COLEGIO MODELO

CUADERNILLO DE MATEMÁTICA

5 “D”

PROF.: RIVEROS E. CAROLINA

2026

COLEGIO MODELO
ESPACIO CURRICULAR: MATEMÁTICA-CICLO ORIENTADO- 5 D
PROFESORA: RIVEROS CAROLINA

PROGRAMA DE EXAMEN

UNIDAD N° 1. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Ecuaciones de segundo grado: raíces. Resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

Función cuadrática: raíces, ordenada al origen, vértice, eje de simetría. Forma polinómica, canónica y factorizada. Gráfica de la parábola. Análisis del desplazamiento de la parábola matriz. Posiciones relativas de la parábola.

UNIDAD N°2: NÚMEROS REALES.RADICALES

Números reales: racionales e **irracionales**. Radicales: concepto. Extracción de factores de un radical. Radicales semejantes. Operaciones: suma, resta, producto y cociente. Operaciones combinadas. Proceso de racionalización de denominadores.

UNIDAD N°3: NÚMEROS COMPLEJOS

Conjunto de los números complejos. Unidad imaginaria. Representación gráfica. Forma binómica. Complejo conjugado y opuesto. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Potencia de la unidad imaginaria.

UNIDAD N°4: POLINOMIOS

Expresiones algebraicas enteras. Polinomios. Características. Clasificación. Valor numérico. Operaciones con polinomios: suma, resta. Multiplicación. Productos notables. División. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Teorema de Gauss. Factorización de polinomios: factor común y por grupos, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados. Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación

UNIDAD Nº 5: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Función exponencial: fórmula; condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamiento; asíntota, ordenada al origen. Función Logarítmica: fórmula condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamientos; asíntotas. Propiedades de logaritmo. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

CONTRATO PEDAGÓGICO

Espacio Curricular: MATEMATICA
Ciclo lectivo: 2026

Se deja constancia que el presente sirve para que el/la alumno/a, los padres y la profesora conozcan **las pautas de trabajo y los requisitos que se deben cumplir en los contenidos actitudinales.**

El/ la alumno/a de ……..año,……………………………., se compromete a cumplir las siguientes pautas de trabajo;

a) El horario de entrada al curso y salida debe ser respetado. El profesor sancionará al no cumplimiento dependiendo de la reiteración de la actitud.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
b) En caso de tener un celular u otro aparato electrónico será apagado o silenciado, ya que no pueden ser utilizados en la hora de clases, salvo que el docente lo establezca para una actividad Tampoco se permitirá el uso de auriculares durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia su actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
c) Se dirigirá con respeto hacia el profesor y hacia sus compañeros en todo momento; ser amigable y solidario.
d) El alumno no puede recibir llamadas de teléfono durante la clase, en caso de urgencia u otro caso llamar al teléfono particular del colegio: 4203963.
e) No salir del curso sin la autorización del profesor. Procurará ir al baño en los recreos, cómo también el llenado de botellas de agua de lo contrario el profesor evaluará la situación para permitir la salida.
f) Escuchar al profesor y a los compañeros, mantener una actitud de respeto y atención, levantar la mano para pedir la palabra, evitar charlas y acciones perturbadoras en clase (el profesor tiene la libertad de cambiar de banco a cualquier alumno si lo considera necesario para mejorar el clima de la clase o rendimiento académico del alumno).
g) Cuidar el material de trabajo, traer los útiles y el material solicitado para la clase; cuidar sus pertenencias y las de sus compañeros, mantener el orden y la limpieza del aula.El incumplimiento se verá reflejado en la nota actitudinal, y se registrará con signos negativos.
h) Evitar acciones como beber, comer, tomar mate, jugar en clase; insultar, escupir, charlar mientras el profesor o compañero está hablando, burlarse, discriminar, agredir verbal y/o físicamente, tratarse mal, romper, rayar bancos, paredes, carpetas, libros, sillas, realizar tareas de otra asignatura sin la autorización del profesor.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
i) Participar activa y disciplinadamente. En caso de indisciplina, el alumno será sancionado de acuerdo al régimen de convivencia.
j) Colaborar desinteresadamente y respetar a sus semejantes.
k) Responsabilidad, orden y prolijidad en la presentación de todas las actividades asignadas en tiempo y forma, del cuadernillo.
l) Mantener el cuaderno y cuadernillo de actividades prolijo, ordenado, traerlo todas las clases y completo a lo largo del año.
m) El alumno no podrá tomar fotos de la pizarra,ni filmar la clase y tampoco realizar transmisión en línea sin la autorización del docente, el incumplimiento será motivo de

sanción.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.

n) El alumno no podrá desayunar, merendar o almorzar durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
o) Proceder con absoluta honestidad.
p) La inasistencia a cada evaluación anunciada debe justificarse antes o durante la hora de la evaluación al preceptor. El alumno será evaluado sin aviso inmediatamente luego de su reincorporación al Colegio.

COMPROMISO DEL PROFESOR

a) Respetar a todos los alumnos y saber escuchar sus propuestas e inquietudes.
b) Explicar todas las dudas planteadas por los alumnos (siempre que ese alumno haya prestado atención y comportado debidamente).
c) Avisar con una semana de anticipación, por lo menos, la fecha y temas de las evaluaciones escritas.
d) Entregar en un plazo no mayor a 10 días hábiles los resultados de las evaluaciones y trabajos prácticos.
e) No utilizar celular en la hora de clases, salvo en el caso de una actividad escolar.
f) Ser justo con los alumnos, tener apertura al diálogo.
g) Cumplir con el horario de clases y respetar los recreos.
h) Actuar en forma no contradictoria respeto de lo que se les prohíbe a los alumnos (comer en clase, etc.)

CRITERIOS DE EVALUACION

a) Será anulado aquel ejercicio que se encuentre resuelto en más de una ocasión usando distintos métodos y llegando a conclusiones diferentes sin indicar cuál es la correcta.
b) El uso del vocabulario científico.
c) La presentación de trabajos en tiempo, en forma ordenada y prolija, con vocabulario correcto, teniendo en cuenta su ortografía.
d) La habilidad para seleccionar y aplicar distintos procedimientos en la resolución de situaciones problemáticas.
e) Presentación y prolijidad en las evaluaciones. Se descontará 0,25 por cada ejercicio desprolijo.
f) No se podrá utilizar la calculadora del celular, solamente la calculadora en formato tradicional.
g) El alumno debe abonar al docente la fotocopia de la evaluación.

Aclaración: El profesor es la máxima autoridad responsable del curso y por lo tanto tiene el derecho y la obligación de tomar las decisiones y reajustar las normas del contrato en casos particulares.

……………………………	…………………..	……………………
Firma del alumno	Firma del padre, madre o tutor del alumno	Prof. Riveros Carolina

UNIDAD N°1: FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejercicio N°1: La siguiente tabla debe contener el resultado de adicionarle 1 a la suma entre el cuadrado y el doble de los números indicados.

a) Completar la tabla

Número	Resultado de operar
0	
1	
-1	
-2	
-3	
-4	

b) Si consideramos que cada número es "x" y que cada resultado de operar es "y", señalar cuál de las siguientes fórmulas representa la función que relaciona cada número con el resultado del cálculo anterior.

☐ $y = 2.x + 2.x + 1$ ☐ $y = x^2 + x + 1$ ☐ $y = x^2 + 2.x + 1$ ☐ $y = 2.x + x + 1$

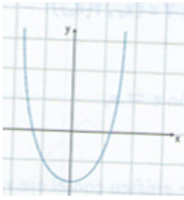
c) Teniendo en cuenta que y=f(x) , usar la fórmula elegida y completar:

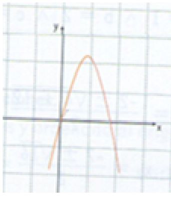
f(5)= y f(-5)=

d) En un sistema de ejes cartesianos, graficar los valores obtenidos en la tabla. Para ellos, considerar cada par de valores como las coordenadas del punto (x;y). Unir los puntos con una cuerva suave.

La fórmula y gráfica obtenida en la actividad anterior corresponden a una función cúadratica.
La foma general de la función cuadrática es la siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}$$





Donde a, b y c reciben el nombre de coeficientes.
La representación gráfica de una función cuadrática es una ***PARÁBOLA***

Ejercicio N°2: Para cada función construir una tabla asignando valores a "x", calculando "y" usando la fórmula de cada una. Graficar los datos obtenidos.

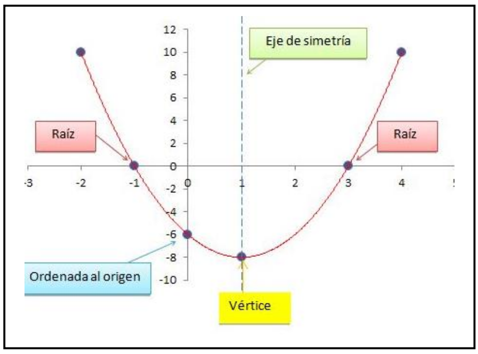
a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2.x - 3}$

b) $f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 4.x + 4$

En el gráfico de la parábola se pueden apreciar elementos importantes:

- Eje de simetría
- Vértice
- Ordenada al origen o Intersección con el eje "y"
- Raíces e intersección con el eje "x"



GRÁFICA DE LA FUNCÓN CUADRÁTICA CALCULADO SUS ELEMENTOS

Para realizar el gráfico de una parábola, $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, se deben calcular los elementos de la misma y luego representarla.

- *Raíces de la parábola.*

Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje x, vale decir que $f(x) = 0$.

$$x_1;x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• *Vértice de la parábola.*

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o} \quad x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f(x_v)$$

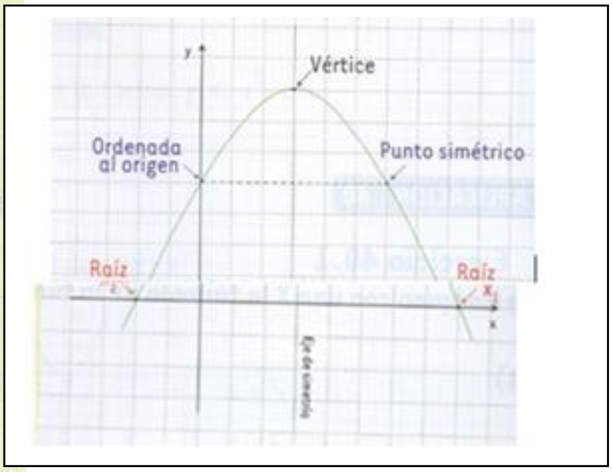
Las coordenadas del vértice son: $V = (x_v\,,\ f(x_v))$.

• *Eje de simetría.*

Es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$.

• *Ordenada al origen.*

Es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que $f(0) = c$.



Ejemplo:

$f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = -3$

Raíces:

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

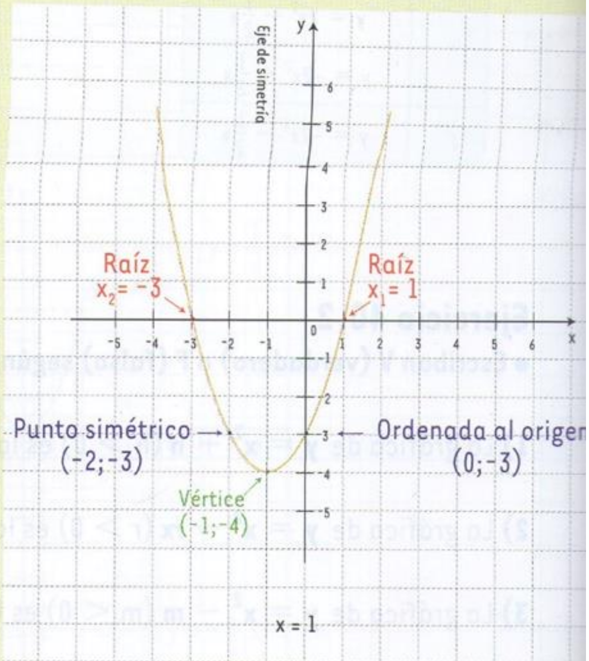
$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Vértice:

$x_v = \frac{-2}{2.1} \Rightarrow x_v = -1$

$y_v = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \Rightarrow y_v = -4$

$V = (-1;-4)$



Eje de simetría: $x = -1$ **Ordenada al origen:** $(0;-3)$ **Punto simétrico:** $(-2;-3)$

Ejercicio N°3: Calcular el vértice, el eje de simetría, ordenada al origen y raíces de cada función cuadrática y graficarlas

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2.x - 3}$

b) $f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 4.x + 4$

Ejercicio N°4: Completar según la gráfica de y = -3.x^2 + x + 2

1) Los coeficientes de los términos de la función son: a = , b = y c =

2) El vértice de la parábola es el punto

3) El eje de simetría de la parábola es la recta

4) La ordenada al origen de la función es el punto

5) Las raíces de la función son x_1 = y x_2 =

Ejercicio N°5: Completar el siguiente cuadro

FUNCIÓN	a	b	c	Raíces	Vértice	Eje de Simetría	Ordenada al origen
$1) y = -x^2 + 2$							
$2) y = 2.x^2 +.x - 1$							
$3) y = x^2 - 4.x - 5$							

POSICIONES RELATIVAS RESPECTO DEL EJE DE LAS ABSCISAS

Las raíces de una parábola, $y = ax^2 + bx + c$, se calculan mediante la fórmula:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

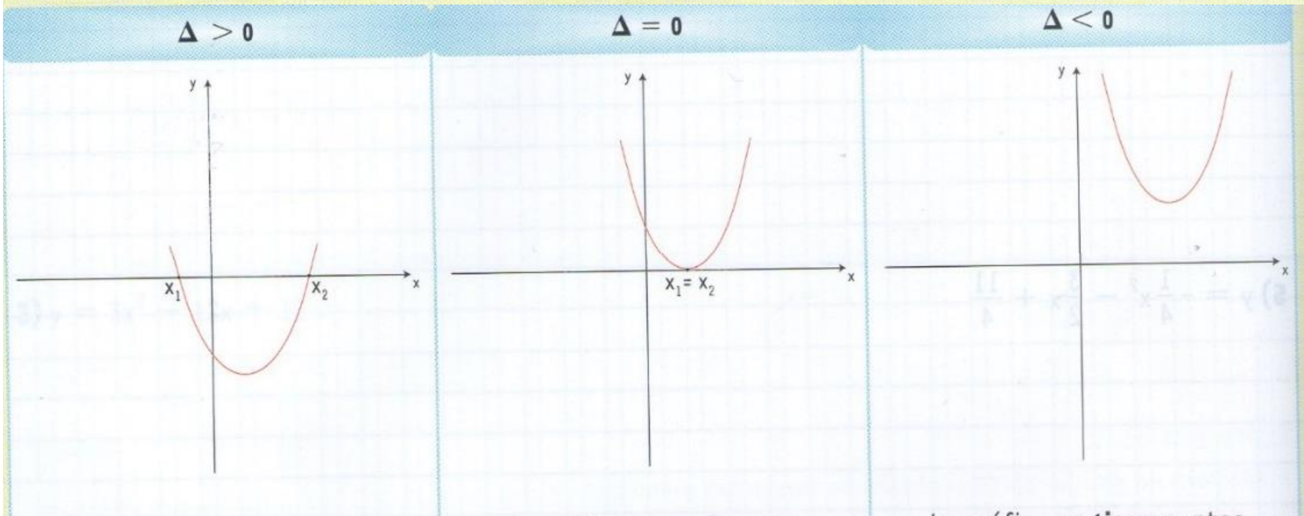
Al radicando $b^2 - 4ac$ *se lo llama* ***discriminante****, ya que el valor del mismo sirve para discriminar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega* Δ *(delta).*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Raíces **reales distintas**.

Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Raíces **reales iguales**.

Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ Raíces **no reales**.



La gráfica tiene **2 puntos** de intersección con el eje x.

La gráfica tiene **1 punto** de intersección con el eje x.

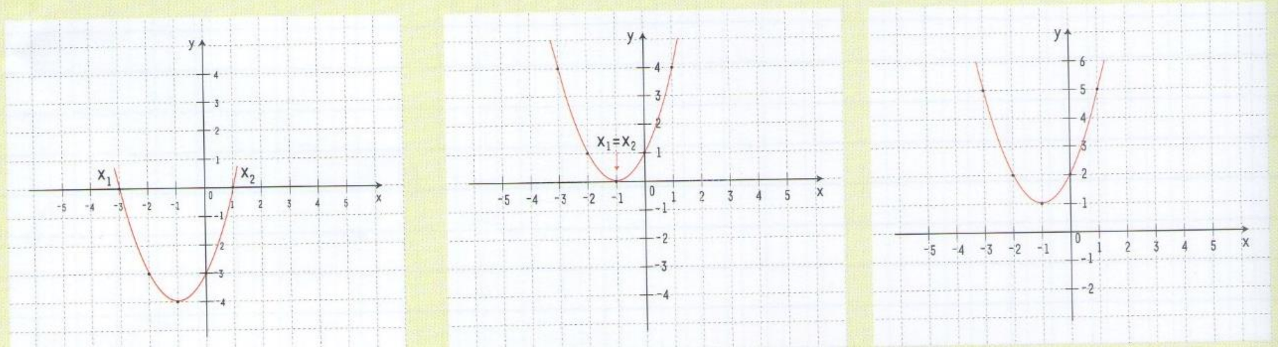
La gráfica **no tiene** puntos de intersección con el eje x.

Por ejemplo:

a) $y = x^2 + 2x - 3$
$\Delta = 2^2 - 4.1(-3) = 16$

b) $y = x^2 + 2x + 1$
$\Delta = 2^2 - 4.1.1 = 0$

c) $y = x^2 + 2x + 2$
$\Delta = 2^2 - 4.2.1 = -4$



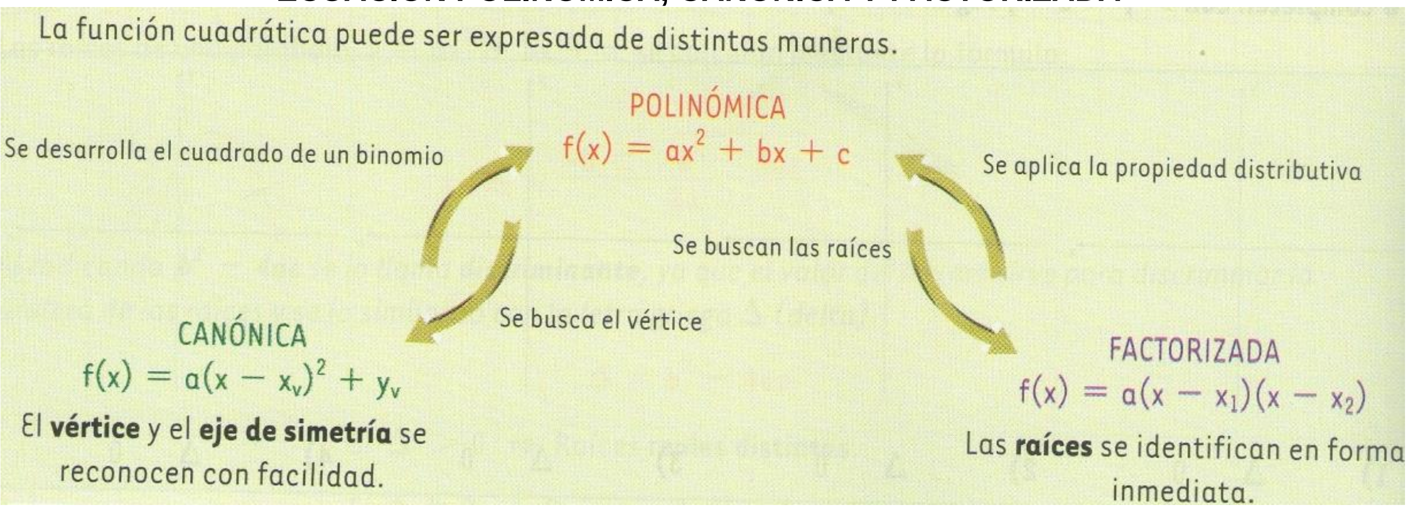
Ejercicio N°6: Analizar el discriminante de cada función cuadrática e indicar si tiene raíces.

$a)\ f(x) = x^2 - 6.x + 25$ $\quad b)\ f(x) = x^2 - 6.x + 9$ $\quad c)\ f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

Ejercicio N°7: Calcular el valor del discriminante y marcar con una x el tipo de ráices.

	a	b	c	$\Delta = b^2 - 4.a.c$	Raíces reales iguales	Raíces reales distintas	No tiene raíces reales
1)	1	-4	-4				
2)	-1	-3	-4				
3)	2	-4	2				
4)	1	0	-3				
5)	3	6	2				

ECUACIÓN POLINÓMICA, CANÓNICA Y FACTORIZADA



EJEMPLOS:

a) Para pasar de la forma polinómica $f(x) = \frac{1}{2}.x^2 - \frac{7}{2}.x + 5$ a la forma factorizada calculamos las raíces $x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = 5$ y queda $f(x) = \frac{1}{2}.(x-2).(x-5)$

b) Para pasar de la forma factorizada $f(x) = -2.(x+1).(x+3)$ a la forma polinómica aplicamos propiedad distributiva y queda $f(x) = -2.x^2 - 8.x - 6$

c) Para pasar de la forma polinómica $f(x) = -\frac{1}{2}.x^2 - 3.x - \frac{7}{2}$ a la forma canónica calculamos el vértice $x_v = -3 \quad y \quad y_v = 1$ y queda $f(x) = -\frac{1}{2}.(x+3)^2 + 1$

d) Para pasar de la forma canónica $f(x) = \ (x-2)^2 + 3$ a la forma polinómica resolvemos el cuadrado de un binomioy queda $f(x) = \ x^2 - 4.x + 7$

Ejercicio N°8: Expresar cada una de las siguientes funciones de la forma que se pide

1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, en forma **canónica** es $f(x) =$

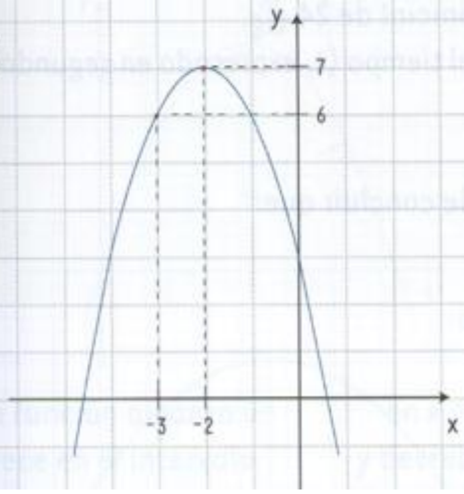
2) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

3) $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

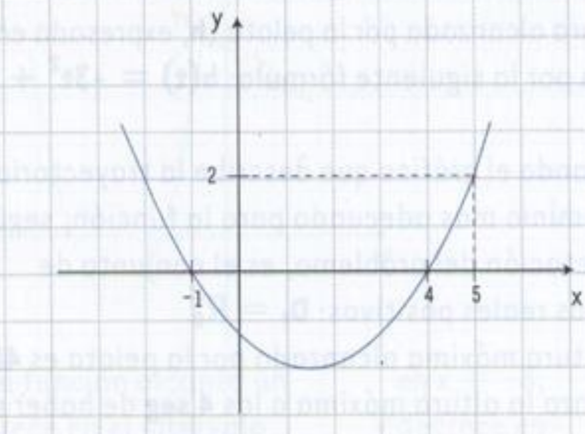
4) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, en forma **factorizada** es $f(x) =$

Ejercicio N°9: Escribir la forma polinómica de cada una de las siguientes funciones

1)



2)



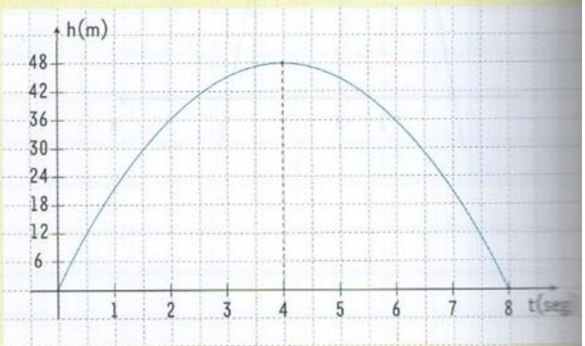
Máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de $24\,\frac{m}{seg}$.

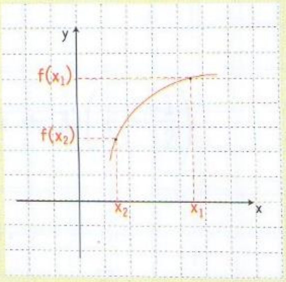
La altura alcanzada por la pelota (**h**, expresada en metros) en función del tiempo (**t**, expresado en segundos), está dada por la siguiente fórmula: $\mathbf{h(t) = -3t^2 + 24t}$.

Analizando el gráfico que describe la trayectoria de la pelota, se puede concluir que:

- El dominio más adecuado para la función, según la interpretación del problema, es el conjunto de los números reales positivos: $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
- La altura máxima alcanzada por la pelota es **48 m**.
- Alcanza la altura máxima a los **4 seg** de haber sido lanzada.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota asciende (desde que es lanzada hasta el momento que alcanza la altura máxima) es **(0;4)**; *intervalo de crecimiento*.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota desciende (desde que alcanza la altura máxima hasta que vuelve a tocar el suelo) es **(4;8)**; *intervalo de decrecimiento*.

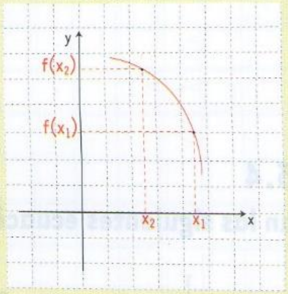


Una función continua es ***creciente*** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente.*



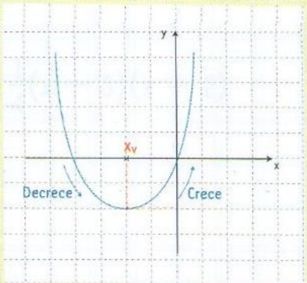
f(x) es creciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Una función continua es ***decreciente*** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, disminuyen los valores de la variable dependiente.*



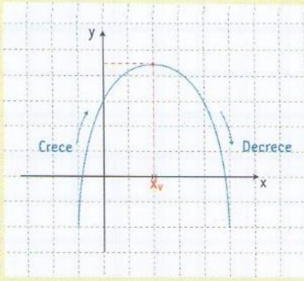
f(x) es decreciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

En general, dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se verifica que:



Si $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, la función:

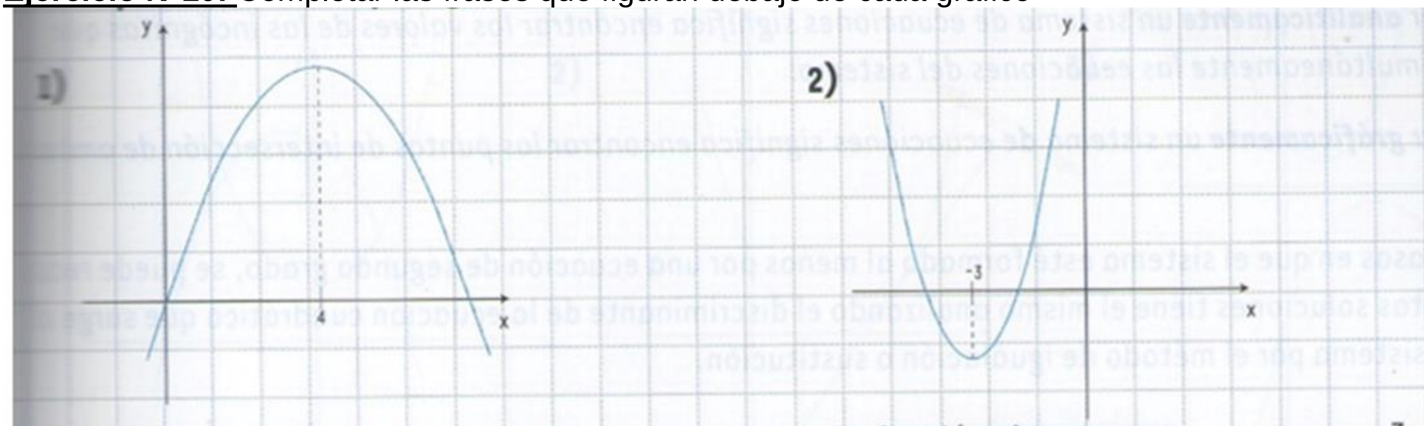
- Alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola.
- **Decrece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Crece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.



Si $\mathbf{a} < \mathbf{0}$, la función:

- Alcanza un **máximo** en el vértice de la parábola
- **Crece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Decrece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.

<u>Ejercicio N°10:</u> Completar las frases que figuran debajo de cada gráfico



La función alcanza un en $x = 4$; crece en el intervalo y decrece en el intervalo .

La función alcanza un en $x = -3$; crece en el intervalo y decrece en el intervalo .

Ejercicio n°11:

Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $I(z) = 1.000z - 2z^2$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.

- **Realicen el gráfico aproximado de la función y respondan.**

1) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

2) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? ¿Y 375 pares?

3) ¿A partir de qué cantidad de pares comienza a tener pérdidas?

