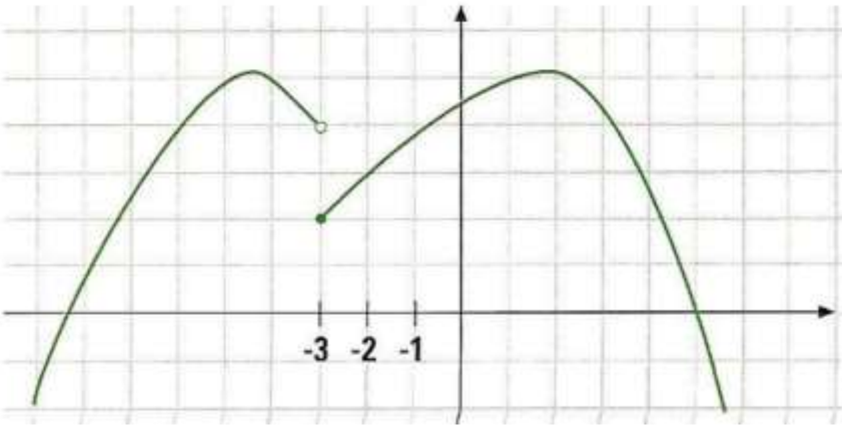
Actividad 5: A partir de los gráficos de las siguientes funciones, completa, cuando sea posible.

a)



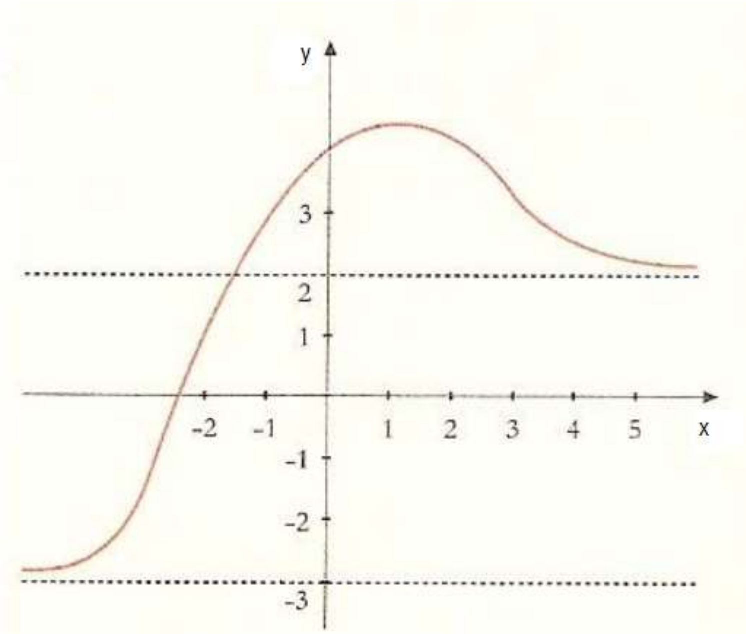
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 7} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$
$\lim\limits_{x \to 4,5^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 4,5^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x \to 4,5} f(x) =$

b) (En el eje y, un cuadrito es una unidad)



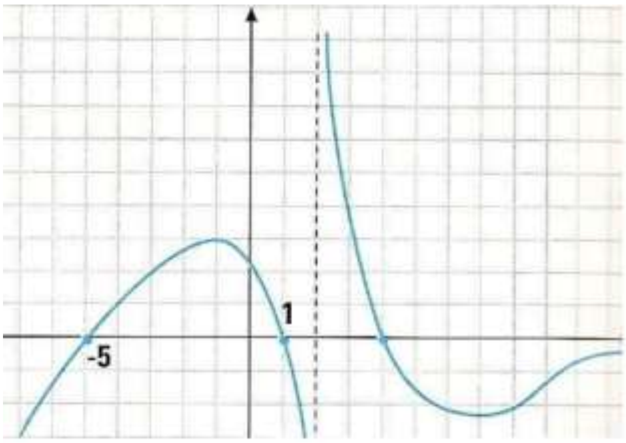
$\lim_{x\to -3^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -3^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -3} f(x) =$
$\lim_{x\to -2^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -2} f(x) =$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to \infty} f(x) =$

c)



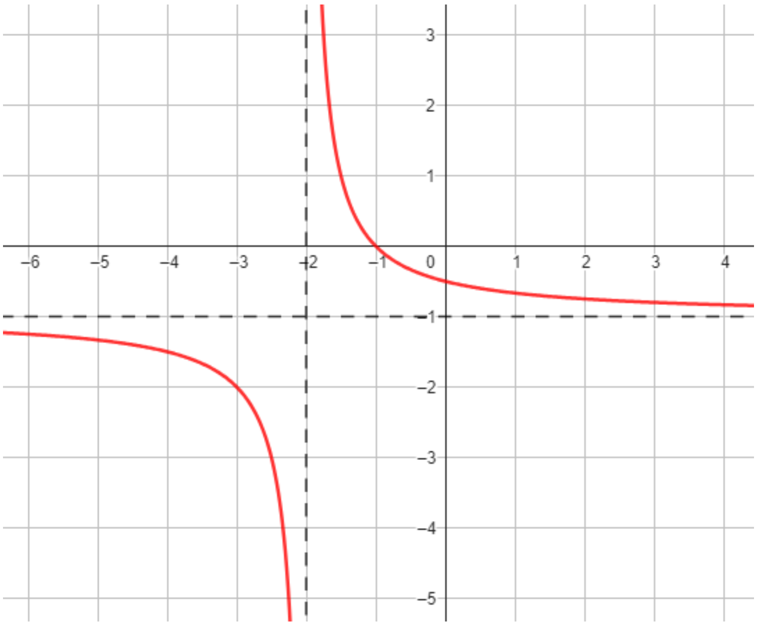
$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to \infty} f(x) =$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) =$	$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$	$\lim_{x\to 3} f(x) =$

d)



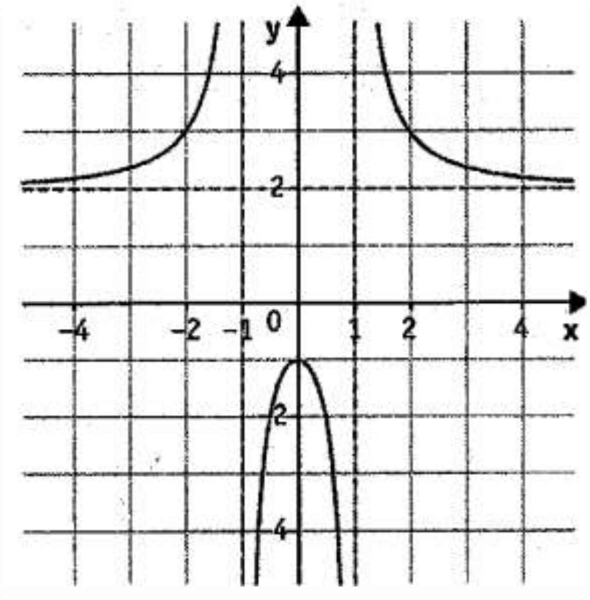
$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$	$\lim_{x\to 1^+} f(x) =$	$\lim_{x\to 1} f(x) =$
$\lim_{x\to -5^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -5^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -5} f(x) =$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to \infty} f(x) =$

e)



