COLEGIO MODELO

CUADERNILLO DE MATEMÁTICA

5 “A”

PROF.: RIVEROS E. CAROLINA

2026

COLEGIO MODELO
ESPACIO CURRICULAR: MATEMÁTICA-CICLO ORIENTADO- 5°A
PROFESORA: RIVEROS CAROLINA

PROGRAMA DE EXAMEN

UNIDAD N° 1. FUNCIÓN CUADRÁTICA.

Ecuaciones de segundo grado: raíces. Resolución de ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.

Función cuadrática: raíces, ordenada al origen, vértice, eje de simetría. Forma polinómica, canónica y factorizada. Gráfica de la parábola. Análisis del desplazamiento de la parábola matriz. Posiciones relativas de la parábola.

UNIDAD N°2: POLINOMIOS

Expresiones algebraicas enteras. Polinomios. Características. Clasificación. Valor numérico. Operaciones con polinomios: suma, resta. Multiplicación. Productos notables. División. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Teorema de Gauss. Factorización de polinomios: factor común y por grupos, trinomio cuadrado perfecto, cuatrinomio cubo perfecto, diferencia de cuadrados. Expresiones algebraicas fraccionarias. Simplificación

UNIDAD Nº 3: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Función exponencial: fórmula; condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamiento; asíntota, ordenada al origen. Función Logarítmica: fórmula condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamientos; asíntotas. Propiedades de logaritmo. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

CONTRATO PEDAGÓGICO

Espacio Curricular: MATEMATICA
Ciclo lectivo: 2026

Se deja constancia que el presente sirve para que el/la alumno/a, los padres y la profesora conozcan **las pautas de trabajo y los requisitos que se deben cumplir en los contenidos actitudinales.**

El/ la alumno/a de ……..año,……………………………, se compromete a cumplir las siguientes pautas de trabajo;

a) El horario de entrada al curso y salida debe ser respetado. El profesor sancionará al no cumplimiento dependiendo de la reiteración de la actitud.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
b) En caso de tener un celular u otro aparato electrónico será apagado o silenciado, ya que no pueden ser utilizados en la hora de clases, salvo que el docente lo establezca para una actividad Tampoco se permitirá el uso de auriculares durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia su actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
c) Se dirigirá con respeto hacia el profesor y hacia sus compañeros en todo momento; ser amigable y solidario.
d) El alumno no puede recibir llamadas de teléfono durante la clase, en caso de urgencia u otro caso llamar al teléfono particular del colegio: 4203963.
e) No salir del curso sin la autorización del profesor. Procurará ir al baño en los recreos, cómo también el llenado de botellas de agua de lo contrario el profesor evaluará la situación para permitir la salida.
f) Escuchar al profesor y a los compañeros, mantener una actitud de respeto y atención, levantar la mano para pedir la palabra, evitar charlas y acciones perturbadoras en clase (el profesor tiene la libertad de cambiar de banco a cualquier alumno si lo considera necesario para mejorar el clima de la clase o rendimiento académico del alumno).
g) Cuidar el material de trabajo, traer los útiles y el material solicitado para la clase; cuidar sus pertenencias y las de sus compañeros, mantener el orden y la limpieza del aula.El incumplimiento se verá reflejado en la nota actitudinal, y se registrará con signos negativos.
h) Evitar acciones como beber, comer, tomar mate, jugar en clase; insultar, escupir, charlar mientras el profesor o compañero está hablando, burlarse, discriminar, agredir verbal y/o físicamente, tratarse mal, romper, rayar bancos, paredes, carpetas, libros, sillas, realizar tareas de otra asignatura sin la autorización del profesor.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
i) Participar activa y disciplinadamente. En caso de indisciplina, el alumno será sancionado de acuerdo al régimen de convivencia.
j) Colaborar desinteresadamente y respetar a sus semejantes.
k) Responsabilidad, orden y prolijidad en la presentación de todas las actividades asignadas en tiempo y forma, del cuadernillo.
l) Mantener el cuaderno y cuadernillo de actividades prolijo, ordenado, traerlo todas las clases y completo a lo largo del año.
m) El alumno no podrá tomar fotos de la pizarra,ni filmar la clase y tampoco realizar transmisión en línea sin la autorización del docente, el incumplimiento será motivo de

sanción.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.

n) El alumno no podrá desayunar, merendar o almorzar durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
o) Proceder con absoluta honestidad.
p) La inasistencia a cada evaluación anunciada debe justificarse antes o durante la hora de la evaluación al preceptor. El alumno será evaluado sin aviso inmediatamente luego de su reincorporación al Colegio.

COMPROMISO DEL PROFESOR

a) Respetar a todos los alumnos y saber escuchar sus propuestas e inquietudes.
b) Explicar todas las dudas planteadas por los alumnos (siempre que ese alumno haya prestado atención y comportado debidamente).
c) Avisar con una semana de anticipación, por lo menos, la fecha y temas de las evaluaciones escritas.
d) Entregar en un plazo no mayor a 10 días hábiles los resultados de las evaluaciones y trabajos prácticos.
e) No utilizar celular en la hora de clases, salvo en el caso de una actividad escolar.
f) Ser justo con los alumnos, tener apertura al diálogo.
g) Cumplir con el horario de clases y respetar los recreos.
h) Actuar en forma no contradictoria respeto de lo que se les prohíbe a los alumnos (comer en clase, etc.)

CRITERIOS DE EVALUACION

a) Será anulado aquel ejercicio que se encuentre resuelto en más de una ocasión usando distintos métodos y llegando a conclusiones diferentes sin indicar cuál es la correcta.
b) El uso del vocabulario científico.
c) La presentación de trabajos en tiempo, en forma ordenada y prolija, con vocabulario correcto, teniendo en cuenta su ortografía.
d) La habilidad para seleccionar y aplicar distintos procedimientos en la resolución de situaciones problemáticas.
e) Presentación y prolijidad en las evaluaciones. Se descontará 0,25 por cada ejercicio desprolijo.
f) No se podrá utilizar la calculadora del celular, solamente la calculadora en formato tradicional.
g) El alumno debe abonar al docente la fotocopia de la evaluación.

Aclaración: El profesor es la máxima autoridad responsable del curso y por lo tanto tiene el derecho y la obligación de tomar las decisiones y reajustar las normas del contrato en casos particulares.

……………………………	……………….……	……………………
Firma del alumno	Firma del padre, madre o tutor del alumno	Prof. Riveros Carolina

UNIDAD N°1: FUNCIÓN CUADRÁTICA

<u>Ejercicio N°1:</u> La siguiente tabla debe contener el resultado de adicionarle 1 a la suma entre el cuadrado y el doble de los números indicados.

a) Completar la tabla

Número	Resultado de operar
0	
1	
-1	
-2	
-3	
-4	

b) Si consideramos que cada número es "x" y que cada resultado de operar es "y", señalar cuál de las siguientes fórmulas representa la función que relaciona cada número con el resultado del cálculo anterior.

☐ $y = 2.x + 2.x + 1$ ☐ $y = x^2 + x + 1$ ☐ $y = x^2 + 2.x + 1$ ☐ $y = 2.x + x + 1$

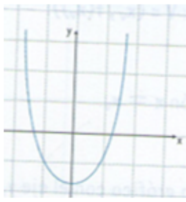
c) Teniendo en cuenta que y=f(x) , usar la fórmula elegida y completar:

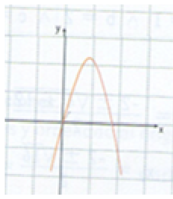
f(5)= y f(-5)=

d) En un sistema de ejes cartesianos, graficar los valores obtenidos en la tabla. Para ellos, considerar cada par de valores como las coordenadas del punto (x;y). Unir los puntos con una cuerva suave.

La fórmula y gráfica obtenida en la actividad anterior corresponden a una función cuádratica.
La foma general de la función cuadrática es la siguiente:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}$$





Donde a, b y c reciben el nombre de coeficientes.
La representación gráfica de una función cuadrática es una ***PARÁBOLA***

<u>Ejercicio N°2:</u> Para cada función construir una tabla asignando valores a "x", calculando "y" usando la fórmula de cada una. Graficar los datos obtenidos.