EjercicioN°12:

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x)=0.5x^2-4x+6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0,10]

a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

c) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

EjercicioN°13: En una cooperativa agrícola de una región semiárida se bsuca optimizar la produccion de un cultivo resistente a la sequía para asegurar la alimentación de la comunidad local, al mismo tiempi que se minimiza el desperdicio de recursos. Han observado que el rendimiento del cultivo (**R** en toleladas por hectárea) en función de la cantidad de fertilizante orgánico aplicado (**x** en kilogramos por hectáreas) puede modelarse mediante la función cuadrática:

$$\boldsymbol{R(x) = -\frac{1}{20}.x^2 + 4.x - 15}$$

a) ¿Para cuáles cantidades de fertilizante el cultivo no rinde nada?
b) Para cumplir con los objetivos de “hambre cero”, necesitan una producción mínima de 60 toneladas de cultivo por hectárea, para asegurar la alimentación de la población local. ¿Qué cantidad de fertilizante permite a la cooperativa cumplir con la producción mínima?
c) ¿Cuál es la cantidad de fertilizante que maximiza el rndimiento del cultivo?¿Cuál es ese rendimiento máximo?
d) Para cumplir con el “consumo resposable” y evitar la sobre producción y el desperdicio de recursos (agua, energia, mano de obra), la producción no debe exeder las 75 toneladas de cultivo por hectárea. ¿Cuál es el rango de cantidad de fertilizante que permite a la cooperativa cumplir con la producción máxima de 75 toneladas por hectárea?
e) ¿Cuál es el rango de cantidad de fertilizante que cumple con los objetivos de producción mínima y máxima?
f) Realizar una gráfica aproximada

UNIDAD N°2: RADICALES

Propiedades de la potencia y raíz:

1) Todo número elevado a la cero es igual a uno. Ejemplo: $21^0=1$

2) Todo número elevado un exponente negativo se resuelve invirtiendo la base. Ejemplos:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \qquad y \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

3) Potencia de otra potencia se multiplican los exponentes. Ejemplo: $(2^3)^2= 2^6=64$

4) Multiplicación de potencias de igual base se suman los exponentes. Ejemplos:

$$2^3 .\ 2^2= 2^{3+2}=2^5=32$$

5) División de potencias de igual base se restan los exponentes. Ejemplo:

$$2^5 : 2^2= 2^{5-2}=2^3=8$$

6) La potencia se puede distribuir en la multiplicación o división. Ejemplos:

$$(3 \,.\, 5)^2= 3^2 \,.\, 5^2=9 \,.\, 25=225 \quad y \quad (8 : 4)^2= 8^2 : 4^2=64 : 16=4$$

7) La potencia no se puede distribuir ni en la suma ni en la resta. Ejemplos:

$$(3 + 5)^2= 8^2 =64 \quad y \quad (8 - 5)^2= 3^2=9$$

8) La potencia de exponente fraccionario se resuelve como una raíz. Ejemplo:

$$8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$$

9) Raíz de otra raíz se multiplican los índices. Ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[2.3]{729} = \sqrt[6]{729} = 3$$

10) La raíz se puede distribuir en la multiplicación o división. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8}\,.\sqrt[3]{27} = 2.3 = 6 \qquad y \qquad \sqrt[3]{64:8} = \sqrt[3]{64}:\sqrt[3]{8} = 4:2 = 2$$

11) La raíz no se puede distribuir en la suma ni en la resta. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{8+19} = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad y \qquad \sqrt[3]{27-19} = \sqrt[3]{8} = 2$$

12) La raíz se puede agrupar en la multiplicación y división. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2.4} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad y \qquad \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81:3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

13) Simplificación de índices con exponentes. Ejemplos:

$$\sqrt[\cancel{10}]{3^{\cancel{2}}} = \sqrt[5]{3} \qquad \sqrt[\cancel{3}]{5^{\cancel{6}}} = 5^2 \qquad \sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}} = 2 \qquad \cancel{\sqrt{}}\,7^{\cancel{2}} = |7| = 7$$

Veamos algunos ejemplos

1)

$$(b.b^{-2})^3.b^2 = b^3.(b^{-2})^3.b^2 = b^3.b^{-6}.b^2 = b^{-1} = \frac{1}{b}$$

2) $\sqrt[6]{x^4}.\sqrt[9]{x^6}.\sqrt[15]{x^{10}} =$ *simplifico cada potencia con su raíz*

$\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x^2}.\sqrt[3]{x^2} =$ *aplico la propiedad l)*

$\sqrt[3]{x^2.x^2.x^2} =$ *aplico la propiedad d)*

$\sqrt[3]{x^6} =$ *simplifico la raíz con la potencia*

x^2

EJERCICIO N°14: Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la potenciación.

1) $(a.a^2)^2 : a^5 =$

2) $(x^5)^3 : (x.x)^2 =$

3) $(b.b^{-2})^3.b^2 =$

4) $(a^2.b)^4.(a.b)^{-2} =$

5) $\left(\frac{m}{n^3}\right)^5 : \left(\frac{m}{n}\right)^{-3} =$

6) $(x^{-2}.y^3)^3.(x^4.y^{-7}) =$

EJERCICIO N°15: Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la

1) $\sqrt{a^3}\,\sqrt{a}\,\sqrt{a^4} =$

2) $\sqrt[6]{x^4}\,\sqrt[9]{x^6}\,\sqrt[15]{x^{10}} =$

3) $\sqrt[9]{\dfrac{x^{12}}{y^{15}}} =$

4) $\sqrt[3]{x^2.z^5}\,\sqrt[3]{x^7.z} =$

EJERCICIO N°16: Resolver aplicando propiedades

1) $\dfrac{2^5}{2^3} + 3^{-1} - \sqrt{2}\,\sqrt{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} =$

3) $\dfrac{4}{2^4} - \dfrac{1}{3^{-1}} + \dfrac{2^3.4}{32} - \sqrt{\dfrac{3^7}{3^3}} =$

NÚMEROS IRRACIONALES. RADICALES

Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas.

Como ya se vio, las raíces no exactas de números racionales son números irracionales.

Se denomina **radical** a la raíz indicada de un número o de una expresión, siempre que esta tenga solución real.

Extracción de factores de un radical

Existen factores, dentro de un radical, que pueden ser extraídos si el exponente de los mismos es mayor o a lo sumo igual que el índice de la raíz. Para ello deben aplicarse las propiedades de la potenciación y radicación.

Por ejemplo:

16	2
8	2
4	2
2	2
1	
$16=2^4$	

$\sqrt[3]{16.x^7} =$

$\sqrt[3]{2^4.x^7} =$ ***Factorizamos los números →***

$\sqrt[3]{2^3.2^1.x^3.x^3.x^1}$ **Separamos las potencias con exponente iguales o menores que el índice de la raíz**

$\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2^1}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x^1} =$ ***Aplicamos distributiva de la raíz***

$2.\sqrt[3]{2}.x.x.\sqrt[3]{x} =$ ***Simplificamos las Raices y potencias del mismo índice y radicando***

$2.x^2.\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{x} =$ ***Agrupamos potencias y raices***

$2.x^2.\sqrt[3]{2.x}$ ***aplicamos propiedades de raiz y potencia***

EJERCICIO N° 17: Extraer todos los factores posibles de cada radical

1) $\sqrt{8} =$

3) $\sqrt[3]{10.000} =$

2) $\sqrt{0,27} =$

4) $\sqrt[4]{x^{21}} =$

5) $\sqrt{16x^3} =$

7) $\sqrt[3]{-8x^6.y^5} =$

6) $\sqrt{9a^2.b^6.c} =$

8) $\sqrt[3]{\dfrac{81m^{11}.n^{16}}{125}} =$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

Radicales semejantes

*Dos radicales son **semejantes** cuando tienen igual índice y el mismo radicando.*

Términos con radicales semejantes: $\sqrt{3}$ y $5\sqrt{3}$; $-2\sqrt[3]{2}$ y $4\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[4]{x^3}$ y $-8\sqrt[4]{x^3}$.

Términos con radicales no semejantes: $-\sqrt[3]{7}$ y $2\sqrt{7}$; $5\sqrt{3}$ y $7\sqrt{2}$; $-4\sqrt[4]{3}$ y $9\sqrt[3]{4}$.

RECUERDA!!!

ÍNDICE ← $\sqrt[3]{5}$ → RADICANDO

Tienen igual índice

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}$ y $3.\sqrt[3]{2}$ Son semejantes

Tienen igual radicando

Adición y sustracción de radicales

- Para sumar o restar radicales deben ser semejantes, solo sumamos o restamos los números que acompañan a los radicales y dejamos el mismo radical.

Ejemplo: **a)** $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

b) $3\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2}$

- Para los casos en que no sean semejantes se pueden extraer factores como en la actividad N°3 y convertirlos en radicales semejantes. Se procede de la siguiente manera:

Ejemplo:

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - \sqrt{32} =$

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2^3} - \sqrt{2^5} =$ ***Factorizamos todos los números***

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2.2^1} - \sqrt{2^2.2^2.2^1} =$ ***Separamos las potencias***

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2}.\sqrt{2} - \sqrt{2^2}.\sqrt{2^2}.\sqrt{2^1} =$ ***Aplicamos distributiva de la raíz***

$5\sqrt{2} - 3.2.\sqrt{2} + 2.2.\sqrt{2} =$ ***Simplificamos las raices con las potencias***

$5\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$ ***multiplicamos los n° que estan fuera de la raíz***

$3\sqrt{2}$ ***sumamos y restamos los n° que acompañan a los radicales semejantes***

EJERCICIO N°18: Sumar y restar los siguientes radicales semejantes

1) $\sqrt{2} + \sqrt{2} - 5\sqrt{2} =$

2) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{x} =$

EJERCICIO N°19: Resolver las siguientes sumas y restas

1) $\sqrt{a} - 2\sqrt{b} + \sqrt{a} - \sqrt{b} =$

2) $\sqrt{9x} - \sqrt{25x} + \sqrt{49x} =$

3) $3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} =$

4) $\sqrt[4]{9y^8} + \sqrt[6]{27y^{12}} =$

5) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{\frac{2}{125}} =$

6) $\sqrt{81a^3} + \sqrt{9a^3} - \sqrt{25a^3} =$

Multiplicación de radicales de igual índice

La operatoria con radicales cumple con las siguientes propiedades.

- Propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto de la suma y resta:

$$a(b \pm c) = (b \pm c)a = ab \pm ac \quad \wedge \quad (b \pm c) : a = b : a \pm c : a$$

- Cuadrado de un binomio y diferencia de cuadrados:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \wedge \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \sqrt{2}\,\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\sqrt{8} = \sqrt{4} + \sqrt{16} = 2 + 4 = 6$

b) $(\sqrt{75} - \sqrt{27}) : \sqrt{3} = \sqrt{75} : \sqrt{3} - \sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\,\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 3 - 2\sqrt{15} + 5 = 8 - 2\sqrt{15}$

d) $(\sqrt{8} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{3}) = (\sqrt{8})^2 - (\sqrt{3})^2 = 8 - 3 = 5$

EJERCICIO N°20 : Resolver las siguientes multiplicaciones y divisiones

- **Resuelvan las siguientes multiplicaciones.**

1) $\left(5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) =$

2) $\sqrt[4]{2a^2}\,\sqrt[4]{ab}\,\sqrt[4]{2ab} =$

3) $2\sqrt[5]{ab} : \left(-3\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}\right) =$

4) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{24}) + \sqrt{98} =$

5) $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

6) $(\sqrt{15} - \sqrt{135}) : \sqrt{5} =$

7) $\dfrac{\sqrt{8}.\sqrt{3}}{\sqrt{6}} =$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

RACIONALIZAR UN DENOMINADOR SIGNIFICA TRANSFORMAR UNA EXPRESIÓN CON DENOMINADOR IRRACIONAL EN OTRA EQUIVALENTE CON DENOMINADOR RACIONAL.

Por ejemplo: En la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$ el denominador $\sqrt{2}$ es un número irracional, entonces el objetivo de racionalizar el denominador es transformar esa expresión en otra similar donde ya no aparezca el radical $\sqrt{2}$ en el denominador.

Veamos a continuación algunos ejemplos de cómo racionalizar un denominador

PRIMER CASO: Cuando en el denominador hay un solo radical.

EJEMPLO 1: Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Para que no aparezca √2 en el denominador, el dos tendría que estar elevado al cuadrado, entonces simplificamos raíz con potencia y problema resuelto. Ahora nos preguntamos, ¿cómo hacemos para que el dos quede elevado al cuadrado?

Si multiplicamos el denominador por $\sqrt{2}$ tendríamos $\sqrt{2}.\sqrt{2}$, que es lo mismo que $\sqrt{2.2}$. Luego por propiedades de potencia sumamos los exponentes $\sqrt{2^2}$, y finalmente simplificamos $\cancel{\sqrt{2^{2}}} = 2$

Pero debemos transformar la expresión en otra expresión equivalente, para ello se debe multiplicar numerador y denominador por el mismo número, en este caso multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{2}$. Esto es:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador y denominador por √2

$$\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de raíces

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de potencia

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$$ Simplificamos raíz con potencia

<u>EJEMPLO 2</u>: Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{3}{\sqrt[5]{2}}$

Para que no aparezca la raíz en el denominador, el dos tendría que estar elevado a la quinta.

Entonces multiplicamos el denominador por $\sqrt[5]{2^4}$, que es lo mismo que $\sqrt[5]{2.2^4}$. Luego por propiedades de potencia sumamos los exponentes $\sqrt[5]{2^5}$, y finalmente simplificamos $\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}} = 2$

Pero debemos transformar la expresión en otra expresión equivalente, para ello se debe multiplicar numerador y denominador por el mismo número, en este caso multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{2^4}$. Esto es:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2}} =$$

$$\frac{3}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{2^4}$

$$\frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador

$$\frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2 \cdot 2^4}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de raíces

$$\frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de potencia

$$\frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^4}}{2} \longrightarrow$$ Simplificamos raíz con potencia

EJEMPLO 3: Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{7}{\sqrt[5]{8.x^2}} =$

Lo primero que debemos hacer es factorizar el 8, es decir, escribimos el 8 como 2^3. Luego tenemos

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2^3.x^2}} =$$

Para que no aparezca la raíz en el denominador, el dos y "x" tendrían que estar elevados a la quinta.

Luego debemos multiplicamos el denominador $\sqrt[5]{2^3.x^2}$ por $\sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}$, que es lo mismo que $\sqrt[5]{2^3.x^2\ .\ 2^2\ .\ x^3}$. Por propiedades de potencia sumamos los exponentes $\sqrt[5]{2^5\ .\ x^5}$, y finalmente simplificamos $\sqrt[5]{2^5\ .\ x^5} = 2.x$

Pero como debemos transformar la expresión en una equivalente, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, en este caso por $\sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}$. Esto es:

$$\frac{7}{\sqrt[5]{8.x^2}} =$$

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2^3\ .x^2}} = \longrightarrow$$ Factorizamos el 8

$$\frac{7}{\sqrt[5]{2^3\ .\ x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}}{\sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}$

$$\frac{7\ .\ \sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}}{\sqrt[5]{2^3\ .\ x^2}\ .\ \sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador

$$\frac{7\ .\ \sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}}{\sqrt[5]{2^3\ .\ x^2\ .\ 2^2\ .\ x^3}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de raíces

$$\frac{7\ .\ \sqrt[5]{2^2\ .\ x^3}}{\sqrt[5]{2^5\ .\ x^5}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedades de potencia

$$\frac{7\ .\ \sqrt[5]{4\ .\ x^3}}{\sqrt[5]{2^5}\ .\ \sqrt[5]{x^5}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedad distributiva de la raíz

$$\frac{7\ .\ \sqrt[5]{4\ .\ x^3}}{2.x} = \longrightarrow$$ Simplificamos raíz con potencia

SEGUNDO CASO: Cuando en el denominador hay una suma o resta de uno o dos radicales de índice dos.