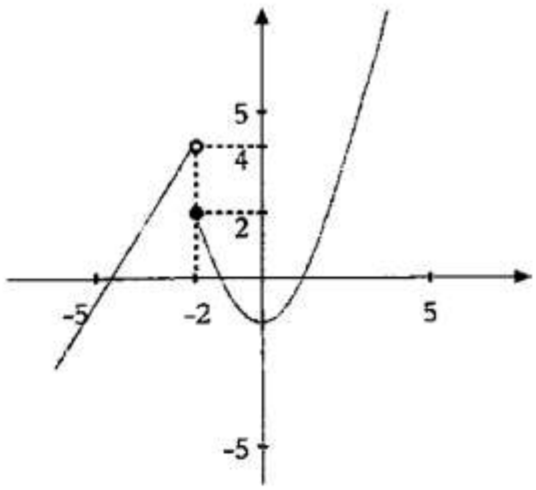
$\lim_{x\to -2^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -2^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -2} f(x) =$
$\lim_{x\to -3^-} f(x) =$	$\lim_{x\to -3^+} f(x) =$	$\lim_{x\to -3} f(x) =$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to \infty} f(x) =$

f)



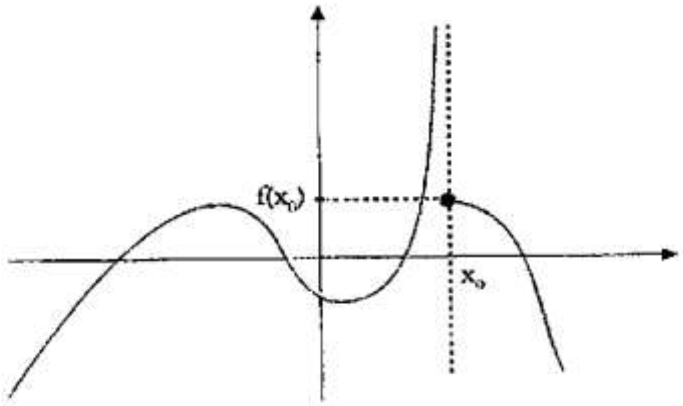
$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-1} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to1} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to0} f(x) =$

g)



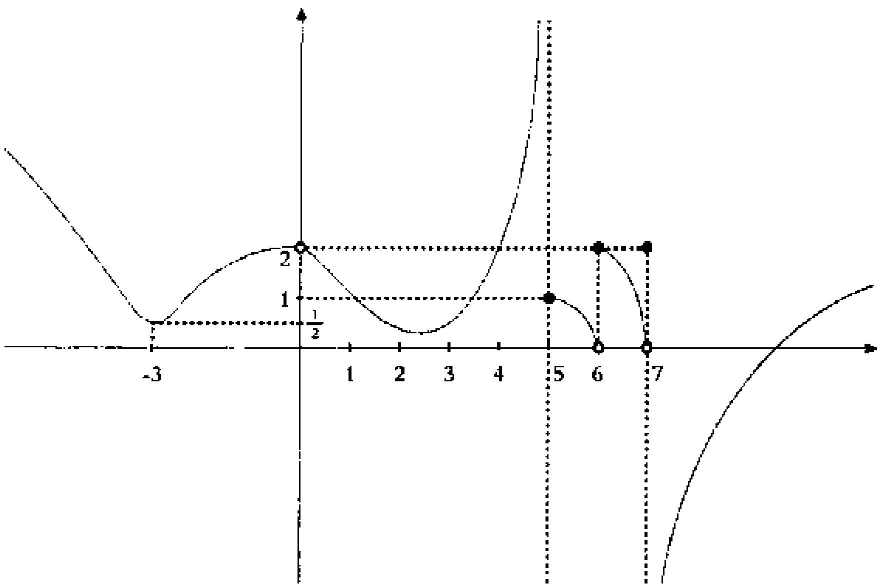
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$
$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to-2} f(x) =$

h)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to \infty} f(x) =$
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) =$	$\lim_{x \to x_0^+} f(x) =$	$\lim_{x \to x_0} f(x) =$

i)



$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$	$\lim_{x \to 5^+} f(x) =$	$\lim_{x \to 5} f(x) =$
$\lim_{x \to 6^-} f(x) =$	$\lim_{x \to 6^+} f(x) =$	$\lim_{x \to 6} f(x) =$
$\lim_{x \to 7} f(x) =$	$\lim_{x \to 7} f(x) =$	$\lim_{x \to 7} f(x) =$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$	$\lim_{x \to \infty} f(x) =$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$	$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$	$\lim_{x \to 0} f(x) =$

INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{0}{0}$

Una *indeterminación algebraica* se da cuando no es posible determinar el resultado. Por ejemplo, en ciertas ocasiones, al calcular el límite de una función se puede obtener $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

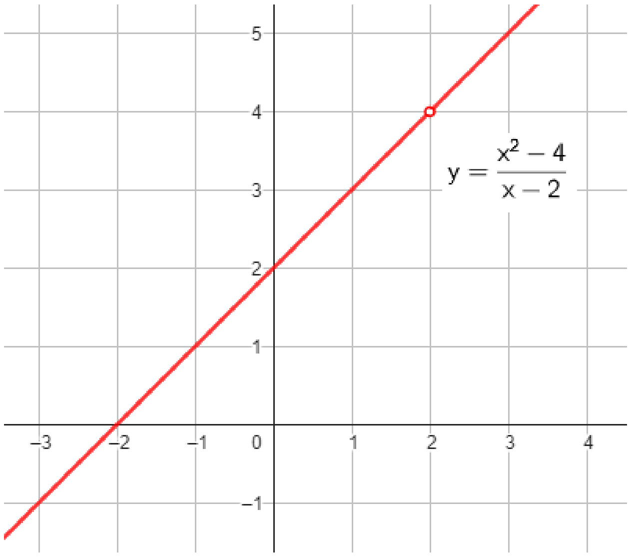
$a.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim_{x\to 2}(x-2)} = \frac{0}{0}$

$b.\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{\lim_{x\to 3}(x-3)}{\lim_{x\to 3}(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \frac{0}{0}$

Para calcular el límite de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en funciones racionales, se debe trabajar de forma algebraica para poder simplificar la expresión y "salvar" así la indeterminación.