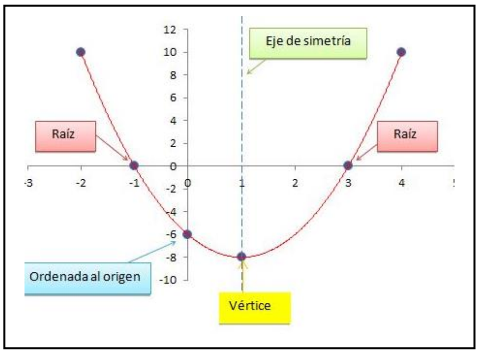
a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2.x - 3}$

b) $f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 4.x + 4$

En el gráfico de la parábola se pueden apreciar elementos importantes:

- Eje de simetría
- Vértice
- Ordenada al origen o Intersección con el eje "y"
- Raíces e intersección con el eje "x"



GRÁFICA DE LA FUNCÓN CUADRÁTICA CALCULADO SUS ELEMENTOS

Para realizar el gráfico de una parábola, $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, se deben calcular los elementos de la misma y luego representarla.

• *Raíces de la parábola.*

Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje x, vale decir que $f(x) = 0$.

$$\mathbf{x_1;x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

• *Vértice de la parábola.*

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{o} \quad x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f(x_v)$$

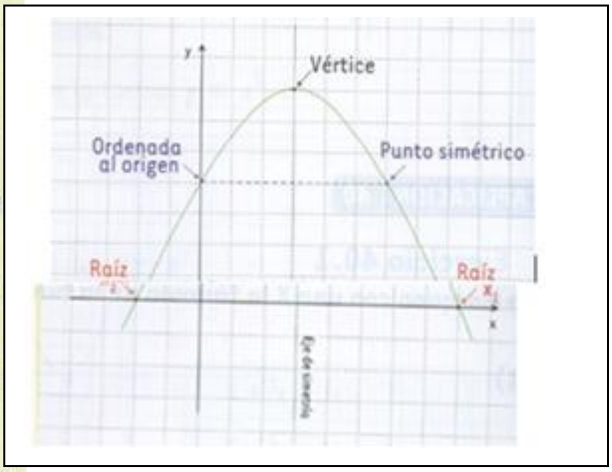
Las coordenadas del vértice son: **V = $(x_v, f(x_v))$**.

• *Eje de simetría.*

Es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$.

• *Ordenada al origen.*

Es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que $f(0) = c$.



Ejemplo:

$f(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = -3$

Raíces:

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.1(-3)}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_1;x_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

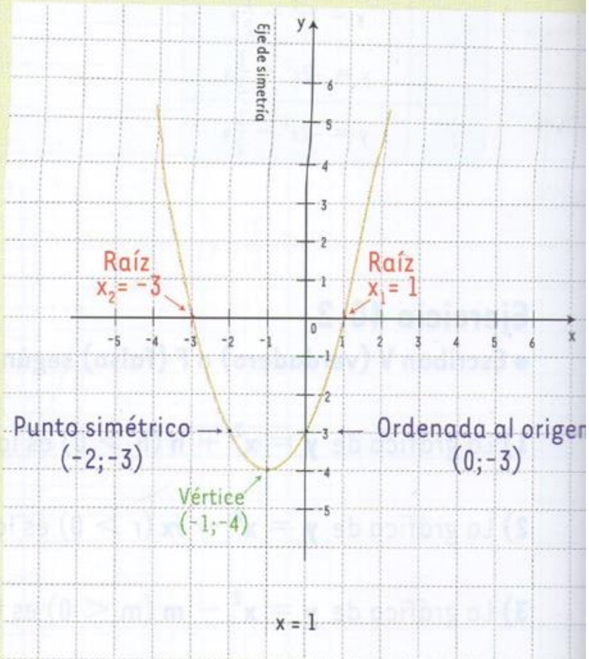
$$x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Vértice:

$$x_v = \frac{-2}{2.1} \Rightarrow x_v = -1$$

$$y_v = (-1)^2 + 2(-1) - 3 \Rightarrow y_v = -4$$

$V = (-1;-4)$



Eje de simetría: $x = -1$ **Ordenada al origen:** $(0;-3)$ **Punto simétrico:** $(-2;-3)$

Ejercicio N°3: Calcular el vértice, el eje de simetría, ordenada al origen y raíces de cada función cuadrática y graficarlas

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2.x - 3}$

b) $f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 4.x + 4$

Ejercicio N°4: Completar según la gráfica de $y = -3.x^2 + x + 2$

1) Los coeficientes de los términos de la función son: $a =$, $b =$ y $c =$

2) El vértice de la parábola es el punto

3) El eje de simetría de la parábola es la recta

4) La ordenada al origen de la función es el punto

5) Las raíces de la función son $x_1 =$ y $x_2 =$

Ejercicio N°5: Completar el siguiente cuadro

FUNCIÓN	a	b	c	Raíces	Vértice	Eje de Simetría	Ordenada al origen
$1) y = -x^2 + 2$							
$2) y = 2.x^2 +.x - 1$							
$3) y = x^2 - 4.x - 5$							

POSICIONES RELATIVAS RESPECTO DEL EJE DE LAS ABSCISAS

Las raíces de una parábola, $y = ax^2 + bx + c$, se calculan mediante la fórmula:

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

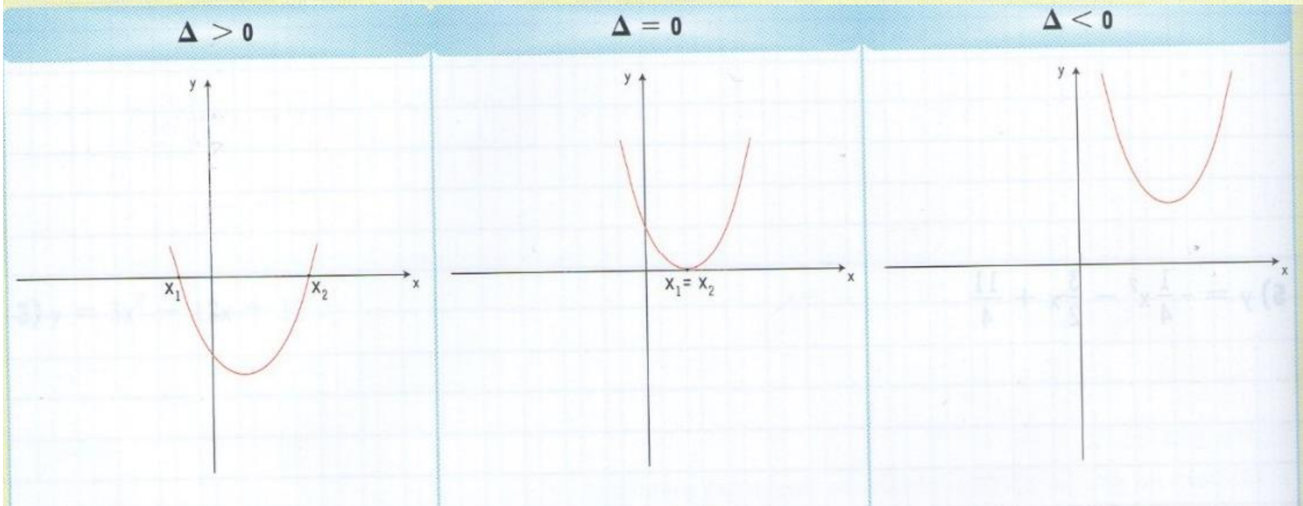
Al radicando $b^2 - 4ac$ *se lo llama* ***discriminante****, ya que el valor del mismo sirve para discriminar la naturaleza de las raíces y se lo simboliza con la letra griega* Δ *(delta).*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Raíces **reales distintas**.

Si $\Delta = 0 \Rightarrow$ Raíces **reales iguales**.

Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ Raíces **no reales**.