EJEMPLO 4: Racionalizar el denominador de la expresión $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \longrightarrow$$ Como en el denominador tenemos una resta de radicales, multiplicamos numerador y denominador por la suma √5+√3 (si en el denominador aparece una suma de radicales entonces multiplicamos por la resta de los radicales).

$$\frac{4\ .\ (\sqrt{5}+\sqrt{3}\ )}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}\ )\ .\ (\sqrt{5}+\sqrt{3}\ )} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador

$$\frac{4\,.\,\sqrt{5}+4\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{5}\,.\,\sqrt{5}+\sqrt{5}\,.\,\sqrt{3}-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}-\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedad distributiva

$$\frac{4\,.\,\sqrt{5}+4\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{5\,.\,5}+\sqrt{5\,.\,3}-\sqrt{3\,.\,5}-\sqrt{3\,.\,3}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos los radicales

$$\frac{4\,.\,\sqrt{5}+4\,.\,\sqrt{3}}{\sqrt{25}+\sqrt{15}-\sqrt{15}-\sqrt{9}} =$$

$$\frac{4\,.\,\sqrt{5}+4\,.\,\sqrt{3}}{5-3} = \longrightarrow$$ Cancelamos los radicales semejantes de distintos signos, en este caso cancelamos +√15 con -√15 y resolvemos las raíces que se puedan.

$$\frac{4\,.\,\sqrt{5}+4\,.\,\sqrt{3}}{2} =$$

EJEMPLO 5: Racionalizar el denominador de $\frac{\sqrt{2}-1}{4+\sqrt{6}}$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4+\sqrt{6}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{4+\sqrt{6}}\,.\,\frac{4-\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}} = \longrightarrow$$ Como en el denominador aparece la suma $4+\sqrt{6}$ entonces multiplicamos por la resta $4-\sqrt{6}$.

$$\frac{(\sqrt{2}-1)\,.\,(4-\sqrt{6})}{(4+\sqrt{6})\,.\,(4-\sqrt{6})} = \longrightarrow$$ Multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador

$$\frac{\sqrt{2}\,.4-\sqrt{2}\,.\,\sqrt{6}-1\,.4+1\,.\sqrt{6}}{4\,.4-4\,.\,\sqrt{6}+\sqrt{6}\,.\,4-\sqrt{6}\,.\,\sqrt{6}} = \longrightarrow$$ Aplicamos propiedad distributiva en el numerador y denominador

$$\frac{4\,.\sqrt{2}-\sqrt{12}-4+\sqrt{6}}{16-4\sqrt{6}+4.\sqrt{6}-\sqrt{36}} = \longrightarrow$$ Multiplicamos los radicales

$$\frac{4\,.\sqrt{2}-\sqrt{12}-4+\sqrt{6}}{16-6} = \longrightarrow$$ Cancelamos los radicales semejantes de distintos signos, en este caso cancelamos +4√6 con -4√6 y resolvemos las raíces que se puedan.

$$\frac{4\,.\sqrt{2}-\sqrt{12}-4+\sqrt{6}}{10} =$$

EJERCICIO N°21: Racionalizar los siguientes denominadores

a) $\frac{2}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{4}{\sqrt[6]{2}} =$

c) $\frac{5}{\sqrt[3]{9}} =$

d) $\frac{1}{\sqrt[7]{16}} =$

e) $\frac{2}{\sqrt[3]{b}} =$

f) $\frac{7}{\sqrt[5]{4.y^3}} =$

g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3.z}} =$

h) $\frac{2}{3-\sqrt{5}} =$

i) $\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{3}} =$

j) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} =$

k) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}} =$

l) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

EJERCICIO DE REPASO

EJERCICIO A: Extraer todos los factores posibles de cada uno de los siguientes radicales

$a)\ \sqrt{27} =$

$b)\sqrt[3]{625.\ y^{3}} =$

$c)\sqrt[4]{\dfrac{32.a^{13}}{81.b^{19}}}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{16.x^{14}}{125}} =$

EJERCICIO B: Resolver las siguientes sumas y restas de radicales

$a)\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} =$

$b)\ \sqrt{16.y} + \sqrt{49.y} - \sqrt{169.y} =$

$c)\sqrt{180.a^3} - \sqrt{80.a^3} - \sqrt{45.a^3} =$

d) $\sqrt[3]{81.b^4} - \sqrt[3]{24.b^4} - \sqrt[3]{192.b^4} =$

EJERCICIO C: Resolver las siguientes multiplicaciones y divisiones de radicales

$a)\sqrt{2}.(\sqrt{6} + \sqrt{54}) =$

$b)\ (\sqrt{54} - \sqrt{24}) : \sqrt{3} =$

EJERCICIO D : Racionalizar los siguientes denominadores

$a)\ \dfrac{3}{5\sqrt[3]{2}} =$

$b)\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2.y^2}} =$

$c)\ \dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$

e) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{8.x^2}} =$

f) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} =$

$g)\dfrac{3}{\sqrt{5}} =$

UNIDAD N°3 NÚMEROS COMPLEJOS

Vamos a resolver la ecuación $x^2+9=0$

$$x^2+9=0$$
$$x^2=-9$$
$$x=\sqrt{-9}$$

Vemos que no tiene solución en el conjunto de los números reales. Entonces se define el "número imaginario" la pregunta sería, ¿Cómo se hace?

Debemos escribir -9 como 9.(-1) y aplicar distributiva de la raíz. Esto es:

$$x=\sqrt{-9}$$
$$x=\sqrt{9.(-1)}$$
$$x=\sqrt{9}\,.\sqrt{-1}$$

Sabemos que $\sqrt{9}=\pm 3$ $y\ a\ \sqrt{-1}\ le\ llamamos\ "i"$. Entonces:

$$\sqrt{-1}=i\ o\ lo\ que\ es\ lo\ mismo\ que\ i^2=-1$$

Luego $x=\sqrt{9}\,.\sqrt{-1}$ sería lo mismo que $x=\pm 3\ .\ i$

LOS **NÚMEROS IMAGINARIOS** son todos los números de la forma $b.i$ $donde\ b es\ un\ número\ real\ e\ i la\ unidad\ imaginaria$, con la propiedad de que $i^2=-1$.
Los números imaginarios junto con los números reales forman el **CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS**, que se simboliza $\mathbb{C}$.
En el campo de los números complejos todas las operaciones son posibles, salvo la división por cero.

Resolvamos ahora la ecuación $x^2-8.x+25=0$
Como se trata de una ecuación cuadrática trabajaremos con la formula resolvente donde

$$a=1\ ,b=-8\ y\ c=25$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4.1.25}}{2.1}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{64-100}}{2}$$
$$=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}$$

Como en el caso anterior debemos escribir -36 como 36 .(-1) y aplicar distributiva de la raíz.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{36}.\sqrt{-1}}{2}$$

Sabemos que $\sqrt{36} = \pm 6$ *y como a* $\sqrt{-1}$ *le llamamos* "i". Entonces $x = \frac{8 \pm 6.i}{2}$

Así obtenemos las dos soluciones $x_1 = \frac{8+6.i}{2}$ y $x_2 = \frac{8-6.i}{2}$

También podemos aplicar distributiva del denominador

$$x_1 = \frac{8}{2} + \frac{6.i}{2} \; y \; x_2 = \frac{8}{2} - \frac{6.i}{2}$$

Simplificando

$$x_1 = 4 + 3.i \; y \; x_2 = 4 - 3.i$$

Ejercicio N°22: Resolver las siguientes ecuaciones

a) x^2 +16 $= 0$

c) $x^2 + 2.x = -5$

b) $5x^2 - 6.x + 5 = 0$

d) $x^2 + 40 = -9$

Obtenemos dos soluciones de la forma: $a + b.i$, *donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.* A estos números los llamamos **NÚMEROS COMPLEJOS** escritos en **forma binómica**.

En un número complejo dado en forma binómica $a + b.i$, **a** recibe el nombre de **COMPONENTE REAL** y **b** recibe el nombre de **COMPONENTE IMAGINARIA**.

Si b=0, entonces el número complejo solo tiene parte real. Por ejemplo: 3+0.i es lo mismo que 3

Si a=0, entonces el número complejo es imaginario puro. Por ejemplo: 0+4.i es lo mismo que 4.i.

Nota: Todo número real es complejo cuya componente imaginaria es cero

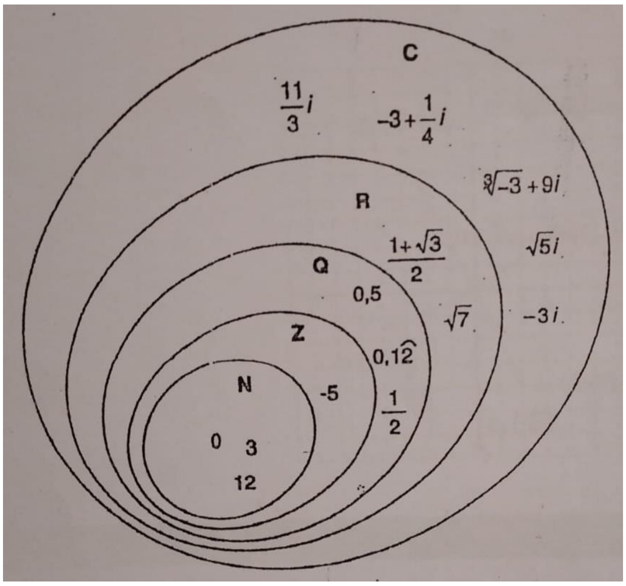
Ejercicio N°23: Completar el siguiente cuadro

Números complejos			
Forma Binómica	**Par Ordenado**	**Componente Real**	**Componente Imaginaria**
$-3-2.i$			
	(5;7)		
$1+5.i$			
	(0;2)		
		0	$\frac{1}{2}$
		-7	0
$1-i$			

DIAGRAMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Por ejemplo:

- El número 3 es un número natural (IN), entero (Z), racional (Q), real (IR) y complejo (C)
- El número -5 es un número entero (Z), racional (Q), real (IR) y complejo (C)
- El número $\frac{7}{5}$ es un número racional (Q), real (IR) y complejo (C)
- El número $\sqrt{2}$ es un número irracional (II), real (IR) y complejo (C)
- El número $-3.i$ es un número solamente complejo (C)



Ejercicio N°24: Marcar con una "x" según corresponda

Nº	IN	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	II	IR	$\mathbb{C}$
-5						
$\sqrt{-49}$						
8						
$\frac{1}{2}$						
$4.i-3$						
0						
$-2.i$						
$\sqrt{7}$						

REPRESENTACIÓN GFRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Como sabemos los números reales completan la recta numérica, por los tanto los números complejos no reales deben representarse en el plano.

Los números complejos $a+b.i$ se representan gráficamente de la misma manera que los pares ordenados de números reales $(a;b)$.

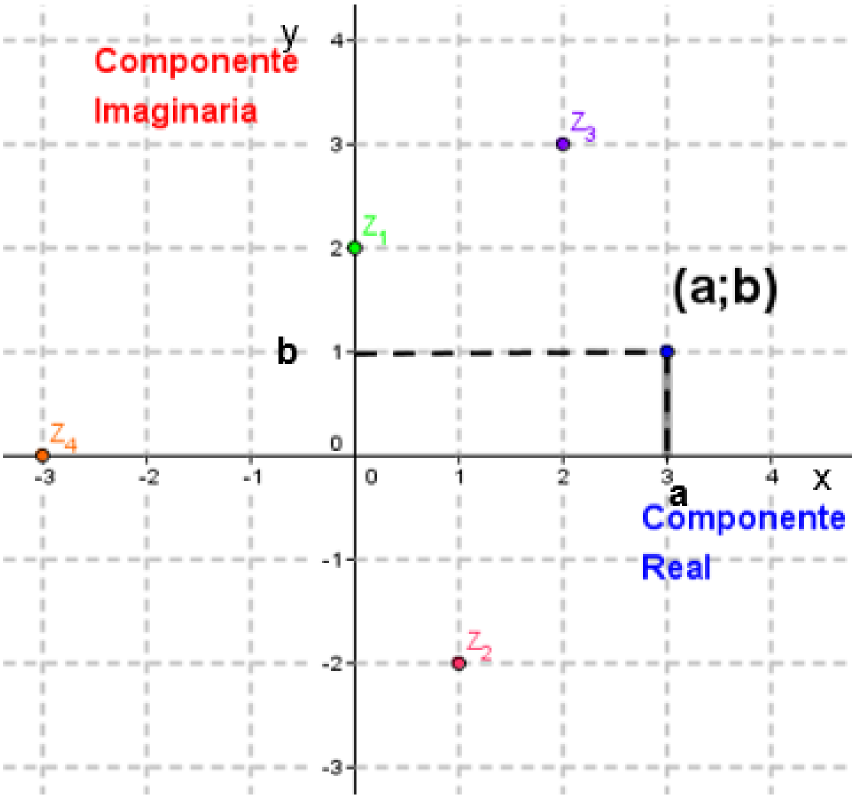
Por ejemplo:

$Z_1=2.i \rightarrow Z_1=0+2.i \rightarrow (0;2)$

$Z_2=1-2.i \rightarrow (1;-2)$

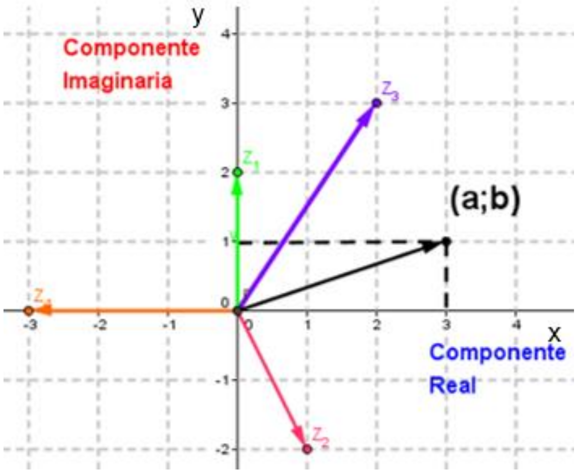
$Z_3=2+3.i \rightarrow (2;3)$

$Z_4=-3 \rightarrow Z_4=-3+0.i \rightarrow (-3;0)$



REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El punto (a; b) del plano determina un vector con origen en el punto (0;0) y extremo en (a;b). Así a cada número complejo le corresponde un vector y a cada vector un número complejo.