Se puede factorizar el numerador y el denominador y / o racionalizar la expresión. Es posible trabajar con expresiones equivalentes, porque para obtener el límite no importa el valor en el punto.

$$a.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$



$$b.\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{3})^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 3}\left(\frac{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\cancel{x-3}}\right) = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

Actividad 6: Redondee las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x}$ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$

Actividad 7: Calcule los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2-9}{2x+3}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{12x}{6x^2+4x}$

d. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$

INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

La indeterminación algebraica $\frac{\infty}{\infty}$ surge al calcular el límite de ciertas funciones racionales.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para calcular este tipo de límites, se divide numerador y denominador de la función por x^n, siendo n el mayor de los grados de ambos polinomios; se simplifica todo lo posible y luego se aplican las propiedades de los límites.

- El grado del polinomio numerador es igual al grado del polinomio denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+3x+7}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6x^2+3x+7}{x^2}}{\frac{2x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{6+0+0}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

- El grado del polinomio numerador es menor al grado del polinomio denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-5x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}{2}=\frac{0-0}{2}=\frac{0}{2}=0$$

- El grado del polinomio numerador es mayor al grado del polinomio denominador.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4+x-8}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^4+x-8}{x^4}}{\frac{x^2+3x}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^3}-\frac{8}{x^4}}{\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{5+0-0}{0+0}=\frac{5}{0}=\infty$$

Generalizando:

Sean $f(x)$ y $g(x)$, dos funciones polinómicas (o polinomios), entonces:

Relación entre el grado de $f(x)$ y el grado de $g(x)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$
Grado $f(x)=$ Grado $g(x)$	$\frac{coeficiente\ principal\ f(x)}{coeficiente\ principal\ g(x)}$
Grado $f(x)<$ Grado $g(x)$	0
Grado $f(x)>$ Grado $g(x)$	∞

PRACTICA 7 (PARTE E)

Actividad 8: Calcule los siguientes límites,

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+1}{x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{2x^2}$

f. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3-4}$

g. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3+2x^2+1}{x^3-4}$

h. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^5-2x+1}{x^3+4}$

i. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(5x-4)}{3(x+2)(x-2)}$

j. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$

k. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{-x^2+14x-49}{x^2-49}$

l. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

m. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-x^3+4}{3x-5x^2-2}$

La ***estadística descriptiva*** es una ciencia que analiza conjuntos de datos (por ejemplo, edad de una población, altura de los estudiantes de una escuela, temperatura en los meses de verano, etc) y trata de extraer conclusiones sobre el comportamiento de estas variables.

Cuando se estudia el comportamiento de una variable hay que distinguir los siguientes conceptos:

- *Individuo:* cualquier elemento que porte información sobre el fenómeno que se estudia.

  Ejemplo: Si estudiamos la altura de los estudiantes de una clase, cada estudiante es un individuo; si estudiamos el precio de la vivienda, cada vivienda es un individuo.

- *Población:* conjunto de todos los individuos (personas, objetos, animales, etc.) que porten información sobre el fenómeno que se estudia.

  Ejemplo: si estudiamos el precio de la vivienda en una ciudad, la población será el total de las viviendas de dicha ciudad.

- *Muestra:* subconjunto que seleccionamos de la población.

  Ejemplo: Si se estudia el precio de la vivienda de una ciudad, lo normal será no recoger información sobre todas las viviendas de la ciudad (sería muy complejo y costoso), sino que se suele seleccionar un subconjunto (muestra) que se entienda que es suficientemente representativo.

- *Valor:* cada uno de los distintos resultados que se pueden obtener en un estudio estadístico.

  Ejemplo: si lanzamos una moneda al aire 5 veces podemos obtener dos valores, cara y cruz.

↳ Dato: cada uno de los valores que se obtiene al realizar un estudio estadístico.

Ejemplo: si lanzamos una moneda al aire 5 veces podemos obtener los 5 datos siguientes: cara, cara, cruz, cara, cruz.

VARIABLES ESTADÍSTICAS.

Las variables estadísticas se clasifican en:

- ↳ *variables cualitativas*: no se pueden medir numéricamente. Por ejemplo, la nacionalidad, la profesión, el género, etc.
- ↳ *variables cuantitativas*: toman valores numéricos. Por ejemplo, la edad, la altura, el precio de un producto, los ingresos anuales, etc.

Por su parte, las *variables cuantitativas* se pueden clasificar en *discretas* y *continuas*:

- *Discretas:* Sólo pueden tomar valores enteros.

  Ejemplo: número de hermanos, número de hijos, cantidad de accidentes de tránsito en una determinada esquina de San Juan, cantidad de productos defectuosos en un lote, etc.

- *Continuas:* Pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo.

  Ejemplo: la velocidad de un vehículo, la altura de una persona, el tiempo de vida útil de un determinado producto, etc.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS.

Una *distribución de frecuencias o tabla de frecuencias* es una tabla que muestra cómo se distribuyen los datos de acuerdo a sus frecuencias.

Existen dos tipos de tablas de frecuencias, las que tienen los datos no agrupados y aquellas con los datos agrupados.

TABLA DE FRECUENCIAS CON DATOS NO AGRUPADOS.

Estas tablas se usan, generalmente, para variables cualitativas y cuantitativas discretas con pocos valores. Están compuestas por las siguientes columnas:

1. Valores de la variable
2. Frecuencia absoluta: es la cantidad de veces que aparece el valor en el estudio. La sumatoria de las frecuencias absolutas es igual al número de datos (también llamado tamaño de la muestra).
3. Frecuencia acumulada: es el acumulado o suma de las frecuencias absolutas, indica cuantos datos se van contando hasta ese momento o cuántos datos se van reportando.
4. Frecuencia relativa: es la fracción o proporción de elementos que pertenecen a una clase o categoría. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta entre el tamaño de la muestra.
5. Frecuencia relativa acumulada: es la proporción de datos respecto al total que se han reportado hasta ese momento. Es la suma de las frecuencias relativas, y se puede calcular también dividiendo la frecuencia acumulada entre el tamaño de la muestra.
6. Frecuencia porcentual: es el porcentaje de elementos que pertenecen a una clase o categoría. Se puede calcular multiplicando la frecuencia relativa por 100.
7. Frecuencia porcentual acumulada: es el porcentaje de datos respecto al total que se han reportado hasta ese momento. Se puede calcular multiplicando la frecuencia relativa acumulada por 100.

Ejemplo 1: Se le pidió a un grupo de 20 personas que indicara su color favorito y se obtuvieron los siguientes resultados: negro – azul – amarillo – rojo – azul – azul – rojo – negro – amarillo – rojo – rojo – amarillo – amarillo – azul – rojo – negro – azul – rojo – negro – amarillo. Elabore una tabla de frecuencias.

Solución:

La variable es X: “color favorito (elegido por 20 personas)”.

Dicha variable es cualitativa. Por esto, en la tabla de frecuencias correspondiente sólo consideraremos las columnas mostradas a continuación.

El tamaño de la muestra es $n = 20$.