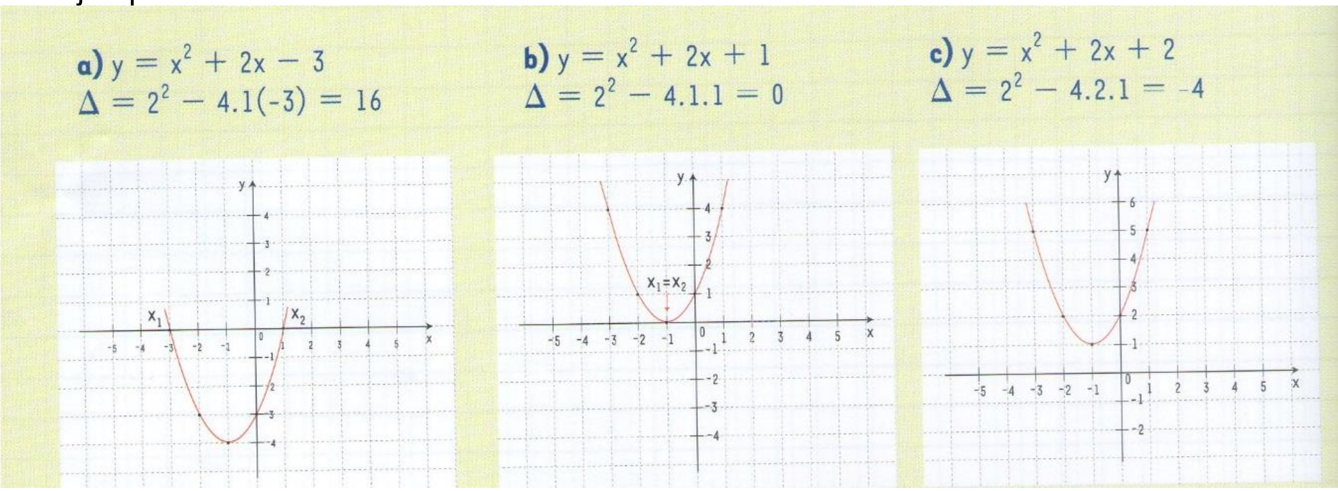


La gráfica tiene **2 puntos** de intersección con el eje x.

La gráfica tiene **1 punto** de intersección con el eje x.

La gráfica **no tiene** puntos de intersección con el eje x.

Por ejemplo:



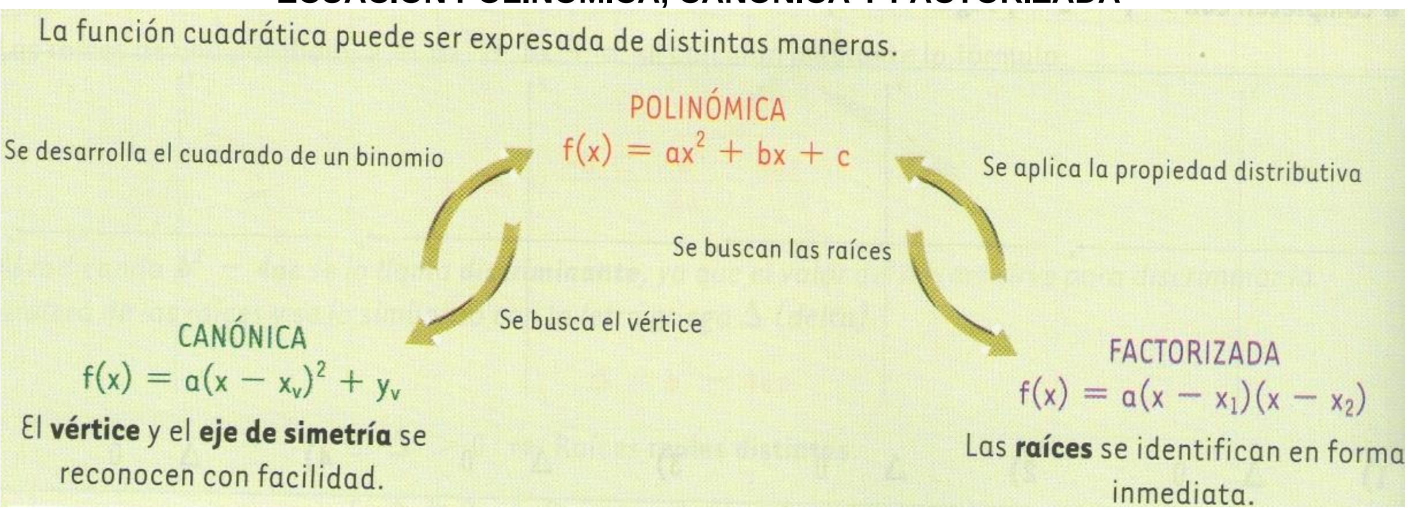
<u>Ejercicio N°6</u>: Analizar el discriminante de cada función cuadrática e indicar si tiene raíces.

$a)\ f(x) = x^2 - 6.x + 25$ $\quad b)\ f(x) = x^2 - 6.x + 9$ $\quad c)\ f(x) = -x^2 + 2.x + 3$

<u>Ejercicio N°7</u>: Calcular el valor del discriminante y marcar con una x el tipo de ráices.

	a	b	c	$\Delta = b^2 - 4.a.c$	Raíces reales iguales	Raíces reales distintas	No tiene raíces reales
1)	1	-4	-4				
2)	-1	-3	-4				
3)	2	-4	2				
4)	1	0	-3				
5)	3	6	2				

ECUACIÓN POLINÓMICA, CANÓNICA Y FACTORIZADA



EJEMPLOS:

a) Para pasar de la forma polinómica $f(x) = \frac{1}{2}.x^2 - \frac{7}{2}.x + 5$ a la forma factorizada calculamos las raíces $x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = 5$ y queda $f(x) = \frac{1}{2}.(x-2).(x-5)$

b) Para pasar de la forma factorizada $f(x) = -2.(x+1).(x+3)$ a la forma polinómica aplicamos propiedad distributiva y queda $f(x) = -2.x^2 - 8.x - 6$

c) Para pasar de la forma polinómica $f(x) = -\frac{1}{2}.x^2 - 3.x - \frac{7}{2}$ a la forma canónica calculamos el vértice $x_v = -3 \quad y \quad y_v = 1$ y queda $f(x) = -\frac{1}{2}.(x+3)^2 + 1$

d) Para pasar de la forma canónica $f(x) = (x-2)^2 + 3$ a la forma polinómica resolvemos el cuadrado de un binomioy queda $f(x) = x^2 - 4.x + 7$

Ejercicio N°8: Expresar cada una de las siguientes funciones de la forma que se pide

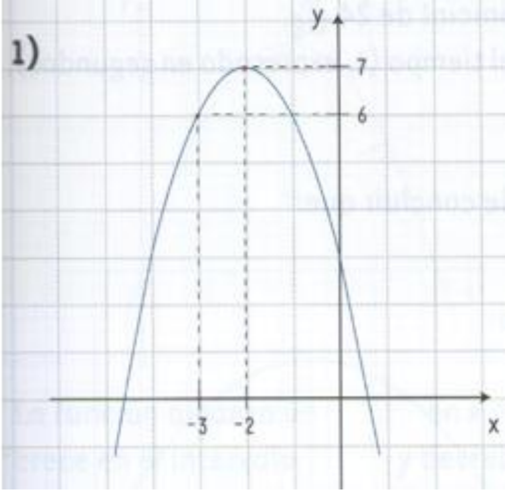
1) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, en forma **canónica** es $f(x) =$

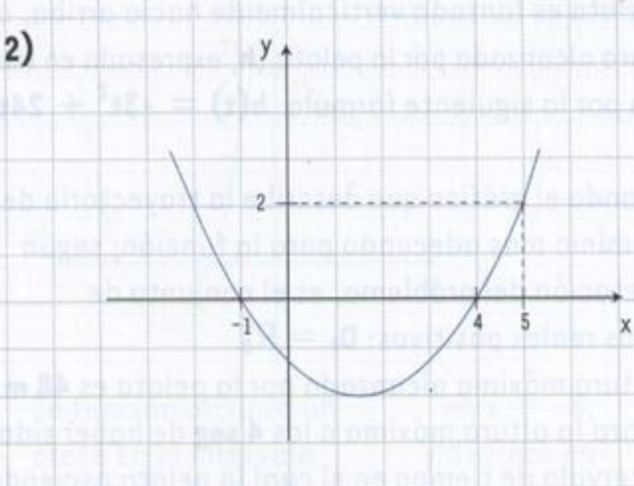
2) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-3)$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

3) $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$, en forma **polinómica** es $f(x) =$

4) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, en forma **factorizada** es $f(x) =$

Ejercicio N°9: Escribir la forma polinómica de cada una de las siguientes funciones





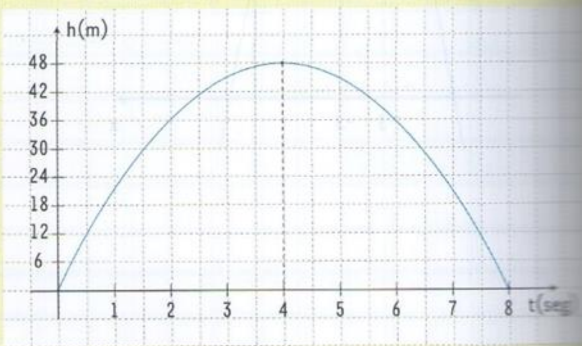
Máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de $24 \frac{m}{seg}$.