Ejercicio N°25: Representar gráficamente cada uno de los siguientes números complejos como par ordenado o vectorialmente.

$Z_1 = \frac{1}{4} - 2.i$ $\quad Z_3 = -3 - i$ $\quad Z_5 = 2 + 6.i$ $\quad Z_7 = -1 - 3.i$ $\quad Z_9 = 4$

$Z_2 = 4.i$ $\quad Z_4 = -4 + 2.i$ $\quad Z_6 = 3 - 4.i$ $\quad Z_8 = 5 + i$ $\quad Z_{10} = i$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

A) Suma y resta: Para sumar o restar números complejos se suma o restan por un lado las componentes reales y por otro las componentes imaginarias.

Por ejemplo:

- $(-3+5.i)+(2-6.i)=$

  $-3+5.i+2-6.i= \quad \rightarrow al\ tener\ signo + delante\ del\ paréntesis\ quedan\ con\ el\ mismo\ signo$

  $-1-1.i= \quad \rightarrow opero -3\ con\ 2\ da -1\ y\ 5.i\ con -6.i\ da -1.i$

  $1-i \quad \rightarrow 1.i\ es\ lo\ mismo\ que\ i$

- $(2+5.i)-(5+2.i)=$

  $2+5.i-5-2.i= \quad \rightarrow al\ tener\ signo - delante\ del\ paréntesis\ cambio\ el\ signo$

  $-3+3.i$

B) Opuesto: El opuesto del complejo Z se simboliza –Z y se obtiene cambiando el signo de la componente real e imaginaria.

Por ejemplo: $Si\ el\ número\ complejo\ es\ Z=-3+5.i\ entonces\ su\ opuesto\ es -z=3-5.i$

C) Multiplicación:

- **Para multiplicar dos números imaginarios se procede de la siguiente manera**

$(-3.i).(5.i)=$

$(-3.5).(i.i)= \quad \rightarrow se\ multiplican\ los\ números\ reales\ por\ un\ lado\ y\ por\ otro\ la\ unidad\ imaginaria$

$-15\ .\ i^2 \quad \rightarrow -3\ por\ 5\ da -15\ e\ i\ por\ i\ da\ i^2$

$-15.(-1)=15 \quad \rightarrow como\ i^2=-1\ reemplazamos\ i^2\ por\ -1$

- **Para multiplicar dos números complejos se aplica propiedad distributiva**

$$(4+3.i)\ .\ (7-2.i)=$$

$4.7\ -\ 4\ .\ 2.i\ +\ 3.i.\ 7\ -\ 3.i\ .2.i= \quad \rightarrow Distributiva$

$21\ -\ 8.i\ +\ 21.i\ -\ 6.i^2 = \rightarrow\ multiplicamos\ en\ cada\ término\ como\ en\ el\ caso\ anterior,\ por\ un\ lado\ números\ reales\ y\ por\ el\ otro\ la\ unidad\ imainaria$

$21\ +13.i\ -\ 6.(-1)= \rightarrow Agrupamos\ los\ términos\ semenjantes, es\ decir -8.i\ con\ 21.i\ y\ reemplazamos\ i^2\ por -1$

$21\ +13.i\ +\ 6= \quad \rightarrow Resolvemos -6\ por\ (-1)$

$27\ +13.i\ = \quad \rightarrow Agrupamos\ 21\ con\ 6\ y\ da\ 27$

D) Complejos Conjugados: Dos números complejos se llaman conjugados cuando tienen componentes reales iguales y componentes imaginarias opuestas. El conjugado del complejo Z se simboliza $\bar{Z}$ y se obtiene cambiando el signo de la componente imaginaria.

Por ejemplo: $Si\ el\ número\ complejo\ es\ Z=\ -2-8.i\ entonces\ su\ conjugado\ es\ \overline{Z}=-2+8.i$

Ejercicio N°26: Completen el cuadro y respondan:

a)¿Qué obtienes al sumar números opuestos?

b)¿Qué obtienes al multiplicar complejos conjugados?

Z	$-Z$	$\overline{Z}$	$Z+(-Z)$	$Z\,.\,\overline{Z}$
$3-5.i$				
	$-1+\frac{1}{2}.i$			
		$\frac{3}{4}-i$		
	$7+4.i$			

Ejercicio N°27:

Representar vectorialmente el complejo $Z = 4+3.i$, su opuesto $-Z$ y su conjugado $\overline{Z}$.
.Qué conclusiones sacan?

Ejercicio N°28: Resolver las siguientes operaciones

a) $(-3+i)+(-3-i) =$ c) $(3-i)-(8-2.i) =$ e) $(8+2.i).\frac{1}{2}.i =$ g) $(9.i)^2 =$

b) $(5-3.i)+(4-2.i) =$ d) $(3+2.i).(4-2.i) =$ f) $(-7.i).(-9.i) =$ h) $(5-2.i)^2 =$

Ejercicio N°29: Dados los números complejos $Z_1 = 4+3.i$, $Z_2 = 1-5.i$ y $Z_3 = -2+i$.
Resolver las siguientes operaciones:

$a) Z_1+Z_2 =$ $b) Z_2-Z_3 =$ $c) Z_1+Z_3 =$ $d) Z_1-Z_2 =$ $c) Z_1.Z_3 =$ $d) Z_1.Z_2 =$

E) Potencia de la unidad imaginaria: Para resolver las distintas potencias de la unidad imaginaria $(i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, etc.)$ vamos a descomponer las potencias de "i" en productos de potencias de igual base y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

Por ejemplo: $i^3 = i^2\,.\,i^1 = -1\,.\,i = -i$

Ejercicio N°30: Completar el siguiente cuadro con las doce primeras potencias de la unidad imaginaria:

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}

Observar la tabla anterior de las sucesivas potencias de la unidad imaginaria ¿Se repiten? ¿Qué regularidad observan?

¡A TENER EN CUENTA!

$$\boxed{\begin{array}{c} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \end{array}}$$

Método práctico: Utilizando la regularidad observada, es decir, que las sucesivas potencias de la unidad imaginaria se repite cada 4 veces, podemos calcular otras potencias de "i".

Por ejemplo:

Para calcular i^{22}, como la potencia de la unidad imaginaria se repite cada 4 lugares, dividimos 22 en 4, en esta potencia va a ser equivalente la potencia de exponente igual al resto de la división.

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \hline -20 & 5 \\ \hline 2 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

Luego $i^{22} = i^2$ y como sabemos $i^2 = -1$, entonces $i^{22} = -1$

Veamos otro ejemplo:

Para calcular i^{123} dividimos 123 en 4.

$$\begin{array}{r|l} 123 & 4 \\ \hline 120 & 30 \\ \hline 3 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

Luego $i^{123} = i^3$ y como sabemos $i^3 = -i$, entonces $i^{123} = -i$

F) División: Para dividir dos números complejos en forma binómica se multiplica y se divide por el conjugado del denominador.

Por ejemplo: Para resolver $\frac{1-2.i}{1-3.i}$, como tengo en el denominador una resta, se debe multiplicar y dividir por $1 + 3.i$.

$$\frac{1-2.i}{1-3.i} = \frac{1-2.i}{1-3.i} \cdot \frac{1+3.i}{1+3.i}$$

$$= \frac{(1-2.i).(1+3.i)}{(1-3.i).(1+3.i)}$$

$$= \frac{1\,.\,1 + 1\,.\,3.i - 2.i\,.1 - 2.i\,.\,3.i}{1\,.\,1 + 1\,.\,3.i - 3.i\,.1 - 3.i\,.\,3.i}$$

$$= \frac{1 + 3.i - 2.i - 6.i^2}{1 + 3.i - 3.i - 9.i^2}$$

$$= \frac{1 + 1.i - 6.(-1)}{1 + 0.i - 9.(-1)}$$

$$= \frac{1 + 1.i + 6}{1 + 9}$$

$$= \frac{7 + 1.i}{10}$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{1}{10}.i$$

Ejercicio N°31: Indicar el valor de las siguientes potencias.

$a)\ i^{18} =$

$c)\ i^{60} =$

$b)\ i^{51} =$

$d)\ i^{21} =$

Ejercicio N°32: Resolver las siguientes divisiones.

$a)\ \frac{4-i}{1-i} =$

$c)\ \frac{2}{2+3.i} =$

$b)\ \frac{2-3.i}{3+i} =$

$d)\ \frac{-3}{2-i} =$

EJERCICIOS DE REPASO

Ejercicio A:

a) Completar el siguiente cuadro

Número Complejo	Forma Binómica	Par ordenado	Componente Real	Componente Imaginaria	Conjugado	Opuesto
Z_1	$\frac{5}{2} - 3i$					
Z_2						3+i
Z_3			-1	-3		
Z_4					3-i	
Z_5	2i					
Z_6		(-1;0)				

b) Representar vectorialmente cada uno de los complejos anteriores en un mismo sistema.

Ejercicio B: Dados los números complejos $Z_1=2-3i$; $Z_2=-3+5i$; $Z_3=1-i$ y $Z_4=2+i$,
Resolver las siguientes operaciones:

a) $Z_3 \,.\, Z_2 + (Z_4)^2 - Z_1 =$

b) $\frac{Z_2}{Z_4} + \overline{Z_3} + i^{107} =$

c) $Z_1 + Z_2 =$

d) $Z_3 - Z_2 =$

e) $Z_1 . Z_2 =$

f) $\frac{Z_1}{Z_4} =$

Ejercicio C: Marcar con una cruz al conjunto numerico que pertenece cada número

Nº	IN	Z	Q	II	IR	C
i^{12}						
i^2						
$\sqrt{-16}$						
$\sqrt{3}$						
0						
2-i						

Unidad N°4: Polinomios

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

Una ***expresión algebraica*** *es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.*

a) $2x + 3^4$ **b)** $5x^3 + 6x - \frac{1}{3}$ **c)** $\cancel{x^2 + \sqrt{3x}}$ **d)** $\cancel{\frac{x^5 + 4}{x^2}}$ **e)** $\sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4$

Los números son los coeficientes, y las letras, las variables o indeterminadas.
En este capítulo se estudiarán expresiones algebraicas con una sola variable (x).

Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**.

Los ejemplos c) y d) no son polinomios; sí lo son a), b) y e).

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

monomio, si tiene un solo término $\left(\frac{1}{2}x^5\right)$;

binomio, si tiene dos términos $(4x^2 + 5)$;

trinomio, si tiene tres términos $(3x - 8 + x^3)$ y

cuatrinomio, si tiene cuatro términos $(2x^5 - 2x + 7 - x^2)$.

Los términos que tienen la misma variable y exponente son ***semejantes.***

Los términos $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$ y x^2 son semejantes.

Se denomina ***grado*** *al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.*

a) $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$; grado: 5. **b)** $Q(x) = 4 - x + x^3$; grado: 3. **c)** $T(x) = 5$; grado 0.

Se llama ***coeficiente principal*** *al que multiplica a la variable de mayor exponente.*

a) $S(x) = x + 5x^3 - 2x^4$; coeficiente principal: −2. **b)** $T(x) = x^5 - 8x^4 + x$; coeficiente principal: 1.

Al polinomio cuyo coeficiente principal es ***1*** *se lo denomina* ***normalizado.***

Un polinomio está ***ordenado*** *si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.*

a) $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ **b)** $J(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ **c)** $Z(x) = x^5 - 2x^2 + 7$

Un polinomio está ***completo*** *si tiene todas las potencias decrecientes del grado.*

a) $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$; está completo. **b)** $Q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3$; está incompleto.

Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

a) $M(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
b) $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$
c) $K(x) = x^6 - 3 = x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 3$

EJERCICIO 33: Clasificar de acuerdo al número de terminos, indicar grado, coeficiente principal y término independiente de cada polinomio

1) $P(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$ **2)** $Q(x) = 7x^3 - 2x^5 + 4$ **3)** $R(x) = 0x^4 - x + 5x^2$

EJERCICIO 34:

● **Marquen con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.**

1) $16x + x^{-1}$ ☐ **3)** $\sqrt[5]{x^2} - 9$ ☐ **5)** $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$ ☐

2) $\sqrt{3}x^2 - 5$ ☐ **4)** $\frac{2}{3}x^2 + 5x - 2$ ☐ **6)** $x^{10} - \frac{x}{5}$ ☐

EJERCICIO 35:

● **Ordenen y completen cada uno de los siguientes polinomios.**

1) $5x^3 - 1 =$ **3)** $-2 + 2x^3 - x =$

2) $-27x^3 + x^4 + 2 =$ **4)** $x - 3x^2 + x^5 - 1 =$

EJERCICIO 36:

● **Indiquen el grado de cada uno de los siguientes polinomios.**

1) $3x^2 - 2x - x^4$ **2)** $x^3 - 2^7.x^5$ **3)** $-x^3 + 6 + 0x^5$ **4)** $x + 3^3$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados.

a) $2x^3 + x^3 + 6x^3 = 9x^3$ **b)** $6x^5 + \frac{1}{2}x^5 + x^5 = \frac{15}{2}x^5$ **c)** $x + x + x + x + x = 5x$

Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) = 6x^4 \wedge Q(x) = -3x^4 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 6x^4 + 3x^4 = 9x^4$

***Reducir** un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.*

a) $2x + 3x^4 + x - x^4 = 2x^4 + 3x$ **b)** $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + x^3 - 6x^3 = x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 5x^3$

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

a) Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1 \end{cases}$

$P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & -\ 5x^3 & +\ 2x^2 & +\ 0x & -\ 3 \\ + & 0x^4 & -\ 9x^3 & +\ x^2 & +\ x & -\ 1 \\ \hline & x^4 & -\ 14x^3 & +\ 3x^2 & +\ x & -\ 4 \end{array}$$

b) Dados: $\begin{cases} R(x) = x^2 - x + 1 \\ T(x) = -x + 2 - 5x^2 \end{cases}$

$R(x) + T(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & -\ x & +\ 1 \\ + & -5x^2 & -\ x & +\ 2 \\ \hline & -4x^2 & -\ 2x & +\ 3 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

a) Dados: $\begin{cases} M(x) = 2x^2 + x - 2 \\ N(x) = x^2 + 1 \end{cases}$

$M(x) - N(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & +\ x & -\ 2 \\ + & -x^2 & +\ 0x & -\ 1 \\ \hline & x^2 & +\ x & -\ 3 \end{array}$$

b) Dados: $\begin{cases} A(x) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7 \\ C(x) = 3x - 5x^2 - x^4 + 2 \end{cases}$

$A(x) - C(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0x^4 & -\ \frac{1}{2}x^3 & +\ 3x^2 & -\ 2x & -\ 7 \\ + & x^4 & -\ 0x^3 & +\ 5x^2 & -\ 3x & -\ 2 \\ \hline & x^4 & -\ \frac{1}{2}x^3 & +\ 8x^2 & -\ 5x & -\ 9 \end{array}$$