Tabla de frecuencias

Color	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia porcentual ($fr\%$)
Negro	4	0.2	20 %
Azul	5	0.25	25 %
Amarillo	5	0.25	25 %
Rojo	6	0.3	30 %
Total	20	1	100 %

Ejemplo 2: En una concesionaria de autos se registra la cantidad de autos marca Fiat, vendidos diariamente en septiembre de 2022, obteniéndose los siguientes datos:

0; 1; 2; 1; 2; 0; 3; 2; 4; 0; 4; 2; 1; 0; 3; 0; 0; 3; 4; 2; 0; 1; 1; 3; 0; 1; 2; 1; 2; 3

Con los datos obtenidos, elabore una tabla de frecuencias.

Solución:

La variable es X: “cantidad de autos marca Fiat, vendidos diariamente en septiembre de 2022”.

Dicha variable es cuantitativa discreta.

El tamaño de la muestra es $n = 30$. Cantidad de días del mes de septiembre.

Tabla de frecuencias

Cantidad de autos vendidos	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia porcentual ($fr\%$)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa acumulada (Fr)	Frecuencia porcentual acumulada ($Fr\%$)
0	8	0.267	26.7 %	8	0.267	26.7 %
1	7	0.233	23.3 %	15	0.5	50 %
2	7	0.233	23.3 %	22	0.733	73.3 %
3	5	0.167	16.7 %	27	0.9	90 %
4	3	0.1	10 %	30	1	100 %
Total	30	1	100 %			

TABLA DE FRECUENCIAS CON DATOS AGRUPADOS.

Las tablas de frecuencias con datos agrupados suelen usarse cuando la variable toma un gran número de valores o es una variable cuantitativa continua. Para ello, se agrupan los diferentes valores en intervalos de igual amplitud, a los cuales llamamos clases.

Además, aparecen algunos otros valores numéricos, que se indican a continuación:

- *Límites de clase:* cada clase es un intervalo semi-cerrado a izquierda, que va desde el límite inferior, hasta el límite superior. El último intervalo se considera cerrado.
- *Marca de clase:* es el punto medio de cada intervalo, y representa a la clase para el cálculo de algunos parámetros.
- *Amplitud de clase:* es la diferencia entre el límite superior y el límite inferior.

Los pasos para elaborar una tabla de frecuencias con datos agrupados, son los siguientes:

1. Hallar el rango (R): $R = x_{máx} - x_{mín}$, siendo $x_{máx}$ y $x_{mín}$ el máximo y mínimo dato para la variable X, respectivamente.
2. Hallar el número de intervalos (k). Si el problema no indica cuantos intervalos usar, se recomienda usar la regla de Sturges: $k = 1 + 3{,}3 \log n$; siendo n el tamaño de la muestra (número total de datos).
3. Determinar la amplitud de clase (A): $A = \frac{R}{k}$
4. Hallar el límite inferior y superior de cada clase, así como las marcas de clase.
5. Colocar los valores hallados en las columnas de la tabla de frecuencias, con el siguiente orden: clases (intervalos), marcas de clase, frecuencia absoluta, frecuencia relativa, frecuencia relativa porcentual, frecuencia acumulada, frecuencia relativa acumulada y frecuencia porcentual acumulada.

Observación: Los intervalos no deben superponerse, es decir, deben ser mutuamente excluyentes.

Ejemplo 3: Las notas de 35 alumnos en el examen final de Matemática, fueron las siguientes:

0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 10; 10.

Elabore una tabla de frecuencias con 5 clases.

Solución

La variable es X: "notas de 35 alumnos en el examen final de Matemática".
Dicha variable es *cuantitativa continua*.

El tamaño de la muestra es $n = 35$.

Rango: $R = 10 - 0 = 10$

Número de intervalos: 5 (lo indica el enunciado del problema, por lo tanto no hace falta aplicar la fórmula antes mencionada)

Amplitud de clase: $A = \frac{10}{5} = 2$

Tabla de frecuencias

Notas	Marca de clase (mc_i)	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia porcentual $(fr\%)$	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa acumulada (Fr)	Frecuencia porcentual acumulada $(Fr\%)$
[0 ; 2)	1	8	0.229	22.9 %	8	0.229	22.9 %
[2 ; 4)	3	7	0.2	20 %	15	0.429	42.9 %
[4 ; 6)	5	8	0.229	22.9 %	23	0.658	65.8 %
[6 ; 8)	7	6	0.171	17.1 %	29	0.829	82.9 %
[8 ; 10]	9	6	0.171	17.1 %	35	1	100 %
Total		35	1	100 %			

Ejemplo 4: Un grupo de atletas se está preparando para una maratón, siguiendo una dieta muy estricta. A continuación se muestra el peso en kilogramos, que ha logrado bajar cada atleta, gracias a la dieta y ejercicios.

0,2 8,4 14,3 6,5 3,4 4,6 9,1 4,3 3,5 1,5 6,4 15,2 16,1 19,8
5,4 12,1 9,6 8,7 12,1 3,2

Elabore una tabla de frecuencias, agrupando los datos en clases.

Solución:

La variable es X: “peso en kilogramos, que ha logrado bajar cada atleta”.

Dicha variable es cuantitativa continua.

El tamaño de la muestra es $n = 20$.

Rango: $R = 19.8 - 0.2 = 19.6$

Número de intervalos: $k = 1 + 3.3 \log 20 \cong 5$

Amplitud de clase: $A = \frac{19.6}{5} = 3.92 \cong 4$

Tabla de frecuencias

Notas	Marca de clase (mc_i)	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa (fr)	Frecuencia porcentual (fr%)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa acumulada (Fr)	Frecuencia porcentual acumulada (Fr%)
[0.2 ; 4.2)	2.2	5	0.25	25 %	5	0.25	25 %
[4.2 ; 8.2)	6.2	5	0.25	25 %	10	0.5	50 %
[8.2 ; 12.2)	10.2	6	0.3	30 %	16	0.8	80 %
[12.2 ; 16.2)	14.2	3	0.15	15 %	19	0.95	95 %
[16.2 ; 20.2]	18.2	1	0.05	5 %	20	1	100 %
Total		20	1	100 %			

GRÁFICOS.

Un *gráfico estadístico* permite hacer una rápida lectura de los datos recolectados de una muestra. La utilización de los distintos gráficos dependerá del tipo de variable utilizada y de la información que se quiera brindar. Si la variable es cualitativa, los gráficos más convenientes son el circular y el de barrras.

Gráfico circular

Los gráficos circulares sirven para comparar los porcentajes, ya que muestran la cantidad de datos quq pertenecen a una misma categoría como una parte proporcional de un círculo.

En cada *sector circular* se representa una variable y se la puede identificar con su porcentaje correspondiente.

El *ángulo central*, correspondiente a cada sector circular, se calcula como sigue:

$$\text{Ángulo central} = \frac{\textbf{Frecuencia absoluta} \cdot 360°}{\textbf{Tamaño de la muestra } (n)}$$

La siguiente tabla muestra el resultado a una encuesta realizada a 120 personas acerca de su destino elegido para las vacaciones.