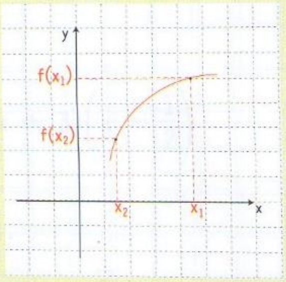
La altura alcanzada por la pelota (**h**, expresada en metros) en función del tiempo (**t**, expresado en segundos), está dada por la siguiente fórmula: $\mathbf{h(t) = -3t^2 + 24t}$.

Analizando el gráfico que describe la trayectoria de la pelota, se puede concluir que:

- El dominio más adecuado para la función, según la interpretación del problema, es el conjunto de los números reales positivos: $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
- La altura máxima alcanzada por la pelota es **48 m**.
- Alcanza la altura máxima a los **4 seg** de haber sido lanzada.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota asciende (desde que es lanzada hasta el momento que alcanza la altura máxima) es **(0;4)**; *intervalo de crecimiento*.
- El intervalo de tiempo en el cual la pelota desciende (desde que alcanza la altura máxima hasta que vuelve a tocar el suelo) es **(4;8)**; *intervalo de decrecimiento*.

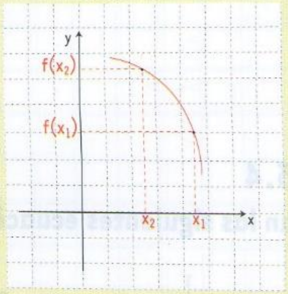


Una función continua es ***creciente*** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, aumentan los valores de la variable dependiente.*



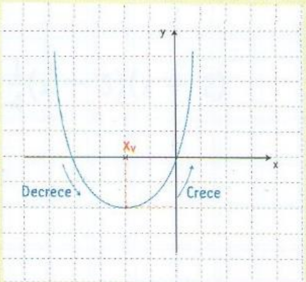
$f(x)$ es creciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Una función continua es ***decreciente*** *en un cierto intervalo de su dominio cuando al aumentar los valores de la variable independiente, disminuyen los valores de la variable dependiente.*



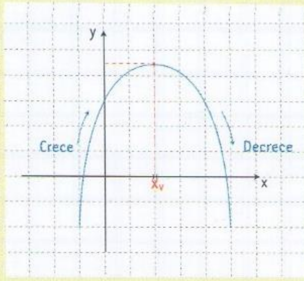
$f(x)$ es decreciente si: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

En general, dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, se verifica que:



Si **a** $>$ **0**, la función:

- Alcanza un **mínimo** en el vértice de la parábola.
- **Decrece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Crece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.

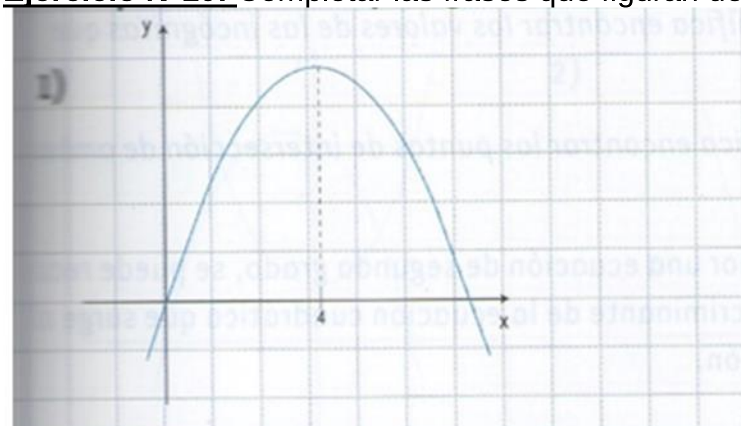


Si **a** $<$ **0**, la función:

- Alcanza un **máximo** en el vértice de la parábola
- **Crece** en el intervalo $(-\infty; x_v)$.
- **Decrece** en el intervalo $(x_v; +\infty)$.

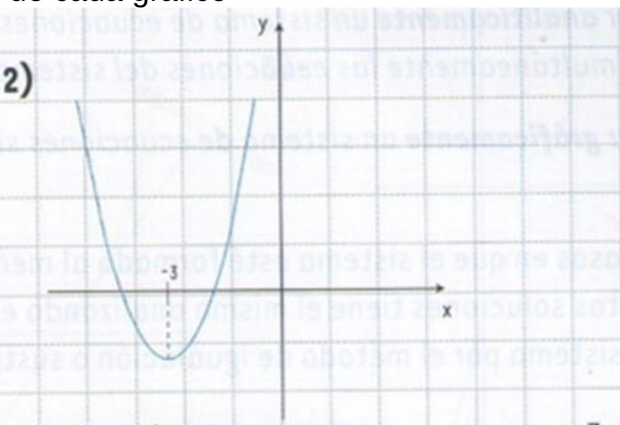
<u>Ejercicio N°10:</u> Completar las frases que figuran debajo de cada gráfico

1)



La función alcanza un en $x = 4$; crece en el intervalo y decrece en el intervalo .

2)



La función alcanza un en $x = -3$; crece en el intervalo y decrece en el intervalo .

Ejercicio n°11:

Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $I(z) = 1.000z - 2z^2$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.

- **Realicen el gráfico aproximado de la función y respondan.**

1) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

2) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares de zapatos? ¿Y 375 pares?

3) ¿A partir de qué cantidad de pares comienza a tener pérdidas?

EjercicioN°12:

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x)=0.5x^2-4x+6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo [0,10]

a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

c) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

EjercicioN°13: En una cooperativa agrícola de una región semiárida se bsuca optimizar la produccion de un cultivo resistente a la sequía para asegurar la alimentación de la comunidad local, al mismo tiempi que se minimiza el desperdicio de recursos. Han observado que el rendimiento del cultivo (**R** en toleladas por hectárea) en función de la cantidad de fertilizante orgánico aplicado (**x** en kilogramos por hectáreas) puede modelarse mediante la función cuadrática:

$$\boldsymbol{R(x) = -\frac{1}{20}.x^2 + 4.x - 15}$$

a) ¿Para cuáles cantidades de fertilizante el cultivo no rinde nada?
b) Para cumplir con los objetivos de “hambre cero”, necesitan una producción mínima de 60 toneladas de cultivo por hectárea, para asegurar la alimentación de la población local. ¿Qué cantidad de fertilizante permite a la cooperativa cumplir con la producción mínima?
c) ¿Cuál es la cantidad de fertilizante que maximiza el rndimiento del cultivo?¿Cuál es ese rendimiento máximo?
d) Para cumplir con el “consumo resposable” y evitar la sobre producción y el desperdicio de recursos (agua, energia, mano de obra), la producción no debe exeder las 75 toneladas de cultivo por hectárea. ¿Cuál es el rango de cantidad de fertilizante que permite a la cooperativa cumplir con la producción máxima de 75 toneladas por hectárea?
e) ¿Cuál es el rango de cantidad de fertilizante que cumple con los objetivos de producción mínima y máxima?
f) Realizar una gráfica aproximada

Unidad N°2: Polinomios

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

Una **expresión algebraica** *es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.*

a) $2x + 3^4$ **b)** $5x^3 + 6x - \frac{1}{3}$ **c)** $\cancel{x^2 + \sqrt{3x}}$ **d)** $\cancel{\frac{x^5 - 4}{x^2}}$ **e)** $\sqrt{2}x - \frac{2}{5}x^4$

Los números son los coeficientes, y las letras, las variables o indeterminadas.
En este capítulo se estudiarán expresiones algebraicas con una sola variable (x).

Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan **polinomios**.
Los ejemplos c) y d) no son polinomios; sí lo son a), b) y e).

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:

monomio, si tiene un solo término $\left(\frac{1}{2}x^5\right)$;

binomio, si tiene dos términos $(4x^2 + 5)$;

trinomio, si tiene tres términos $(3x - 8 + x^3)$ y

cuatrinomio, si tiene cuatro términos $(2x^5 - 2x + 7 - x^2)$.

Los términos que tienen la misma variable y exponente son ***semejantes.***
Los términos $4x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$ y x^2 son semejantes.

Se denomina ***grado*** *al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos de un polinomio.*

a) $P(x) = 7x + 6x^2 - x^5$; grado: 5. **b)** $Q(x) = 4 - x + x^3$; grado: 3. **c)** $T(x) = 5$; grado 0.

Se llama ***coeficiente principal*** *al que multiplica a la variable de mayor exponente.*

a) $S(x) = x + 5x^3 - 2x^4$; coeficiente principal: -2. **b)** $T(x) = x^5 - 8x^4 + x$; coeficiente principal: 1.

Al polinomio cuyo coeficiente principal es **1** *se lo denomina* ***normalizado.***
Un polinomio está ***ordenado*** *si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.*

a) $H(x) = 3x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ **b)** $J(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ **c)** $Z(x) = x^5 - 2x^2 + 7$

Un polinomio está ***completo*** *si tiene todas las potencias decrecientes del grado.*

a) $R(x) = 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x - 1$; está completo. **b)** $Q(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 3$; está incompleto.

Para completar un polinomio se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

a) $M(x) = x^5 + 3x^3 - 1 = x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
b) $N(x) = 4x^4 + 2x^2 = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 0$
c) $K(x) = x^6 - 3 = x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 3$

EJERCICIO 14: Clasificar de acuerdo al número de terminos, indicar grado, coeficiente principal y término independiente de cada polinomio

1) $P(x) = 6 + x^3 + 3x - x^2$ **2)** $Q(x) = 7x^3 - 2x^5 + 4$ **3)** $R(x) = 0x^4 - x + 5x^2$

EJERCICIO 15:

- **Marquen con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.**

1) $16x + x^{-1}$ ☐ **3)** $\sqrt[5]{x^2} - 9$ ☐ **5)** $\sqrt{\frac{2x+1}{3}}$ ☐

2) $\sqrt{3}x^2 - 5$ ☐ **4)** $\frac{2}{3}x^2 + 5x - 2$ ☐ **6)** $x^{10} - \frac{x}{5}$ ☐

EJERCICIO 16:

- **Ordenen y completen cada uno de los siguientes polinomios.**

1) $5x^3 - 1 =$ **3)** $-2 + 2x^3 - x =$

2) $-27x^3 + x^4 + 2 =$ **4)** $x - 3x^2 + x^5 - 1 =$

EJERCICIO 17:

- **Indiquen el grado de cada uno de los siguientes polinomios.**

1) $3x^2 - 2x - x^4$ **2)** $x^3 - 2^7.x^5$ **3)** $-x^3 + 6 + 0x^5$ **4)** $x + 3^3$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

La suma de varios monomios semejantes es otro monomio semejante al dado, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios dados.

a) $2x^3 + x^3 + 6x^3 = 9x^3$ **b)** $6x^5 + \frac{1}{2}x^5 + x^5 = \frac{15}{2}x^5$ **c)** $x + x + x + x + x = 5x$

Para restar dos monomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) = 6x^4 \wedge Q(x) = -3x^4 \Rightarrow P(x) - Q(x) = 6x^4 + 3x^4 = 9x^4$.

Reducir *un polinomio es sumar o restar sus términos semejantes.*

a) $2x + 3x^4 + x - x^4 = 2x^4 + 3x$ **b)** $x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + x^3 - 6x^3 = x^5 + \frac{2}{3}x^4 - 5x^3$

Para sumar varios polinomios entre sí, se completan y ordenan, luego se encolumnan sus términos semejantes y se suman.

a) Dados: $\begin{cases} P(x) = -3 + 2x^2 - 5x^3 + x^4 \\ Q(x) = -9x^3 + x^2 + x - 1 \end{cases}$ **b)** Dados: $\begin{cases} R(x) = x^2 - x + 1 \\ T(x) = -x + 2 - 5x^2 \end{cases}$

$P(x) + Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & - 5x^3 & + 2x^2 & + 0x & - 3 \\ + & 0x^4 & - 9x^3 & + x^2 & + x & - 1 \\ \hline & x^4 & - 14x^3 & + 3x^2 & + x & - 4 \end{array}$$

$R(x) + T(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & - x & + 1 \\ + & -5x^2 & - x & + 2 \\ \hline & -4x^2 & - 2x & + 3 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

a) Dados: $\begin{cases} M(x) = 2x^2 + x - 2 \\ N(x) = x^2 + 1 \end{cases}$ **b)** Dados: $\begin{cases} A(x) = -2x + 3x^2 - \frac{1}{2}x^3 - 7 \\ C(x) = 3x - 5x^2 - x^4 + 2 \end{cases}$

$M(x) - N(x)$

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 & + x & - 2 \\ + & -x^2 & + 0x & - 1 \\ \hline & x^2 & + x & - 3 \end{array}$$

$A(x) - C(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 0x^4 & - \frac{1}{2}x^3 & + 3x^2 & - 2x & - 7 \\ + & x^4 & - 0x^3 & + 5x^2 & - 3x & - 2 \\ \hline & x^4 & - \frac{1}{2}x^3 & + 8x^2 & - 5x & - 9 \end{array}$$

EJERCICIO 18: Resolver las siguientes operaciones

$a) -3.x + x - 5.x + x =$ $\qquad$ $b) 4.x^2 + 6.x^2 - 3.x^2$

EJERCICIO 19: Dados los polinomios

$P(x) = -2.x^3 + x^2 - 5.x + 3$; $Q(x) = 3.x - 4 + 5.x^3 - 2.x^2$ y $R(x) = x^2 - 5.x + 2$

Resolver las siguientes operaciones:

a) P(x)+Q(x)= $\qquad$ **b) P(x) _ Q(x)=** $\qquad$ **c) P(x)+R(x)=** $\qquad$ **d) R(x)_Q(x)=**

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos monomios se deben multiplicar los coeficientes y las indeterminadas entre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación. $\quad$ $\mathbf{x^n.x^m = x^{n+m}}$

a) $(3x)(2x) = 6x^2$ $\quad$ **b)** $(10x^4)(-5x^4) = -50x^8$ $\quad$ **c)** $(-4x)(x^3) = -4x^4$ $\quad$ **d)** $(-6x^5)(-3x^2) = 18x^7$

Para multiplicar un polinomio por un número real, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y resta. $\quad$ $\mathbf{a(b \pm c) = ab \pm ac}$

$$-3\left(x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 4\right) = -3x^3 + (-3)2x^2 + (-3)\frac{1}{3}x - (-3).4 = -3x^3 - 6x^2 - x + 12$$

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, efectuando luego la multiplicación de monomios. $\quad$ $\mathbf{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$

Dados: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ y $Q(x) = 3x^2 - x$.

$$P(x).Q(x) = (2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - x)$$
$$= (2x^2)(3x^2) + 2x^2(-x) + (-5x)(3x^2) + (-5x)(-x) + 2(3x^2) + 2(-x)$$
$$= 6x^4 - 2x^3 - 15x^3 + 5x^2 + 6x^2 - 2x$$
$$P(x).Q(x) = 6x^4 - 17x^3 + 11x^2 - 2x$$

Producto de la suma de dos términos por su diferencia

El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ $\qquad$ $\boxed{\mathbf{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}}$

a) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4x + 4x - 16 = x^2 - 16$

b) $(x^2 + 5x)(x^2 - 5x) = x^4 - 5x^3 + 5x^3 - 25x^2 = x^4 - 25x^2$

EJERCICIO 20: Resolver las siguientes multiplicaciones de monomios

$a)\ (2.x^2).(-6.x) =$ $\qquad$ $b)\ (-3.x^2).(5.x^3) =$ $\qquad$ $c)\ (-4.x^4).(6.x^5) =$