EJERCICIO 37: Resolver las siguientes operaciones

$a) -3.x + x - 5.x + x =$ $\quad$ $b) 4.x^2 + 6.x^2 - 3.x^2$

EJERCICIO 38: Dados los polinomios

$P(x) = -2.x^3 + x^2 - 5.x + 3$; $Q(x) = 3.x - 4 + 5.x^3 - 2.x^2$ y $R(x) = x^2 - 5.x + 2$

Resolver las siguientes operaciones:

a) P(x)+Q(x)= **b) P(x) _ Q(x)=** **c) P(x)+R(x)=** **d) R(x)_Q(x)=**

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$$x^n.x^m = x^{n+m}$$

a) $(3x)(2x) = 6x^2$ **b)** $(10x^4)(-5x^4) = -50x^8$ **c)** $(-4x)(x^3) = -4x^4$ **d)** $(-6x^5)(-3x^2) = 18x^7$

Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta.

$$a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$-3\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) = -3x^3 + (-3)2x^2 + (-3)\frac{1}{3}x - (-3).4 = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Dados: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = 3x^2 - x$.

$$P(x).Q(x) = (2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - x)$$
$$= (2x^2)(3x^2) + 2x^2(-x) + (-5x)(3x^2) + (-5x)(-x) + 2(3x^2) + 2(-x)$$
$$= 6x^4 - 2x^3 - 15x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 2x$$
$$P(x).Q(x) = 6x^4 - 17x^3 + 11x^2 - 2x$$

Producto de la suma de dos términos por su diferencia

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

a) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$

b) $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x) = x^4 - 5x^3 + 5x^3 - 25x^2 = x^4 - 25x^2$

EJERCICIO 39: Resolver las siguientes multiplicaciones de monomios

$a)\ (2.x^2).(-6.x) =$ $\quad$ $b)\ (-3.x^2).(5.x^3) =$ $\quad$ $c)\ (-4.x^4).(6.x^5) =$

EJERCICIO 40: Aplicar distributiva y resolver

$\boldsymbol{a})\ (\boldsymbol{-2.x}).\left(\boldsymbol{-3.x^5 + 5.x^2}\right) =$

$\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{6.x^3 - 3.x^2 + 12.x}).(\boldsymbol{-x^2}) =$

$\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x - 3}).(\boldsymbol{x + 3}) =$

$\boldsymbol{d})(\boldsymbol{4.x^2 - 3.x}).(\boldsymbol{4.x^2 + 3.x}) =$

EJERCICIO 41: Resolver las siguientes multiplicaciones de polinomios

1) $(x^3 - x + 1)(x^2 - x)$

2) $(x^5 - x^3 - x + 1)(x^3 - x^2 + x - 2)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Para dividir dos monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas tre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación.

$$x^n : x^m = x^{n-m}$$

a) $(4x^3):(2x) = (4:2)(x^3:x) = 2x^2$

b) $x^4:(-8x^3) = [1:(-8)](x^4:x^3) = -\frac{1}{8}x$

c) $-6x^5:(3x^2) = (-6:3)(x^5:x^2) = -2x^3$

d) $(-10x^8):(-2x^3) = [-10:(-2)](x^8:x^3) = 5x^5$

Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva. $(a \pm b):c = a:c \pm b:c$

a) $(24x^5 - 16x^3 + 12x^2 - 4x):(-4x) = 24:(-4)(x^5:x) - 16:(-4)(x^3:x) + 12:(-4)(x^2:x) + (-4):(-4)(x:x)$

$= -6x^4 + 4x^2 - 3x + 1$

b) $(2x^6 + 5x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x):\left(\frac{1}{2}x\right) = 4x^5 + 10x^4 + 2x^2 + x + 12$

Para dividir dos polinomios:

- *El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.*
- *El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.*
- *El polinomio divisor debe estar ordenado.*

Dividendo ↘ **Divisor** ↙

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

Resto ↗ **Cociente** ↖

$$P(x) = C(x).Q(x) + R(x)$$

Ejemplo:

Dados: $P(x) = 2x - 3 + 2x^4$ y $Q(x) = -2x + x^2$.
Hallar $P(x):Q(x)$.

El dividendo debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3$.
El divisor debe estar ordenado: $Q(x) = x^2 - 2x$.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +2x & -3 & x^2 - 2x \\ \cline{6-6}
-\;2x^4 & -4x^3 & & & & 2x^2 + 4x + 8 \\ \cline{1-2}
 & 4x^3 & +0x^2 & & & \downarrow \\
 & -\;4x^3 & -8x^2 & & & \text{Cociente: } C(x) \\ \cline{2-3}
 & & 8x^2 & +2x & & \\
 & & -\;8x^2 & -16x & & \\ \cline{3-4}
 & & & 18x & -3 \longrightarrow & \text{Resto: } R(x)
\end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 4x + 8$
$R(x) = 18x - 3$

EJERCICIO 42: Resolver las siguientes divisiones de monomios

$a)\ (8.x^2):(-4.x) =$ $\qquad b)\ (-9.x^2):(3.x^2) =$ $\qquad c)\ (-14.x^7):(7.x^5) =$

EJERCICIO 43: Aplicar distributiva y resolver

$\boldsymbol{a})\ \left(-\mathbf{8}.\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}}+\mathbf{6}.\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right):(-\mathbf{2}.\boldsymbol{x}).=$

$\boldsymbol{b})\ (\mathbf{6}.\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}-\mathbf{3}.\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{12}.\boldsymbol{x}):(-\mathbf{3}.\boldsymbol{x}) =$

EJERCICIO 44:

- **Hallen el cociente y el resto de las siguientes divisiones.**

1) $(2x^3-4x^2-5x-3):(x+1)$ $\qquad$ **3)** $(5x^3-4x-3):(x^2-x)$

REGLA DE RUFFINI. TEOREMA DEL RESTO

La **Regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro cuya forma sea $x+a$.

Dados: $P(x) = 2x^3+5x^2-x-5$ y $Q(x) = x+2$.
Hallar $P(x):Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

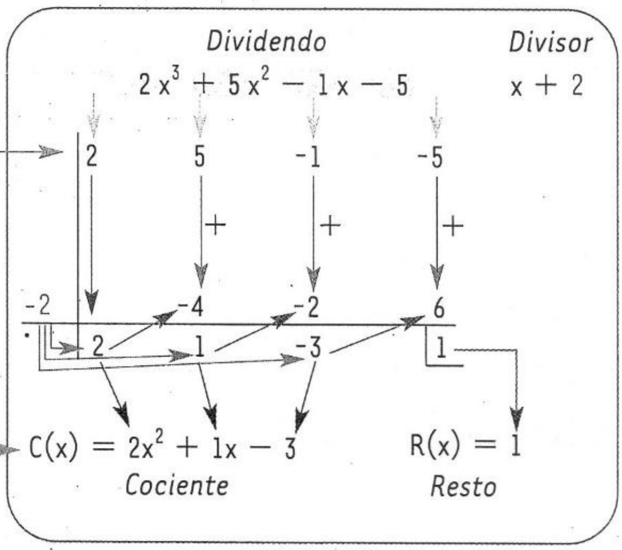
El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado.**

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.



Ejemplos:

a) $(x^3-x+2):(x-2)$

$1x^3+0x^2-1x+2 \longrightarrow$ Dividendo

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{8} \end{array}$$

Cociente $\longrightarrow x^2+2x+3$

Resto $\longrightarrow 8$

b) $\left(\frac{1}{3}x^4-3x^2+1\right):(x+1)$

$\frac{1}{3}x^4+0x^3-3x^2+0x+1 \longrightarrow$ Dividendo

$$\begin{array}{r|rrrrr} & \frac{1}{3} & 0 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \\ \hline & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \boxed{-\frac{5}{3}} \end{array}$$

Cociente $\longrightarrow \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3}$

Resto $\longrightarrow -\frac{5}{3}$

Teorema del resto

*El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma x + a, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.*

a) Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, se obtiene:

$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$
$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$

El resto de la división es 1.

b) Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x - 3$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, es:

$P(3) = 3^2 - 2.3 - 3$
$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$

Si el resto es 0 (cero): **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$**.

EJERCICIO 45:

- **Apliquen la regla de Ruffini en cada una de las siguiente divisiones.**

1) $(2x^3 + 3x - 1):(x - 2)$
2) $(3x^3 - 2x^2 - 2):(x + 1)$
3) $(-24x - x^4 + 5):(x + 3)$
4) $(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16):(x + 4)$

EJERCICIO 46:

- **Calculen directamente el resto de las siguientes divisiones.**

1) $(5x^2 - 2x + 4):(x + 3)$
2) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5):(x - 2)$
3) $(2x^3 - 4x^2 - 3):(x - 1)$
4) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right):(x + 2)$

POTENCIACIÓN DE POLINOMIOS

Potencia de un monomio

Para resolver la potencia de un monomio, se debe aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y la potencia de otra potencia.

$(a.b)^n = a^n.b^n$
$(x^n)^m = x^{n.m}$

a) $(2x)^4 = 2^4.x^4 = 16x^4$ **b)** $(-3x^3)^2 = (-3)^2.(x^3)^2 = 9x^6$

Cuadrado de un binomio

Al elevar al cuadrado un binomio se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto.**

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$

$$\boxed{\underbrace{(a + b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}}$$

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2.3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Cubo de un binomio

Al elevar al cubo un binomio se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto**.

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2.(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

$(a + b)^3 = a^2.a + a^2.b + 2aba + 2abb + b^2.a + b^2.b = a^3 + a^2.b + 2a^2.b + 2ab^2 + b^2.a + b^3$

$$\boxed{\underbrace{(a + b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2.b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}}$$

a) $(x + 4)^3 = x^3 + 3.4x^2 + 3.4^2x + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

b) $(2x - 3)^3 = (2x)^3 + 3(-3)(2x)^2 + 3.2x(-3)^2 + (-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

EJERCICIO 47:

- **Resuelvan las siguientes potencias.**

1) $(4x^2)^3 =$

3) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right)^5 =$

2) $(-3x^4)^2 =$

4) $\left(-\frac{2}{3}x^6\right)^3 =$

EJERCICIO 48:

- **Desarrollen los siguientes cuadrados.**

1) $(x + 5)^2 =$

2) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 =$

3) $(x^5 - 1)^2 =$

EJERCICIO 49:

- **Desarrollen los siguientes cubos.**

1) $(4 + x)^3 =$

2) $\left(5x + \frac{1}{2}\right)^3 =$

3) $(x^5 - 1)^3 =$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

FACTOR COMÚN

Factorizar *un polinomio, de **n** cantidad de términos, es expresarlo como un **producto** de polinomios **primos**.*

Factor común

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$a(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo.

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x.$

$P(x) = 2x.x - 2.2x \longrightarrow$ 2x es el factor común de los dos términos.

$P(x) = 2x(x - 2) \longrightarrow$ Expresión factoreada de P(x) a través del factor común.

$\frac{2x^2}{2x}$ $\frac{4x}{2x}$ $\longrightarrow$ Dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada término por 2x.

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

Para normalizar un polinomio, se debe sacar como factor común el coeficiente principal.

$$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = 2\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$$ Polinomio normalizado

EJERCICIO 50: Factorizar aplicando factor común

$\boldsymbol{a)\ 24.x^5 + 18.x^4 - 30.x^2 =}$

$\boldsymbol{b)15.x^4 - 21.x^3 - 9.x =}$

SUMA Y RESTA DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Para un polinomio de la forma $\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n}$ existen cuatro posibilidades:

$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n} \wedge$ **n es par**

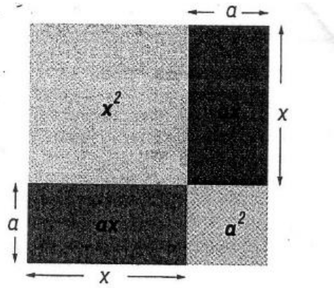
$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n} \wedge$ **n es impar**

EJERCICIO 51: Resolver aplicando la diferencia de cuadrados

$a)x^2 - 1 =$ $b)x^2 - 16 =$ $c)4.x^2 - 25 =$ $d)x^4 - 9 =$

TRINOMIO CUADRADO Y CUATRINOMIO CUBO PERFECTOS

Trinomio cuadrado perfecto



$$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2 \longrightarrow$$ **Cuadrado de un binomio:** expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto.

Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del cuadrado del binomio.

$$\boxed{\mathbf{x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^2}}$$

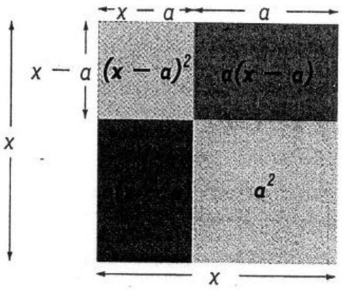
$$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$$
$$= x^2 + 2ax + a^2$$

a) $P(x) = x^2 + 6x + 9 = \underset{\downarrow\, x}{x^2} + 2.3x + \underset{\downarrow\, 3}{3^2} = (x + 3)^2$

b) $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = \underset{\downarrow\, x}{x^2} - 2.2x + \underset{\downarrow\, 2}{2^2} = (x - 2)^2$

c) $R(x) = x^2 + 8x + 9 = \underset{\downarrow\, x}{x^2} + 2.4x + \underset{\downarrow\, 3}{3^2}$ $\quad 3 \neq 4$

No es trinomio cuadrado perfecto



$$(x - a)^2 = x^2 - a(x - a) - a(x - a) - a^2$$
$$= x^2 - ax + a^2 - ax + a^2 - a^2$$
$$= x^2 - 2ax + a^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2.x + a^3 = (x + a)^3 \longrightarrow$$ **Cubo de un binomio:** expresión factorizada del cuatrinomio cubo perfecto.

Cuatrinomio cubo perfecto: es el desarrollo del cubo del binomio.

$$x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2.x \pm a^3 = (x \pm a)(x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^3 \longrightarrow$$ **Expresión factorizada**

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$$
$$= (x^2 + 2ax + a^2)(x + a)$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a)$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)(x - a)$$
$$= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

a) $T(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \underset{\downarrow\, x}{x^3} + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + \underset{\downarrow\, 2}{2^3} = (x + 2)^3$

b) $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \underset{\downarrow\, x}{x^3} - 3.1x^2 + 3.1^2.x - \underset{\downarrow\, 1}{1^3} = (x - 1)^3$

EJERCICIO 52: **Expresen cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.**

1) $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ **2)** $T(x) = x^6 + 4x^3 + 4$

EJERCICIO 53: **Expresen cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.**

1) $D(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ **2)** $P(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

TEOREMA DE GAUSS

*Si el polinomio $P(x)$, de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces **p** es divisor del término independiente y **q** lo es del coeficiente principal.*

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + d$:

- se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- se buscan las posibles raíces: $\frac{p}{q}$ $p \rightarrow$ Divisores del término independiente. $q \rightarrow$ Divisores del coeficiente principal.