X: "Destino elegido"	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia relativa porcentual (fr %)
Costa argentina	35	30 %
Córdoba	27	22 %
Bariloche	18	15 %
Misiones	16	13 %
Extranjero	24	20 %

Gráfico circular – "Destino

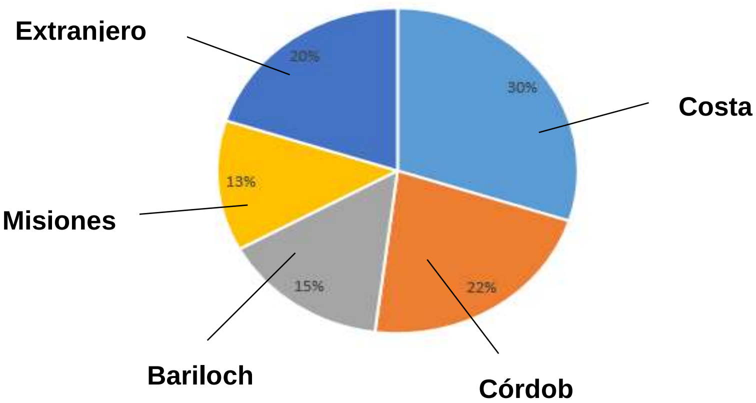
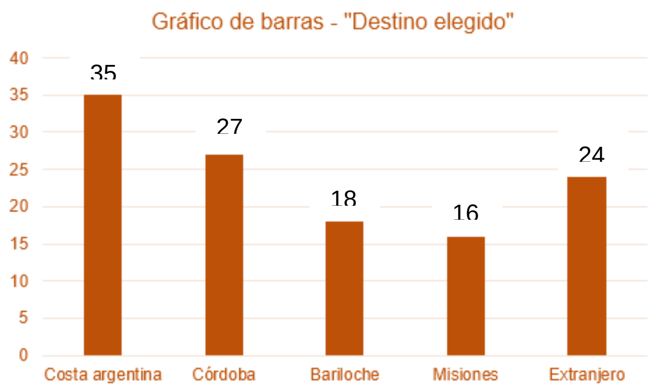


GRÁFICO DE BARRAS.

Los *gráficos de barras* muestran la frecuencia correspondiente a cada categoría de la variable y permiten compararlas entre sí.

Se puede usar tanto para las variables cualitativas, como para las cuantitativas discretas.



HISTOGRAMA.

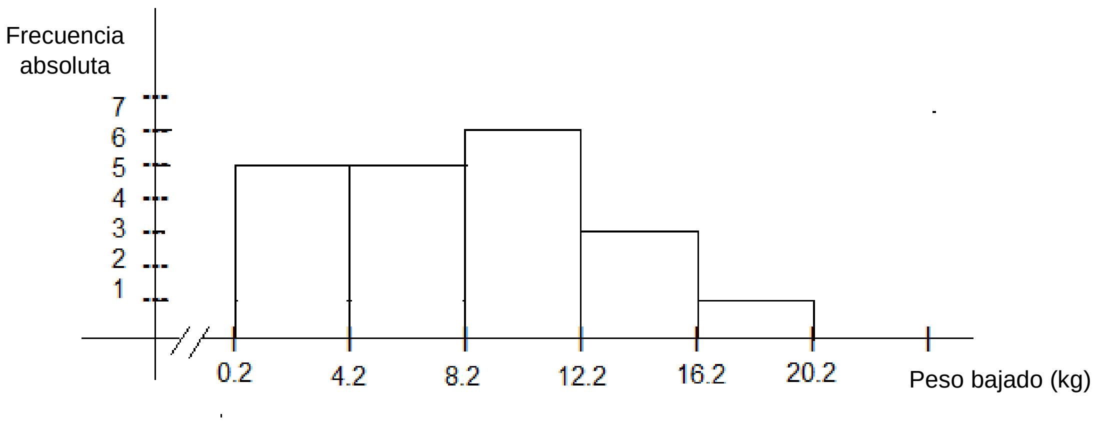
Un *histograma* es un gráfico de barras que se utiliza para representar intervalos de clase (véase *Tabla de frecuencias con datos agrupados*).

Un histograma cuenta con:

- Una escala horizontal, en la cual se indican los límites inferior y superior de cada intervalo de clase.
- Una escala vertical, en la cual se indican las frecuencias (absolutas, no acumuladas) de las distintas clases.

El siguiente histograma corresponde a los datos del ejemplo 4, planteado antes.

Histograma Ejemplo 4 – “Peso bajado por los atletas”



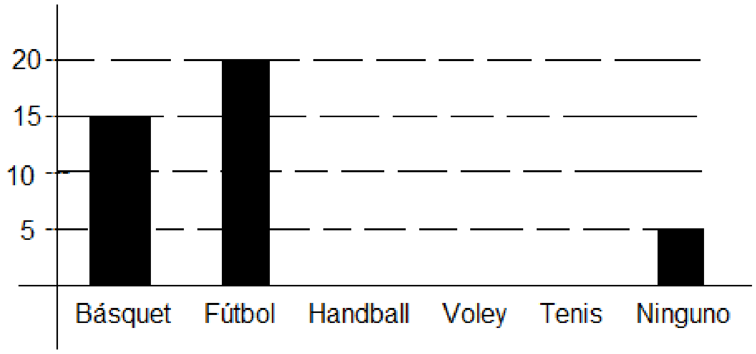
Actividad 1: Responda y explique la respuesta

a) Si en un sector de un gráfico circular se debe representar una variable de frecuencia absoluta 16 y el total de las observaciones es 36, ¿es cierto que su ángulo central debe ser de 16°?
b) ¿Qué tipo de gráficos conviene utilizar para comparar las frecuencias absolutas de las variables?

Actividad 2: La siguiente tabla muestra la distribución de alumnos de una institución por niveles de enseñanza. Determine, en cada caso, el ángulo central y construya un gráfico circular.

Nivel de estudios	Frecuencia absoluta	Porcentaje
Inicial	440 alumnos	20%
Primario	550 alumnos	25%
Secundario	1210 alumnos	55%

Actividad 3: Observe el gráfico de barras que muestra los deportes que practican los alumnos de sexto año y resuelva.



a) ¿Qué porcentaje representa básquet, fútbol y ninguno, si en total hay 68 alumnos?
b) ¿Cuántos alumnos eligieron handball, voley y tenis, si representan el 20.59%; 16.18% y 4.41% respectivamente?
c) Complete el gráfico.

Actividad 4: Responda y explique la respuesta

a) Se tienen los datos de las estaturas de 50 personas, donde el más bajo mide 168 cm y el más alto, 198 cm. ¿Es conveniente distribuirlos en 15 intervalos?
b) ¿Cuál sería el rango de cada intervalo?
c) ¿Es posible representar en un histograma la relación entre razas de perros y su frecuencia?