EJERCICIO 21: Aplicar distributiva y resolver

$\boldsymbol{a})\ (\mathbf{-2.}\boldsymbol{x}).\left(\mathbf{-3.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} + \mathbf{5.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right) =$

$\boldsymbol{b})\ (\mathbf{6.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} - \mathbf{3.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{12.}\boldsymbol{x}).(-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}) =$

$\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}).(\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) =$

$\boldsymbol{d})(\mathbf{4.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3.}\boldsymbol{x}).(\mathbf{4.}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3.}\boldsymbol{x}) =$

EJERCICIO 22: Resolver las siguientes multiplicaciones de polinomios

1) $(x^3 - x + 1)(x^2 - x)$

2) $(x^5 - x^3 - x + 1)(x^3 - x^2 + x - 2)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Para dividir dos monomios se deben dividir los coeficientes y las indeterminadas tre sí, aplicando la regla de los signos y las propiedades de la potenciación. $x^n : x^m = x^{n-m}$

a) $(4x^3):(2x) = (4:2)(x^3:x) = 2x^2$

b) $x^4:(-8x^3) = [1:(-8)](x^4:x^3) = -\frac{1}{8}x$

c) $-6x^5:(3x^2) = (-6:3)(x^5:x^2) = -2x^3$

d) $(-10x^8):(-2x^3) = [-10:(-2)](x^8:x^3) = 5x^5$

Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva. $(a \pm b):c = a:c \pm b:c$

a) $(24x^5 - 16x^3 + 12x^2 - 4x):(-4x) = 24:(-4)(x^5:x) -16:(-4)(x^3:x) + 12:(-4)(x^2:x) + (-4):(-4)(x:x)$

$= -6x^4 + 4x^2 - 3x + 1$

b) $(2x^6 + 5x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x):\left(\frac{1}{2}x\right) = 4x^5 + 10x^4 + 2x^2 + x + 12$

Para dividir dos polinomios:

- *El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor.*
- *El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.*
- *El polinomio divisor debe estar ordenado.*

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Dividendo} & & \textbf{Divisor} \\ \searrow & & \swarrow \\ P(x) & & \underline{|Q(x)} \\ R(x) & & C(x) \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \textbf{Resto} & & \textbf{Cociente} \end{array}$$

$$\mathbf{P(x) = C(x).Q(x) + R(x)}$$

Ejemplo:

Dados: $P(x) = 2x - 3 + 2x^4$ y $Q(x) = -2x + x^2$.
Hallar $P(x):Q(x)$.

El dividendo debe estar completo y ordenado: $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3$.
El divisor debe estar ordenado: $Q(x) = x^2 - 2x$.

$$\begin{array}{rl} 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x - 3 & \underline{|\ x^2 - 2x\ } \\ -\ \underline{2x^4 - 4x^3} & 2x^2 + 4x + 8 \\ 4x^3 + 0x^2 & \downarrow \\ -\ \underline{4x^3 - 8x^2} & \text{Cociente: } C(x) \\ 8x^2 + 2x & \\ -\ \underline{8x^2 - 16x} & \\ 18x - 3 \longrightarrow \text{Resto: } R(x) & \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + 4x + 8$
$R(x) = 18x - 3$

EJERCICIO 23: Resolver las siguientes divisiones de monomios

$a)\ (8.x^2):(-4.x) =$ $\quad b)\ (-9.x^2):(3.x^2) =$ $\quad c)\ (-14.x^7):(7.x^5) =$

EJERCICIO 24: Aplicar distributiva y resolver

$\boldsymbol{a})\ (\boldsymbol{-8.x^5 + 6.x^2}):(\boldsymbol{-2.x}). =$

$\boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{6.x^3 - 3.x^2 + 12.x}):(\boldsymbol{-3.x}) =$

EJERCICIO 25:

● **Hallen el cociente y el resto de las siguientes divisiones.**

1) $(2x^3 - 4x^2 - 5x - 3):(x + 1)$ $\quad$ **3)** $(5x^3 - 4x - 3):(x^2 - x)$

REGLA DE RUFFINI. TEOREMA DEL RESTO

La **Regla de Ruffini** es un método práctico que se utiliza para dividir un polinomio $P(x)$ por otro cuya forma sea $x + a$.

Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.
Hallar $P(x):Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini.

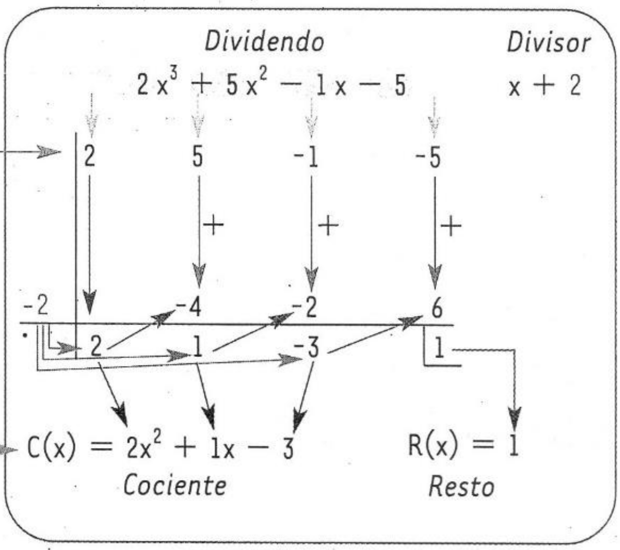
El polinomio **dividendo** debe estar **completo y ordenado.**

Se escriben alineados los coeficientes del dividendo.

El coeficiente principal se "baja" sin ser modificado; luego se lo multiplica por el opuesto del término independiente del divisor y se suma con el segundo coeficiente; y así sucesivamente hasta llegar al resto.

Los números que se obtienen son los coeficientes del cociente y el último valor es el resto.

El polinomio **cociente es un grado menor** que el polinomio **dividendo**.



Ejemplos:

a) $(x^3 - x + 2):(x - 2)$

$1x^3 + 0x^2 - 1x + 2 \longrightarrow$ Dividendo

	1	0	-1	2
2		2	4	6
	1	2	3	$\boxed{8}$

Cociente $\longrightarrow x^2 + 2x + 3$

Resto $\longrightarrow 8$

b) $\left(\frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1\right):(x + 1)$

$\frac{1}{3}x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \longrightarrow$ Dividendo

	$\frac{1}{3}$	0	-3	0	1
-1		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\boxed{-\frac{5}{3}}$

Cociente $\longrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$

Resto $\longrightarrow -\frac{5}{3}$

Teorema del resto

*El **resto** de la división de un polinomio por otro de la forma $x + a$, es el valor que resulta de reemplazar la variable del dividendo por el valor opuesto al término independiente del divisor.*

a) Dados: $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x + 2$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, se obtiene:

$P(-2) = 2(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) - 5$
$P(-2) = -16 + 20 + 2 - 5 = 1$
El resto de la división es 1.

b) Dados: $P(x) = x^2 - 2x - 3$ y $Q(x) = x - 3$.

El resto de la división $P(x):Q(x)$, es:

$P(3) = 3^2 - 2.3 - 3$
$P(3) = 9 - 6 - 3 = 0$
Si el resto es 0 (cero): **P(x) es divisible por Q(x)**.

EJERCICIO 26:

- **Apliquen la regla de Ruffini en cada una de las siguiente divisiones.**

1) $(2x^3 + 3x - 1):(x - 2)$
2) $(3x^3 - 2x^2 - 2):(x + 1)$
3) $(-24x - x^4 + 5):(x + 3)$
4) $(-x^5 + 12x^3 - 15x^2 - 16):(x + 4)$

EJERCICIO 27:

- **Calculen directamente el resto de las siguientes divisiones.**

1) $(5x^2 - 2x + 4):(x + 3)$
2) $(12x^4 - 5x^2 + 2x - 5):(x - 2)$
3) $(2x^3 - 4x^2 - 3):(x - 1)$
4) $\left(\frac{3}{2}x^3 + 4x^2 + 3\right):(x + 2)$

POTENCIACIÓN DE POLINOMIOS

Potencia de un monomio

Para resolver la potencia de un monomio, se debe aplicar la propiedad distributiva de la potenciación respecto de la multiplicación y la potencia de otra potencia.