Todo polinomio $P(x)$, de grado n, de n raíces reales, puede factorizarse como:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}}$$

Siendo **a** el coeficiente principal de $P(x)$ y $\mathbf{x_1; x_2; \ldots; x_n}$ sus n raíces reales.

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$:

Divisores del término independiente, (-3): $\pm 1, \pm 3$

Divisores del coeficiente principal, (2): $\pm 1, \pm 2$

Posibles raíces $\frac{p}{q}$

$\mathbf{x_1} = \pm 1$; $\mathbf{x_2} = \pm \frac{1}{2}$; $\mathbf{x_3} = \pm 3$; $\mathbf{x_4} = \pm \frac{3}{2}$

Se especializa el polinomio $P(x)$ por las posibles raíces (x_n es raíz si $P(x_n) = 0$).

$P(-1) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = -1}$**, es raíz**

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_2 = -\frac{1}{2}}$**, es raíz**

$P(3) = 0 \Rightarrow \mathbf{x_3 = 3}$**, es raíz**

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow P(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

*Un polinomio $P(x)$ tiene una raíz **múltiple** si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.*

Polinomio factorizado	Raíces	Multiplicidad
$P_1(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$	$\mathbf{x_1 = -1 \wedge x_2 = -\frac{1}{2} \wedge x_3 = 3}$	Tres raíces simples
$P_2(x) = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$	$\mathbf{x_1 = x_2 = -1}$	Una raíz doble
$P_3(x) = (x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$	$\mathbf{x_1 = x_2 = x_3 = 2}$	Una raíz triple
$P_4(x) = (x + 2)^2.(x - 1)^3$	$\mathbf{x_1 = x_2 = -2 \wedge x_3 = x_4 = x_5 = 1}$	-2, raíz doble y 1, raíz triple
$P_5(x) = x^3(x + 3) = x.x.x(x + 3)$	$\mathbf{x_1 = x_2 = x_3 = 0 \wedge x_4 = -3}$	0, raíz triple y -3, raíz simple

EJERCICIO 54:

● Hallen las raíces de los siguientes polinomios y factorícenlos.

1) $P_1(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

2) $P_2(x) = -4x^3 + 7x - 3$

3) $P_3(x) = -4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2$

4) $P_4(x) = x^3 - 3x + 2$

5) $P_5(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

6) $P_6(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Para encontrar el o los valores de x para los cuales $P(x) = -16$, siendo $P(x) = x^3 - x^2 - 16x$, se debe plantear la ecuación: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x = -16}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, hay que igualarlas a cero: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0}$

Luego factorizar el polinomio resultante:

$$(x^3 - x^2) - (16x - 16) = 0$$
$$x^2.(x - 1) - 16(x - 1) = 0$$
$$(x^2 - 16)(x - 1) = 0$$
$$\mathbf{(x - 4)(x + 4)(x - 1) = 0}$$

Aplicar la ley de nulidad del producto:

Para que un producto sea cero, tendrá que serlo al menos uno de los factores. $\mathbf{a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0} \vee \mathbf{b = 0}$

$$x - 4 = 0 \ \vee \ x + 4 = 0 \ \vee \ x - 1 = 0$$
$$x = 4 \ \vee \ x = -4 \ \vee \ x = 1$$

Las raíces de $R(x) = x^3 - x^2 - 16x + 16$ son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 1$.

Para verificar las soluciones, se reemplazan los valores de x en $P(x)$:

Se debe verificar que $P(x_n) = x^3 - x^2 - 16x = -16$

$P(4) = 4^3 - 4^2 - 16.4$ $\qquad$ $P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 - 16.(-4)$ $\qquad$ $P(1) = 1^3 - 1^2 - 16.1$

$P(4) = 64 - 16 - 64$ $\qquad$ $P(-4) = -64 - 16 + 64$ $\qquad$ $P(1) = 1 - 1 - 16$

$P(4) = -16$ $\qquad$ $P(-4) = -16$ $\qquad$ $P(1) = -16$

Por lo tanto: $\mathbf{S = \{-4;4;1\}}$

Hallar x, tal que $P(x) = -1$.

a) $P(x) = x^3 + x^2 + x$

$$x^3 + x^2 + x = -1$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$
$$(x^3 + x^2) + (x + 1) = 0$$
$$x^2(x + 1) + (x + 1) = 0$$
$$(x^2 + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x + 1 = 0$$
$$\varnothing \qquad\qquad x = -1$$

Verificación:

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)$

$P(-1) = -1 + 1 - 1 \Rightarrow P(-1) = -1$

La solución: $S = \{-1\}$

b) $P(x) = x^3 + x + 1$

$$x^3 + x + 1 = -1$$
$$x^3 + x + 1 + 1 = 0$$
$$x^3 + x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x^2 - x + 2)(x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$S = \{-1\}$

EJERCICIO 55: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

1) $x^3 - x - 1 = -1$ $\qquad$ **3)** $x^3 - 3x^2 + 2x + 10 = 16$

2) $2x^4 - 2x = 0$ $\qquad$ **4)** $2x^4 - x^3 - 22x^2 = 8x^2 + 3x^3$

UNIDAD N°5: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

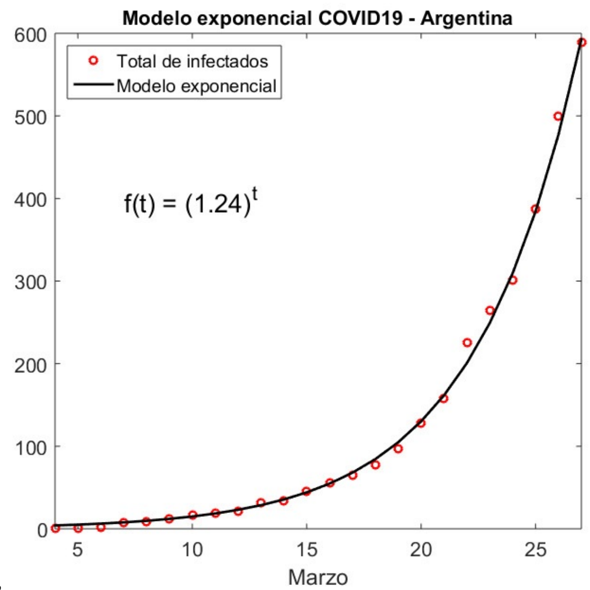
FUNCIÓN EXPONENCIAL

COVID-19 y las matemáticas: En tiempos de pandemia se pudo observar que el crecimiento de contagio de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-CoV-2, se comportaba de una manera que puede ser modelada muy bien con funciones exponenciales. Por ello, se hablaba que el crecimiento de contagios era exponencial. Y dado que estamos hablando de funciones que crecen de una manera pavorosa en poco tiempo se observó que el resultado fue grave. Se publicaron en distintos medios muchos gráficos que ilustraban cómo fue creciendo el número de casos de contagio comprobados, uno de ellos es el gráfico de la función **$f(t) = 1{,}24^t$** que muestra como creció el número de infectados en función del tiempo (en días) que transcurrió en el mes de marzo de 2019.

Ejercicio 56: a) Confeccionar una tabla como la que se muestra a continuación, donde asignamos valores a "t" y calculamos la cantidad de infectados usando la fórmula.

Tiempo (t) en días	Total, de infectados
0	
5	
10	
15	
20	
25	

b) Representar los datos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos. (Nota: En el eje "x" o eje horizontal representamos el tiempo, en días, y en el eje vertical o eje "y" representamos la cantidad de infectados.



La función **$f(t) = 1{,}24^t$** recibe el nombre de función exponencial. En general:

> La función exponencial es una función de la forma $f(x) = k.\ a^x$, con a>0, a≠0, a≠1 y k≠0

❖ **Crecimiento y decrecimiento exponencial**

EJERCICIO 57: **a)** Dada la función $\mathbf{f(x)= 2^x}$ (donde k=1 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (donde k=1 y 0<a<.1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.
d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0):
> - Si k=1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;1)
> - Cuando las bases de las funciones exponenciales son inversas (como 2 y ½) sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "y"

❖ **Variaciones de la función exponencial**

EJECICIO N°58: a) Dada la función $\mathbf{f(x)=3.\ 2^x}$ (donde k>0 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $\mathbf{f(x)= (-3).\ 2^x}$ (donde k<0 y <a>.1) .Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.
d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0) :
> - Si k≠1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;k)
> - Cuando las bases de la funciones exponenciales son iguales y coeficientes (k) opuestos, sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "x"

EJERCICIO N°59:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ ***y*** $\boldsymbol{g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

EJERCICIO N°60:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2\,.\,3^x \quad y \quad g(x) = -2\,.\,3^x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

- **Desplazamientos de la función exponencial**

EJERCICIO N°61: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$, $\mathbf{f_2(x)= 2^x +3}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^x -1}$.

Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y responder:

a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones $\mathbf{f_2(x)= 2^x +3}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^x -1}$?

b) ¿De qué depende este desplazamiento?

c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°62: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$, $\mathbf{f_2(x)= 2^{x+1}}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^{x-3}}$.

Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y responder:

a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones?

b) ¿De qué depende este desplazamiento?

c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°63:

a)Graficar la función $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y a partir de ella trasladar la función $\mathbf{f_2(x)= 2^{x+2} -1}$

b)Graficar la función $\mathbf{f_1(x)= 3^x}$ y a partir de ella trasladar la función $\mathbf{f_2(x)= 3^{x-1} +2}$

c)Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

EJERCICIO N°64: a) Dada la función $\mathbf{f(x)= 2^x}$. Completar su tabla de valores:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)Para obtener la tabla de la función inversa intercambiamos el dominio y la imagen:

x	y
$\longleftrightarrow$	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

La función inversa obtenida es la FUNCIÓN LOGARÍTMICA de la forma: $y = \log_2 x$

Para tener en cuenta:
Las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base son funciones inversas, por lo tanto, sus representaciones gráficas son simétricas respecto de la recta y= x

Aprendemos el concepto de logaritmo:

<u>CONCEPTO DE LOGARÍTMO:</u>
Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva distinto de 1, al exponente al que se debe elevar la base “b” para obtener dicho número.

$$\log_b N = a \quad pues \quad b^a = N$$

Donde “a” no puede valer 1 y debe ser positivo. N debe ser positivo, “b” es la base, “N” recibe el nombre de argumento y “a” es el logaritmo.

Ejemplos:

- Para calcular $\log_2 8$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 8. Luego $\log_2 8 = 3 \ pues \ 2^3 = 8.$
- Para calcular $\log_{\frac{1}{2}} 32$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 32. Luego $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \ pues \ \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32.$

<u>EJERCICIO N°65:</u> Calcular los siguientes logaritmos y justificar tu respuesta

$a)\ \log_9 1 =$ $\qquad d)\ \log_{\frac{1}{3}} 3 =$

$b)\ \log_5 25 =$

$c)\ \log_7 7 =$ $\qquad e)\ \log_2 \frac{1}{2} =$

<u>Nota:</u> Existen logaritmos especiales como el logaritmo decimal **“log”** cuya base es 10 y el logaritmo natural o neperiano **“ln”** cuya base es el número e=2,7182818285…

$f)\ \log 100 =$ $\qquad g)\ \ln 5 =$ $\qquad h)\ \log 4 =$

<u>EJERCICIO N°66:</u> a) Dada la función $f(x) = \log_3 x$. Completar su tabla de valores:

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos
c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

<u>EJERCICIO N°67:</u> a) Dada la función $g(x) = \log_5 x$. Completar su tabla de valores:

x	y
1	
5	
25	
$\frac{1}{5}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos
c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

FUNCIÓN LOGARÍTMICA:
Es la función de la forma:

$$f(x) = \log_b x$$

donde “b” no puede ser 1 ni negativa y x debe ser mayor que cero.

❖ Crecimiento y decrecimiento la función logarítmica

EJERCICIO N°68:

a)Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$ (b>1). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

b)Dada la función $\boldsymbol{g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x}$ (donde b<1 y b>0). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un sistema de ejes cartesianos.

d)Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

Dada la función logarítmica:

$$f(x) = \log_b x$$ (con b>0 y distinta de 1)

- La función corta al eje "x" en el punto (1;0), su raíz
- Cuando las bases de las funciones logarítmicas son iguales inversas, sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "x"

Practicamos…

EJERCICIO N°69:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_3 x \quad y \quad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

EJERCICIO N°70:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_5 x \quad y \quad g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

❖ **Variaciones de la función logarítmica**

EJERCICIO N°71: a) Para cada función completar la tabla de valores

$f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

$g(x) = \log_2(x+3)$

x	y
1	
5	
-1	
-2	
-3	

$h(x) = \log_2(x-3)$

x	y
4	
5	
$\frac{7}{2}$	
7	
3	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.
c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $f(x) = \log_2 x$?

EJERCICIO N°72: a) Para cada función completar la tabla de valores

$f(x) = \log_3 x$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

$g(x) = \log_3 x \quad -2$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

$h(x) = \log_3 x \quad +2$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.
c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $f(x) = \log_3 x$?

EJERCICIO N°73:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $h(x) = \log_4(x+1)$ y $g\,(x) = \log_4(x-2)$ a partir de la función $f(x) = \log_4 x$.

b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°74:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $h(x) = \log_5 x + 5$ y $g\,(x) = \log_4 x - 10$ a partir de la función $f(x) = \log_5 x$.

b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°75:

1) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función
$$y = \log_3(x+1) - 2$$

2) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función
$$y = \log_3(x-2) + 1$$

3) Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita figura como exponente.