Actividad 5: En una empresa se analizaron los ingresos, en pesos, de una semana y se obtuvieron los siguientes datos:

3145 15879 6914 4572 11374 12764 9061 8245 10563 8164 6395 8758 10755
7415 9361 11606 3517 7645 9537 8020 12848 8438 6347 5151 5253 5656 21333
9280 7538 7414 11707 9144 7424 25639 10274 4683 5045 5768 5089 6904
9182 12193 12472 8494 6032 16012 9282 3331 5889 5345

a) Realice una tabla, agrupando los datos en intervalos de clase, que esté comprendida en [0 ; 30000].
b) Represente los datos en un histograma.
c) ¿En qué intervalo se encuentran las ganancias menos frecuentes? ¿Cuál es su porcentaje?

Actividad 6: Complete la tabla que muestra el peso de los atletas de una competición.

¿Qué porcentaje de atletas pesa entre 58 y 76 kg?

Peso (en kg)	Cantidad de atletas	Marca de clase
[46 ; 52)	30	
[52 ; 58)	90	
[58 ; 64)	130	
[64 ; 70)	100	
[70 ; 76)	40	
[76 ; 82)	50	
[82 ; 88]	10	

Actividad 7: Lea atentamente y resuelva.

d) Si las marcas de clase de un histograma son: 10000, 11000, 12000, 13000, 14000 y 15000, respectivamente, ¿cuáles son los intervalos de clase?

e) Invente una situación en la que se puedan utilizar los intervalos del ítem anterior y realice en una hoja un histograma que la represente.

PARÁMETROS DE POSICIÓN.

Media aritmética.

Se llama *media aritmética* (o promedio) al cociente entre la suma de los productos resultantes de multiplicar cada valor de la variable por su correspondiente frecuencia absoluta, y el total de observaciones.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k}{n} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} \quad , \quad 1 \leq k \leq n$$

La tabla muestra las notas obtenidas por 50 alumnos en un examen de ingreso

X: "Notas"	f	$x_i \cdot f_i$	F
1	2	2	2
2	3	6	5
3	1	3	6
4	7	28	13
5	7	35	20
6	10	60	30
7	6	42	36
8	7	56	43
9	5	45	48
10	2	20	50

$\sum x_i \cdot f_i = 297$ y $n = 50$

El promedio de las notas del examen es

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{50} = \frac{297}{50} = 5.94$$

MEDIANA.

La *mediana* es el valor de la variable que ocupa la posición central si el tamaño de la muestra es un número impar o el promedio de los datos centrales, si el tamaño de la muestra es par.

Para obtener la posición (el lugar) que ocupa la mediana, primero se deben ordenar los datos en forma creciente, luego determinar el valor $\frac{n+1}{2}$, siendo n el tamaño de la muestra. Dicho valor indica la posición que ocupa la mediana. Entonces, para calcular el valor de la misma, se deberán tener en cuenta los siguientes casos:

- Si n es impar, la mediana será el dato que se encuentra en la posición $\frac{n+1}{2}$, esto es $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$.
- Si n es par, la mediana será el promedio de los datos que se encuentran en las posiciones $\frac{n}{2}$ y $\frac{n+2}{2}$, esto es $Me = \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+2}{2}}\right) : 2$.

Si se divide la población en dos partes iguales, la mediana es el valor de la variable que contiene dicha frecuencia acumulada. En el ejemplo anterior, de las notas, $\frac{n}{2} = 25$, por lo tanto el valor de la mediana es $Me = 6$.

MODA.

La *moda* es el valor de la variable de mayor frecuencia absoluta.

En el ejemplo anterior, $Mo = 6$.

PARÁMETROS DE POSICIÓN PARA DATOS AGRUPADOS EN INTERVALOS.

Media aritmética.

Se aplica la fórmula correspondiente, utilizando la marca de clase.

$$\bar{x} = \frac{mc_1 \cdot f_1 + mc_2 \cdot f_2 + \cdots + mc_k \cdot f_k}{n} = \frac{\sum mc_i \cdot f_i}{n} \quad , \quad 1 \leq k \leq n$$

Clase mediana (o intervalo mediano).

La *clase mediana* o *intervalo mediano*, es el intervalo de clase que acumula por lo menos, el 50% de los datos totales.

Clase modal (o intervalo modal).

La *clase modal* o *intervalo modal*, es el intervalo de clase con mayor frecuencia absoluta.

Actividad 1: Un profesor de Economía da clases en dos divisiones del último año de la escuela secundaria y quiere analizar el rendimiento de sus alumnos.

Notas de sexto año A: 5, 4, 5, 5, 8, 6, 5, 7, 7, 7, 3, 8, 10, 10, 10, 2, 1, 5, 7, 8, 5, 6, 9, 4, 6, 4.

Notas de sexto año B: 2, 2, 2, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 4, 3, 8, 10, 10, 10, 8, 8, 8, 6, 6, 10, 10, 4, 6, 7.

¿Cuál curso tuvo menor rendimiento promedio?

Actividad 2: Los resultados al lanzar un dado 300 veces están representados en la siguiente tabla.

Resultados	1	2	3	4	5	6
F	55	56	60		40	49

Calcule la frecuencia de 4, teniendo en cuenta que la media aritmética es 3,336.

Actividad 3: Calcule los 3 parámetros de posición vistos, para los siguientes conjuntos de datos.

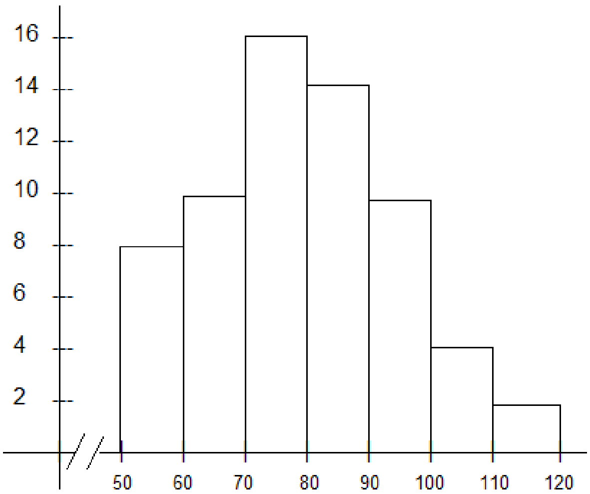
12	15	21	11	7	10	14	8	15			
23.5	12.8	21.2	10.8	14.7	18.6	21.5	12.1	23.5	13.4	16.2	23.5

Actividad 4: Las alturas de 42 árboles de una determinada especie, figuran en la siguiente tabla.