$(a.b)^n = a^n.b^n$
$(x^n)^m = x^{n.m}$

a) $(2x)^4 = 2^4.x^4 = 16x^4$ **b)** $(-3x^3)^2 = (-3)^2.(x^3)^2 = 9x^6$

Cuadrado de un binomio

Al elevar al cuadrado un binomio se obtiene un **trinomio cuadrado perfecto**.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\boxed{\underbrace{(a + b)^2}_{\text{Cuadrado de un binomio}} = \underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}}$$

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2.3x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

Cubo de un binomio

Al elevar al cubo un binomio se obtiene un **cuatrinomio cubo perfecto**.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^2.(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$(a + b)^3 = a^2.a + a^2.b + 2aba + 2abb + b^2.a + b^2.b = a^3 + a^2.b + 2a^2.b + 2ab^2 + b^2.a + b^3$$

$$\underbrace{(a + b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2.b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

a) $(x + 4)^3 = x^3 + 3.4x^2 + 3.4^2x + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

b) $(2x - 3)^3 = (2x)^3 + 3(-3)(2x)^2 + 3.2x(-3)^2 + (-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

EJERCICIO 28:

- **Resuelvan las siguientes potencias.**

1) $(4x^2)^3 =$

3) $\left(-\frac{1}{2}x^3\right)^5 =$

2) $(-3x^4)^2 =$

4) $\left(-\frac{2}{3}x^6\right)^3 =$

EJERCICIO 29:

- **Desarrollen los siguientes cuadrados.**

1) $(x + 5)^2 =$

2) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 =$

3) $(x^5 - 1)^2 =$

EJERCICIO 30:

- **Desarrollen los siguientes cubos.**

1) $(4 + x)^3 =$

2) $\left(5x + \frac{1}{2}\right)^3 =$

3) $(x^5 - 1)^3 =$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

FACTOR COMÚN

Factorizar *un polinomio, de* ***n*** *cantidad de términos, es expresarlo como un* ***producto*** *de polinomios* ***primos****.*

Factor común

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$a(b \pm c) = a.b \pm a.c$ (el factor a se repite en ambos términos)

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa: $a.b \pm a.c = a.(b \pm c)$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el DCM de todos los coeficientes del mismo.

Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = 2x^2 - 4x$.

$P(x) = 2x.x - 2.2x \longrightarrow 2x$ es el factor común de los dos términos.

$P(x) = 2x(x - 2) \longrightarrow$ Expresión factoreada de $P(x)$ a través del factor común.

$\frac{2x^2}{2x}$ $\frac{4x}{2x}$ $\longrightarrow$ Dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada término por 2x.

b) $P(x) = -12x^6 + 6x^5 - 15x^3 = -4.3x^3.x^3 + 2.3x^3.x^2 - 5.3x^3 = 3x^3(-4x^3 + 2x^2 - 5)$

Para normalizar un polinomio, se debe sacar como factor común el coeficiente principal.

$P(x) = 2x^2 - \frac{1}{3} = 2\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{\frac{1}{3}}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{6}\right)$ Polinomio normalizado

EJERCICIO 31: Factorizar aplicando factor común

$\boldsymbol{a)\ 24.x^5 + 18.x^4 - 30.x^2 =}$

$\boldsymbol{b) 15.x^4 - 21.x^3 - 9.x =}$

SUMA Y RESTA DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Para un polinomio de la forma $\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n}$ existen cuatro posibilidades:

$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n} \wedge$ **n es par**

$\mathbf{P(x) = x^n \pm a^n} \wedge$ **n es impar**

EJERCICIO 32: Resolver aplicando la diferencia de cuadrados

$a) x^2 - 1 =$ $\qquad$ $b) x^2 - 16 =$ $\qquad$ $c) 4.x^2 - 25 =$ $\qquad$ $d) x^4 - 9 =$

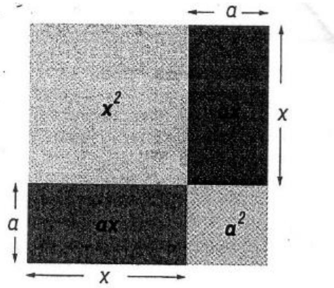
TRINOMIO CUADRADO Y CUATRINOMIO CUBO PERFECTOS

Trinomio cuadrado perfecto

$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2 \longrightarrow$ **Cuadrado de un binomio:** expresión factorizada del trinomio cuadrado perfecto.

$\downarrow$

Trinomio cuadrado perfecto: desarrollo del cuadrado del binomio.



$$(x + a)^2 = x^2 + ax + ax + a^2$$
$$= x^2 + 2ax + a^2$$

$$\boxed{x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^2}$$

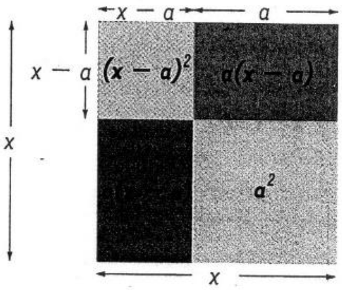
a) $P(x) = x^2 + 6x + 9 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^2} + 2.3x + \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{3^2} = (x + 3)^2$

b) $Q(x) = x^2 - 4x + 4 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^2} - 2.2x + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2^2} = (x - 2)^2$

c) $R(x) = x^2 + 8x + 9 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^2} + 2.4x + \underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{3^2}$ $\quad 3 \neq 4$

$\downarrow$

No es trinomio cuadrado perfecto



$$(x - a)^2 = x^2 - a(x - a) - a(x - a) - a^2$$
$$= x^2 - ax + a^2 - ax + a^2 - a^2$$
$$= x^2 - 2ax + a^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto

$x^3 + 3ax^2 + 3a^2.x + a^3 = (x + a)^3 \longrightarrow$ **Cubo de un binomio:** expresión factorizada del cuatrinomio cubo perfecto.

$\downarrow$

Cuatrinomio cubo perfecto: es el desarrollo del cubo del binomio.

$x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2.x \pm a^3 = (x \pm a)(x \pm a)(x \pm a) = (x \pm a)^3 \longrightarrow$ **Expresión factorizada**

$$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$$
$$= (x^2 + 2ax + a^2)(x + a)$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x - a)^3 = (x - a)(x - a)(x - a)$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)(x - a)$$
$$= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$

a) $T(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^3} + 3.2.x^2 + 3.2^2.x + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2^3} = (x + 2)^3$

b) $K(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x^3} - 3.1x^2 + 3.1^2.x - \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1^3} = (x - 1)^3$

EJERCICIO 33: **Expresen cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.**

1) $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ **2)** $T(x) = x^6 + 4x^3 + 4$

EJERCICIO 34: **Expresen cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.**

1) $D(x) = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$ **2)** $P(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

TEOREMA DE GAUSS

*Si el polinomio $P(x)$, de grado n, con coeficientes enteros y término independiente no nulo, admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (fracción irreducible), entonces **p** es divisor del término independiente y **q** lo es del coeficiente principal.*

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + d$:

- se buscan los divisores del término independiente y del coeficiente principal.
- se buscan las posibles raíces: $\frac{p}{q}$ $p \longrightarrow$ Divisores del término independiente. $q \longrightarrow$ Divisores del coeficiente principal.

Todo polinomio $P(x)$, de grado n, de n raíces reales, puede factorizarse como:

$$\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}$$

Siendo **a** el coeficiente principal de $P(x)$ y $x_1; x_2;\dots; x_n$ sus n raíces reales.

Para hallar las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$:

Divisores del término independiente, (-3): $\pm 1, \pm 3$

Divisores del coeficiente principal, (2): $\pm 1, \pm 2$

Posibles raíces $\frac{p}{q}$

$x_1 = \pm 1$; $x_2 = \pm \frac{1}{2}$; $x_3 = \pm 3$; $x_4 = \pm\frac{3}{2}$

Se especializa el polinomio $P(x)$ por las posibles raíces (x_n es raíz si $P(x_n) = 0$).