Ejemplo:

a) $2^x = 16$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$ e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

b) $3^{x-1} = 27$ d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ f) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES

PRIMER CASO: Se transforma la ecuación dad en una igualdad de la misma base

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ igualando los exponentes

Verificación: $2^4 = 16$

b) $3^{x-1} = 27$

$3^{x-1} = 3^3$ igualando los exponentes

$x - 1 = 3$

$x = 3 + 1 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Verificación: $3^{4-1} = 27$

$3^3 = 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

$\left[(2)^{-1}\right]^x = 2^{\frac{3}{2}}$

$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$-x = \frac{3}{2}$ igualando los exponentes

$\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Verificación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$\sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

$\sqrt{8} = \sqrt{8}$

SEGUNDO CASO: Las ecuaciones exigen transformaciones basadas en propiedades ya vistas

d)

$3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ aplicamos propiedades de la potencia de igual base $\left(a^{m+n} = a^m \cdot a^n\right)$

$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$

$3^x \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90$ extraemos factor común 3^x

$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$

$3^x = 90 : \frac{10}{3}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$ igualamos exponentes

$\boxed{x = 3}$

Verificación: $3^{3-1} + 3^{3+1} = 90$

$3^2 + 3^4 = 90$

$9 + 81 = 90$

$90 = 90$

e)

$$3\cdot 4^{x+1}=96 \quad \text{transponemos el 3}$$

$$4^{x+1}=96:3$$

$$4^{x+1}=32$$

$$\left(2^2\right)^{x+1}=2^5$$

$$2^{2x+2}=2^5 \quad \text{igualamos exponentes}$$

$$2x+2=5$$

$$2x=5-2$$

$$\boxed{x=\frac{3}{2}}$$

Verificación: $3\cdot 4^{\frac{3}{2}+1}=96$

$$3\cdot 4^{\frac{5}{2}}=96$$

$$3\cdot 2^5=96$$

$$3\cdot 32=96$$

$$96=96$$

TERCER CASO: A través de una ecuación de segundo grado

f)

$$2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0 \quad \text{aplicamos propiedad de la potencia}$$

$$\left(2^x\right)^2-9\cdot 2^x+8=0 \quad \text{reemplazamos } 2^x=z$$

$$(z)^2-9\cdot z+8=0 \quad \text{resolvemos la ecuación de segundo grado}$$

$$z_1=8$$

$$z_2=1$$

como $2^x=z \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}2^x=8\\ 2^x=2^3\end{array}} \Rightarrow \boxed{x=3}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}2^x=1\\ 2^x=2^0\end{array}} \Rightarrow \boxed{x=0}$

Verificación: si $x=3$

$$2^{2\cdot 3}-9\cdot 2^3+8=0$$

$$2^6-9\cdot 2^3+8=0$$

$$64-72+8=0$$

$$0=0$$

si $x=0$

$$2^{2\cdot 0}-9\cdot 2^0+8=0$$

$$2^0-9\cdot 2^0+8=0$$

$$1-9+8=0$$

$$0=0$$

EJERCICIO N°63:

1. Transformen cada una de las siguientes expresiones en una potencia de igual base:

a) $3^x\cdot 3^{x+1}=$

b) $2^{-x}\cdot 4=$

c) $25^{x-1}:5^{2x+4}=$

d) $8^x\cdot 4^{2-x}\cdot 2^{2x+2}=$

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales y verifiquen:

a) $5^x=625$

b) $3^{x-1}=81$

c) $3^{x+3}=\frac{1}{27}$

d) $2^{x^2-3}=\frac{1}{4}$

e) $6^{2x-2}=1$

f) $4^{\frac{x-2}{x+3}}=4^{\frac{x}{x+2}}$

g) $4^{x+1}+4^{x-1}=17$

h) $3^{x-5}=27^{1-x}$

i) $2^{4x-x^2}=8$

j) $2^{x+2}+2^{x-1}=18$

k) $3^x-3^{x-2}+3^{x+2}=89$

l) $4^x-5\cdot 2^x+4=0$

m) $4^{x+1}+2^{x+3}=320$

Concepto de logaritmo: Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva y distinto de 1, al exponente que se debe elevar la base "a" para obtener dicho número.

$$\boxed{\log_{\underset{\text{base}}{a}} \underset{\text{argumento}}{N} = \underset{\text{logaritmo}}{C} \Rightarrow a^C = N \begin{cases} 1 \neq a > 0 \\ N > 0 \end{cases}}$$

Para tener en cuenta:

La potenciación tiene dos operaciones inversas:

$2^4 = 16 \longrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$ se obtiene la base

$\searrow \log_2 16 = 4$ se obtiene el exponente

Ejemplo: ✓ $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

✓ $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

EJERCICIO N°76: Calcular siempre que sea posible

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_5 25 =$

c) $\log_7 7 =$

d) $\log_2 0 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

g) $\log_2 \frac{1}{2} =$

h) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

i) $\log_2 \sqrt{8} =$

j) $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

k) $\log_9 \frac{1}{3} =$

Logaritmos decimales y naturales: Algunos logaritmos se pueden obtener directamente usando la calculadora científica. Ellos son:

- los de base 10, llamados **logaritmos decimales**. Se simboliza $\boxed{log}$. Se omite escribir la base 10.
- Los de base e ("e"= irracional 2,718281…), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos** $\boxed{ln}$.

EJERCICIO N°77: Encontrar los siguientes logaritmos utilizando la calculadora

a) $\log\ 202 =$

b) $\log\ 20 =$

c) $\log\ 2{,}02 =$

d) $\log\ 0{,}242 =$

e) $\ln\ 7 =$

f) $\ln\ 25 =$

g) $\ln\ 250 =$

h) $\ln\ 0{,}25 =$

También es posible obtener con la calculadora los siguientes logaritmos:

$$\log_5 32 = \frac{\log\ 32}{\log\ 5} = \frac{1{,}505}{0{,}699} = 2{,}153$$

$$\log_5 32 = \frac{\ln\ 32}{\ln\ 5} = \frac{3{,}465}{1{,}61} = 2{,}153$$

Este procedimiento se llama **cambio de base**, lo que nos permite utilizar la calculadora científica en todos los casos.

Simbólicamente: $\log_a N = \dfrac{\log\ N}{\log\ a}$

$$\log_a N = \frac{\ln\ N}{\ln\ a}$$

EJERCICIO N°78: Calcular aplicando logaritmo decimal

a) $\log_4 100 =$ b) $\log_3 10 =$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 7 =$ d) $\log_5 \frac{1}{8} =$

EJERCICIO N°79: Calcular aplicando logaritmo neperiano

a) $\log_2 165 =$ b) $\log_5 72 =$ c) $\log_3 8{,}21 =$ d) $\log_{15} 0{,}25 =$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1) Logarito de un producto: Es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 (4 \cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16$$

$$\log_2 64 = 2 + 4$$

$$6 = 6$$

2) Logarito de una división: Es igual a logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_5 (25 : 5) = \log_5 25 - \log_5 5$$

$$\log_5 5 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

3) Logarito de una potencia: Es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a P^n = n \cdot \log_a P$$

Ejemplo:

$$\log_2 8^3 = \log_2 (8 \cdot 8 \cdot 8)$$

$$\log_2 512 = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8$$

$$9 = 3 \cdot \log_2 8$$

$$9 = 3.3$$

$$9 = 9$$

4) Logarito de una raíz: Es igual al logaritmo del argumento dividido en el indice. Esto es…

$$\log_a \sqrt[n]{Q} = \log_a Q^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_2 8$$

$$1 = \frac{1}{3} \cdot 3$$

$$1 = 1$$

EJERCICIO N°80: Resolver aplicando propiedades

a) $log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$

b) $log_2\left(\frac{1}{32} : 64\right) =$

c) $log_4\left(\frac{1}{64}\right)^3 =$

d) $log_5 \sqrt[4]{125} =$

e) $log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$

f) $log_3 27^4 =$

g) $log_2\left(16 : \frac{1}{2}\right) =$

h) $log_3(9 \cdot 81) =$

EJERCICIO N°81: Expresar como un solo logaritmo y resolver

a) $2 \cdot log_5 \frac{1}{10} - 4 \cdot log_5 1 + log_5 16 =$

b) $log_6 3 + \frac{log_6 27}{3} + log_6 4 =$

c) $\left[log_4 \frac{1}{32} - log_4 2\right]^2 =$

d) $3 \cdot log_5 5 + log_5 \frac{1}{5} - \frac{log_5 \frac{1}{125}}{3} =$

EJERCICIO N°82: Calcular usando la definición

a) $log_3 27 =$

b) $log_5 125 =$

c) $log\ 10.000 =$

d) $log\ 0,01 =$

e) $log_{\frac{1}{2}} 64 =$

f) $log_2 0,5 =$

g) $log_3 \sqrt[5]{81} =$

h) $log_3 \sqrt{27} =$

i) $log_{\frac{1}{4}} 16 =$

j) $log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} =$

k) $log_2 0,25 =$

l) $log_{12} 12 =$

m) $log_5 1 =$

n) $log_5 \frac{1}{5} =$

o) $log_{\sqrt{3}} 9 =$

EJERCICIO N°83: Calcular el valor de "x"

a) $log_2 x = 5$

b) $\frac{1}{2} = log_4 x$

c) $log_3(x+1) = 2$

d) $log_5 x = -3$

e) $log_2 x = \frac{1}{7}$

f) $log\ x = -2$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS:

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita esta en el argumento o la base del logaritmo. Ej::

a) $log_4(x+12) = 2$

b) $log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3$

c) $log_2(x-1) + log_2 3 - log_2(x+3)$

d) $log_4 x - log_2 3 = log_2 5$

e) $3^x = 10$

f) $3 \cdot log_2^2 x - 6 \cdot log_2 x = -3$

Resolución de ecuaciones logarítmicas

1º caso: Aplicando la definición de logaritmo:

a)

$$log_4(x+12) = 2$$
$$4^2 = x + 12$$
$$16 = x + 12$$
$$16 - 12 = x$$
$$\boxed{4 = x}$$

Verificación:

$$log_4(4+12) = 2$$
$$log_4 16 = 2$$
$$2 = 2$$

2° caso: Aplicando propiedades de los logaritmos:

b) $log_2(x+1)+log_2(x-1)=3$	$\rightarrow$ aplicando propiedades de los logaritmos	Verificación: $log_2(3+1)+log_2(3-1)=3$
$log_2(x+1)\cdot(x-1)=3$		$log_2(4)+log_2(2)=3$
$log_2\left(x^2-1\right)=3$	$\rightarrow$ definición de logaritmo	$2+1=3$
$x^2-1=2^3$		$3=3$
$x^2=8+1$		$x=-3$ *no verifica*
$x=\sqrt{9}$		
$\boxed{x=\pm 3}$		

3° caso: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

c) $log_2(x-1)+log_2 3=log_2(x+3)$	$\rightarrow$ propiedades del producto	Verificación: $log_2(3-1)+log_2 3=log_2(3+3)$
$log_2(x-1)\cdot 3=log_2(x+3)$	$\rightarrow$ logaritmos de igual base tienen igual argumento	$log_2(2)+log_2 3=log_2(6)$
$(x-1)\cdot 3=x+3$		$log_2 2\cdot 3=log_2 6$
$3\cdot x-3=x+3$		$log_2 6=log_2 6$
$3\cdot x-x=3+3$		
$2\cdot x=6$		
$x=6:2$		
$\boxed{x=3}$		

4° caso: Aplicando propiedades y cambios de base:

d) $log_4 x-log_2 3=log_2 5$ ↓ cambio de base		Verificación: $log_4 225-log_2 3=log_2 5$
$\dfrac{log_2 x}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$		$\dfrac{log_2 225}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$
$\dfrac{log_2 x}{2}-log_2 3=log_2 5$	$\rightarrow$ aplicando propiedad de la raíz y del cociente	$log_2\left(\sqrt{225}:3\right)=log_2 5$
$log_2\left(\sqrt{x}:3\right)=log_2 5$		$\left(\sqrt{225}:3\right)=5$
$\left(\sqrt{x}:3\right)=5$		$\sqrt{225}=15$
$\sqrt{x}=15$		$15=15$
$x=15^2$		
$x=225$		

5° caso: Para resolver ecuaciones exponenciales:

$$3^x = 10$$ → aplicando logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad

$$\log\ 3^x = \log\ 10$$

$$x \cdot \log\ 3 = \log\ 10$$

$$x = \frac{\log\ 10}{\log\ 3}$$

$$x = \frac{1}{0{,}477}$$

$$\boxed{x = 2{,}096}$$

Verificación:

$$3^{2{,}096} \cong 10$$

6° caso: A través de una ecuación de segundo grado:

$$3 \cdot \log_2{}^2 x - 6 \cdot \log_2 x = -3$$

si reemplazo $\log_2 x = z$

$$3 \cdot z^2 - 6 \cdot z + 3 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado → $z = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$z = \frac{6 \pm 0}{6}$$

$$\boxed{z = 1}$$

$$z = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1$$

$$2^1 = x$$

$$\boxed{2 = X}$$

Verificación:

$$3 \cdot \log_2{}^2 2 - 6 \cdot \log_2 2 = -3$$

$$3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

$$3 - 6 = -3$$

$$-3 = -3$$

EJERCICIO N°84: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_5(x-2) = -1$

b) $\log\ (x^2 - 3) = 0$

c) $\log_{(x+1)} 3 = 1$

d) $\log_2 x + \log_2 3 = 4$

e) $2 \cdot \log_{\frac{1}{8}}(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-2) = 4$

f) $3 \cdot \log_4(x+2) - \log_4(x+2) = 1$

g) $\log_2(x-1) + 1 = \log_2(x-2) + \log_2(7-x)$

h) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

i) $\log_2 x + \log_8 x = \dfrac{1}{2}$

j) $0{,}3^x = 1{,}5$

k) $3 \cdot 2^x = 10$

l) $(1{,}12)^x = 3$

m) $(\log_4 x)^2 + 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

n) $2 \cdot \log\ {}^2 x + 5 \cdot \log\ x = 3$

EJERCICIOS DE REPASO

EJERCICIO A: Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ 3^{x+3} = 9$ $\quad b) 25^{x-1} = 125$ $\quad c) 3^{2.x} = \frac{1}{81}$

$d) 8^{2.x-1} = 128$ $\quad e)\ 4^{x+1} = 32$ $\quad f) 5^{(x-1).(x+2)} = 1$ $\quad g) 2^{4.x} = 0{,}5^{4.x+2}$

EJERCICIO B: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\boxed{\log_2 x = \log_2 16}$ $\quad$ b) $\boxed{\log_3 x - \log_3(x-2) = 2}$

EJERCICIO C: Resolver

a) $\boxed{\dfrac{\left(\log_5 \frac{1}{25}\right)^2}{\log_3 81} - \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 8}}$ $\quad$ b) $\boxed{\log_a (x \cdot y)^3}$

EJERCICIO D:

El valor de "x" en las siguientes ecuaciones es:

$\boxed{\log_{x+2} 3 = 1}$

a) $x = 0$ $\quad$ b) $x = \hat{1}$ $\quad$ c) $x = -1$ $\quad$ d) $x = -2$

$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \log_2(1+7x) = 2}$

a) $x = \frac{3}{7}$ $\quad$ b) $x = 1$ $\quad$ c) $x = -9$ $\quad$ d) $x = 9$

$\boxed{2 \cdot \log_{\sqrt{3}}(5-x) = 4}$

a) $x = -4$ $\quad$ b) $x = 20$ $\quad$ c) $x = 2$ $\quad$ d) $x = -76$

$\boxed{\log_3(x+5) - \log_3(x-1) = 1}$

a) $x = 4$ $\quad$ b) $x = \frac{1}{4}$ $\quad$ c) $x = -\frac{7}{2}$ $\quad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_x 2 + \log_x 6 = 2 + \log_x 3}$

a) $x = 6$ $\quad$ b) $x = 4$ $\quad$ c) $x = -4$ $\quad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8}$

a) $x = \pm 1$ $\quad$ b) $x = \pm 2$ $\quad$ c) $x = \pm 3$ $\quad$ d) $x = \pm 4$

$\boxed{2 \log_3 x - \log_3(x+1) - \log_3 x = 2}$

a) $x_1 = -\frac{9}{8}$, $x_2 = 0$ $\quad$ b) $x_1 = -\frac{8}{9}$, $x_2 = 0$ $\quad$ c) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ $\quad$ d) $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = 0$