Altura (cm)	[5 ; 15)	[15 ; 25)	[25 ; 35)	[35 ; 45)	[45 ; 55]
f	9	7	15	8	3

a) ¿Cuál es la altura media de los árboles? Interprete según el problema.
b) ¿Cuál es el intervalo modal? Interprete según el problema.
c) ¿Cuál es el intervalo mediano? Interprete según el problema.

Actividad 5: El siguiente histograma muestra el peso, en kg, de un conjunto de personas adultas.



a) Construya una tabla de frecuencias completa.
b) Calcule los parámetros de posición.
c) ¿Cuántas personas tienen un peso superior al límite superior de la clase modal? ¿Qué porcentaje representa?
d) ¿Cuántos kilogramos, aproximadamente, debe bajar una persona que pesa 115 kg, para llegar al peso promedio?
e) ¿Cuántos kilogramos, aproximadamente, debe aumentar una persona que pesa 51.5 kg, para alcanzar la marca de clase del intervalo mediano?

Actividad 6: En la siguiente tabla se muestra la cantidad de palabras por frase de una página de una novela contemporánea.

Cantidad de palabras	[1 ; 4)	[4 ; 7)	[7 ; 10)	[10 ; 13]
Cantidad de frases	4	37	59	27

a) ¿Cuál es la cantidad promedio de palabras por frase?

b) ¿Cuál es la clase modal? ¿Qué valor la representa?

c) ¿Qué porcentaje de la muestra representa el intervalo modal?

Actividad 7: Redondee la opción correcta.

Si los siguientes datos expresan la ganancia mensual de 30 comerciantes (en miles de pesos) de un importante shopping, ¿cuál es la ganancia mensual promedio?

80	80	80	80	72	72	115	175	115	150	150	175	150
95	95	95	95	95	95	72	150	150	150	150	150	150
150	175	255	255									

$\bar{x} = 129.3$ $\bar{x} = 129.03$ $\bar{x} = 129.33$ Ninguna de las anteriores

Actividad 8: La siguiente tabla muestra la venta de calzados deportivos para mujer, en una casa de deportes.

Talle del calzado	34	35	36	37	38	39	40
Cantidad vendida	400	550	1670	1500	685	135	60

a) Calcule la media aritmética, la moda y la mediana.

b) Si se quiere saber cuál fue el talle del calzado más vendido, ¿qué parámetro es más representativo? ¿Por qué?

Actividad 9: Tenga en cuenta la siguiente fórmula y resuelva,

$$\bar{x} = \frac{30{,}5 \cdot 5 + 31{,}5 \cdot 7 + 32{,}5 \cdot 8 + 33{,}5 \cdot 12 + 34{,}5 \cdot 25 + 35{,}5 \cdot 31 + 36{,}5 \cdot 22 + 37{,}5 \cdot 12 + 38{,}5 \cdot 8 + 39{,}5 \cdot 4}{134}$$

a) ¿Cuál es la media aritmética?

b) Realice una tabla de frecuencias que incluya: intervalos de clase, marcas de clase, frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas.

c) Calcule la clase modal y la clase mediana.

d) Realice un histograma.

PARÁMETROS DE DISPERSIÓN.

La *desviación estándar* mide la dispersión de los datos, con respecto al promedio.

Ejemplo: Los alumnos Ana y Pedro rindieron la misma cantidad de evaluaciones y obtuvieron distintas calificaciones. Si se busca el promedio de las calificaciones, ambos coinciden en 7, pero Ana tiene un rendimiento más estable que Pedro.

Notas de Ana	$(x_i - \bar{x})^2$	Notas de Pedro	$(x_i - \bar{x})^2$
8	$(8-7)^2 = 1$	4	$(4-7)^2 = 9$
7	$(7-7)^2 = 0$	10	$(10-7)^2 = 9$
7	$(7-7)^2 = 0$	4	$(4-7)^2 = 9$
6	$(6-7)^2 = 1$	10	$(10-7)^2 = 9$

Se define como varianza muestral: $s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}$

La desviación estándar muestral es: $s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}}$

Retomando el ejemplo anterior, de las calificaciones de Ana y Pedro, se tiene que

$$s_{Ana} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cong 0{,}82 \qquad y \qquad s_{Pedro} = \sqrt{\frac{36}{3}} \cong 3{,}46$$

El valor de este parámetro es mayor cuando los datos están muy disgregados o dispersos y es menor cuando están más concentrados. Como $s_{\text{Pedro}} > s_{\text{Ana}}$, entonces las notas de Pedro están más dispersas que las de Ana.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN.

El *coeficiente de variación* expresa la desviación estándar como un porcentaje de la media aritmética.

Coeficiente de variación: $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{\sqrt{\frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}}}{\bar{x}} \cdot 100$

Para los alumnos Ana y Pedro, del ejemplo anterior, el coeficiente de variación es:

$$CV_{Ana} = \frac{0{,}82}{7} \cdot 100 \cong 11{,}71\% \qquad CV_{Pedro} = \frac{3{,}46}{7} \cdot 100 \cong 49{,}43\%$$

Cuando el coeficiente de variación es inferior al 30%, la distribución es bastante homogénea. Este coeficiente se usa para comparar la HOMOGENEIDAD de dos series de datos, aun cuando estén expresadas en distintas unidades. A medida que el coeficiente de variación disminuye, se observa una mayor homogeneidad en los datos, o lo que es lo mismo, los datos están más concentrados alrededor del promedio.

PRACTICA 10

Actividad 1: Responda y explique la respuesta.

a) Si una muestra A tiene mayor media que otra muestra B, ¿La muestra A tiene los datos más dispersos?

b) Si dos muestras tienen la misma desviación estándar, ¿sus datos están dispersos de igual forma?

Actividad 2: Tenga en cuenta los datos de cada muestra y resuelva.

A: 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 9, 10 B:1, 3, 9, 6, 9, 11, 14, 13, 15 C:1, 15, 11, 8, 8, 11, 9, 9, 9

a) Realice una tabla de frecuencias para cada caso.

b) Calcule las medidas de posición para cada muestra. ¿Qué tienen en común?

c) ¿Qué muestra se desvía menos con respecto a la media?

Actividad 3: En la siguiente tabla se observa el sueldo mensual de los empleados de una empresa, ¿Cuánto se desvían los sueldos con respecto a la media?

Sueldo (en pesos)	50000	56000	60000	67000	70000	82000	100000
Empleados	5	4	6	12	10	5	3

Actividad 4: En un colegio, los alumnos deben elegir con qué profesor cursar Matemática. Registraron las calificaciones de los profesores y los organizaron en la siguiente tabla.

	$\bar{x}$	s
Profesor Pablo	6.5	2.3
Profesor Carlos	6.5	0.6

a) ¿Qué profesor debe elegir un alumno que aspira a tener la nota máxima?

b) ¿Y un alumno al que le conforma aprobar con 6?

Actividad 5: Se realizó un estudio de las estaturas, en cm, de los jugadores de tres equipos de un colegio y se obtuvieron los siguientes resultados,

	Equipo A	Equipo B	Equipo C
$\bar{x}$	173.2	176	170.1
s	3.7	6.2	4.1

a) ¿Qué equipo tendrá al jugador más alto? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es el equipo con la distribución más homogénea? ¿Por qué?

Actividad 6: Observe la tabla donde se registran los resultados de arrojar dos dados y sumarlos. Luego, resuelva.

Resultado de la suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Veces	3	8	9	11	20	19	16	13	11	6	4

a) Calcule la media aritmética, la varianza y la desviación estándar.

b) Obtenga el coeficiente de variación y decida si la muestra es homogénea.

Actividad 7: Los resultados de un examen de inglés están agrupados en la siguiente tabla. Redondee la opción correcta.

Intervalo	[80 ; 89)	[89 ; 98)	[98 ; 107)	[107 ; 116)	[116 ; 125)	[125 ; 134)	[134 ; 143]
Frecuencia	4	10	21	23	9	5	3

a) ¿Cuál es el promedio y la desviación estándar?

$\bar{x} = 108$ y $s = 17.19$ $\bar{x} = 108$ y $s = 19.19$ Ninguna de las anteriores

b) ¿Cuál es el coeficiente de variación?

$CV = 15.91\%$ $CV = 11.52\%$ Ninguna de las anteriores

Actividad 1: Observe la tabla donde se registran las camisas vendidas en un negocio y resuelva.

Talle de la camisa	37	39	42	S	L	XL
Cantidad vendida	90	38	105	110	63	44

a) Realice una tabla con los porcentajes de cada talle y la frecuencia acumulada.

b) ¿Qué porcentaje de camisas se vendió, de los talles mayores a 42?

c) ¿Cuántas camisas se vendieron entre el talle 39 y el L, inclusive? ¿Qué porcentaje representa de toda la venta?

d) Realice un gráfico de barras con la frecuencia absoluta y un gráfico circular con la frecuencia porcentual.

Actividad 2: En la siguiente tabla se registra la cantidad de hermanos (X) que tiene cada alumno de un colegio.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	70	140	97	45	350	12	15	5	3

a) Calcule la media aritmética, la mediana y la moda. Interprete.

b) Determine el porcentaje de la moda y la frecuencia acumulada posterior al valor que representa.

c) ¿Cuáles son los parámetros de posición asociados a los siguientes datos? Marque la opción correcta.

1 1 1 3 4 5

a. $Mo = 1$, $Me = 2$, $\bar{x} = 2.5$

b. $Mo = 1$, $Me = no\ existe$, $\bar{x} = 2.5$

c. Ninguna de las anteriores.

Actividad 3: El promedio de las edades de tres primos es 17 años, ¿puede alguno de ellos tener 60 años? ¿Por qué?

Actividad 4: Tenga en cuenta los siguientes datos y resuelva.

23	25	27	25	31	25	23	29	31	31	31

a. Calcule la media aritmética.

b. ¿Qué dato habría que agregar para que la media aritmética sea exactamente 27?

c. Calcule la mediana de la muestra original y de la modificada.

Actividad 5: Tenga en cuenta el siguiente registro, que realizó la profesora de Literatura, de una prueba de velocidad de lectura de palabras por minuto y resuelva.

72, 54, 70, 80, 40, 105, 102, 71, 96, 81, 58, 57, 80, 81, 73, 99, 57, 74, 87, 48, 90, 47, 109, 90, 69, 79, 75, 52, 72, 81, 91, 56, 67, 66, 79, 90, 106, 100, 87, 104, 75, 101, 53, 98, 99.

a) Si se quiere agrupar los datos en 7 intervalos, ¿qué amplitud debería tener cada uno?

b) Realice una tabla de frecuencias completa, para datos agrupados.

c) Calcule los parámetros de posición para los datos agrupados.

d) Calcule los parámetros de dispersión.

e) ¿La muestra es homogénea? ¿Por qué?

f) Realice un histograma.

Actividad 6: Considere los siguientes datos y resuelva: 2, 4, 6, 8, 10.

a) Calcule la media aritmética, la varianza y la desviación estándar.

b) Sume 30 a cada uno de los datos iniciales y vuelva a calcular los parámetros anteriores.

c) Escriba una conclusión sobre el efecto que se produce en la media y en la desviación estándar, cuando se le suma un valor constante a los datos iniciales.

Actividad 7: Teniendo en cuenta las dos muestras siguientes, calcule el coeficiente variación de cada una y explique cuál tiene los datos más agrupados alrededor de la media.

A: $\bar{x} = 13.6$ y $s = 2.3$ B: $\bar{x} = 49$ y $s = 8.3$

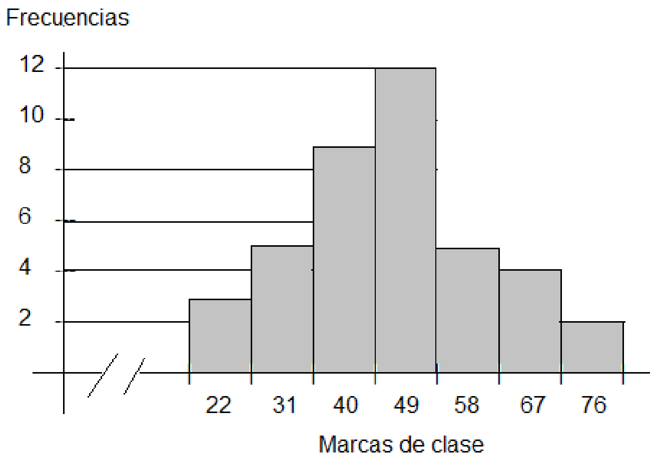
Actividad 8: Se pesaron las bolsas de papas que empacó una envasadora y se realizó el siguiente registro,

Peso (kg)	[50 ; 110)	[110 ; 170)	[170 ; 230)	[230 ; 290)	[290 ; 350]
f	7	55	90	75	38

a) ¿Cuál es el peso que representa a cada intervalo de clase?
b) ¿Qué pesos representan a la media aritmética y a la clase mediana?
c) Si el coeficiente de variación es del 53%, ¿qué peso toma la desviación estándar?

Actividad 9: La muestra A tiene coeficiente de variación 56% y una desviación estándar de 3.6, mientras que otra muestra B, tiene coeficiente de variación 48% y una desviación estándar de 1.6. ¿Qué muestra tiene una media aritmética mayor?

Actividad 10: El siguiente histograma representa las edades de un grupo de personas. Obsérvelo y resuelva,



a) Realice una tabla de distribución de frecuencias completa.
b) Interprete la frecuencia absoluta del segundo intervalo de clase.
c) Interprete la frecuencia acumulada del cuarto intervalo de clase.
d) Calcule los parámetros de posición. Interprete cada uno.
e) Calcule los parámetros de dispersión.
f) ¿La muestra es homogénea? ¿Por qué?