$P(-1) = 0 \Rightarrow$ **$x_1 = -1$, es raíz**

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ **$x_2 = -\frac{1}{2}$, es raíz**

$P(3) = 0 \Rightarrow$ **$x_3 = 3$, es raíz**

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3 \Rightarrow P(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$

*Un polinomio $P(x)$ tiene una raíz **múltiple** si al descomponerlo en función de sus raíces hay factores iguales; el orden de multiplicidad de la misma está dado por el exponente del factor.*

Polinomio factorizado	**Raíces**	**Multiplicidad**
$P_1(x) = 2(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$	$x_1 = -1 \wedge x_2 = -\frac{1}{2} \wedge x_3 = 3$	Tres raíces simples
$P_2(x) = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$	$x_1 = x_2 = -1$	Una raíz doble
$P_3(x) = (x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2)$	$x_1 = x_2 = x_3 = 2$	Una raíz triple
$P_4(x) = (x + 2)^2.(x - 1)^3$	$x_1 = x_2 = -2 \wedge x_3 = x_4 = x_5 = 1$	-2, raíz doble y 1, raíz triple
$P_5(x) = x^3(x + 3) = x.x.x(x + 3)$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \wedge x_4 = -3$	0, raíz triple y -3, raíz simple

EJERCICIO 35:

● Hallen las raíces de los siguientes polinomios y factorícenlos.

1) $P_1(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$

2) $P_2(x) = -4x^3 + 7x - 3$

3) $P_3(x) = -4x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x + 2$

4) $P_4(x) = x^3 - 3x + 2$

5) $P_5(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

6) $P_6(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

ECUACIONES DE GRADO MAYOR QUE DOS

Para encontrar el o los valores de x para los cuales $P(x) = -16$, siendo $P(x) = x^3 - x^2 - 16x$, se debe plantear la ecuación: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x = -16}$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, hay que igualarlas a cero: $\mathbf{x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0}$

Luego factorizar el polinomio resultante:

$$(x^3 - x^2) - (16x - 16) = 0$$
$$x^2.(x - 1) - 16(x - 1) = 0$$
$$(x^2 - 16)(x - 1) = 0$$
$$\mathbf{(x - 4)(x + 4)(x - 1) = 0}$$

Aplicar la ley de nulidad del producto:

Para que un producto sea cero, tendrá que serlo al menos uno de los factores. $\mathbf{a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$

$$x - 4 = 0 \;\vee\; x + 4 = 0 \;\vee\; x - 1 = 0$$
$$x = 4 \;\vee\; x = -4 \;\vee\; x = 1$$

Las raíces de $R(x) = x^3 - x^2 - 16x + 16$ son: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 1$.

Para verificar las soluciones, se reemplazan los valores de x en $P(x)$:

Se debe verificar que $P(x_n) = x^3 - x^2 - 16x = -16$

$P(4) = 4^3 - 4^2 - 16.4$	$P(-4) = (-4)^3 - (-4)^2 - 16.(-4)$	$P(1) = 1^3 - 1^2 - 16.1$
$P(4) = 64 - 16 - 64$	$P(-4) = -64 - 16 + 64$	$P(1) = 1 - 1 - 16$
$P(4) = -16$	$P(-4) = -16$	$P(1) = -16$

Por lo tanto: $\mathbf{S = \{-4;4;1\}}$

Hallar x, tal que $P(x) = -1$.

a) $P(x) = x^3 + x^2 + x$

$$x^3 + x^2 + x = -1$$
$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$
$$(x^3 + x^2) + (x + 1) = 0$$
$$x^2(x + 1) + (x + 1) = 0$$
$$(x^2 + 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \vee x + 1 = 0$$
$$\varnothing \qquad x = -1$$

Verificación:

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1)$

$P(-1) = -1 + 1 - 1 \Rightarrow P(-1) = -1$

La solución: $S = \{-1\}$

b) $P(x) = x^3 + x + 1$

$$x^3 + x + 1 = -1$$
$$x^3 + x + 1 + 1 = 0$$
$$x^3 + x + 2 = 0$$

	1	0	1	2
-1		-1	1	-2
	1	-1	2	0

$(x^2 - x + 2)(x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

EJERCICIO 36: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones

1) $x^3 - x - 1 = -1$

2) $2x^4 - 2x = 0$

3) $x^3 - 3x^2 + 2x + 10 = 16$

4) $2x^4 - x^3 - 22x^2 = 8x^2 + 3x^3$

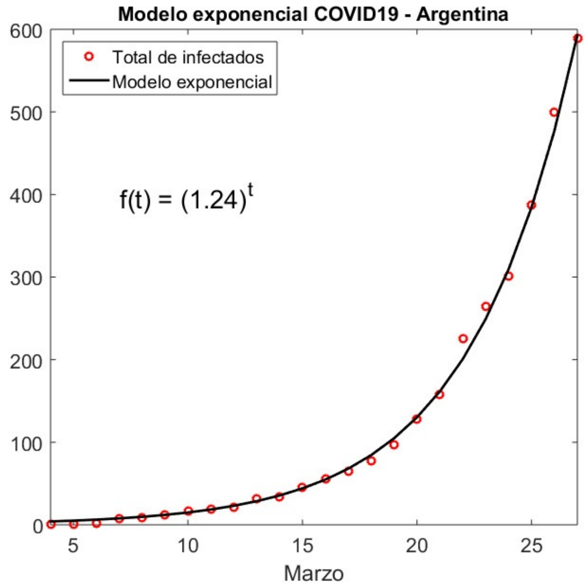
FUNCIÓN EXPONENCIAL

COVID-19 y las matemáticas: En tiempos de pandemia se pudo observar que el crecimiento de contagio de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-CoV-2, se comportaba de una manera que puede ser modelada muy bien con funciones exponenciales. Por ello, se hablaba que el crecimiento de contagios era exponencial. Y dado que estamos hablando de funciones que crecen de una manera pavorosa en poco tiempo se observó que el resultado fue grave. Se publicaron en distintos medios muchos gráficos que ilustraban cómo fue creciendo el número de casos de contagio comprobados, uno de ellos es el gráfico de la función **$f(t)= 1,24^t$** que muestra como creció el número de infectados en función del tiempo (en días) que transcurrió en el mes de marzo de 2019.

Ejercicio 37: a) Confeccionar una tabla como la que se muestra a continuación, donde asignamos valores a “t” y calculamos la cantidad de infectados usando la fórmula.

Tiempo (t) en días	Total, de infectados
0	
5	
10	
15	
20	
25	

b) Representar los datos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos. (Nota: En el eje “x” o eje horizontal representamos el tiempo, en días, y en el eje vertical o eje “y” representamos la cantidad de infectados.



,

La función **$f(t)= 1,24^t$** recibe el nombre de función exponencial. En general:

> La función exponencial es una función de la forma $f(x)= k.\ a^x$, con a>0, a≠0, a≠1 y k≠0

- **Crecimiento y decrecimiento exponencial**

EJERCICIO 38: **a)** Dada la función $\mathbf{f(x)= 2^x}$ (donde k=1 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (donde k=1 y 0<a<.1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.
d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0):
> - Si k=1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;1)
> - Cuando las bases de las funciones exponenciales son inversas (como 2 y ½) sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "y"

- **Variaciones de la función exponencial**

EJECICIO N°39: a) Dada la función $\mathbf{f(x)=3.\ 2^x}$ (donde k>0 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $\mathbf{f(x)= (-3).\ 2^x}$ (donde k<0 y <a>.1) .Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.
d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0) :
> - Si k≠1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;k)
> - Cuando las bases de la funciones exponenciales son iguales y coeficientes (k) opuestos, sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "x"

EJERCICIO N°40:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

EJERCICIO N°41:
a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $f(x) = 2\,.\,3^x$ y $g(x) = -2\,.\,3^x$
b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

- **Desplazamientos de la función exponencial**

EJERCICIO N°42: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $f_1(x)= 2^x$, $f_2(x)= 2^x +3$ y $f_3(x)= 2^x -1$.
Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $f_1(x)= 2^x$ y responder:
a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones $f_2(x)= 2^x +3$ y $f_3(x)= 2^x -1$?
b) ¿De qué depende este desplazamiento?
c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°43: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $f_1(x)= 2^x$, $f_2(x)= 2^{x+1}$ y $f_3(x)= 2^{x-3}$.
Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $f_1(x)= 2^x$ y responder:
a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones?
b) ¿De qué depende este desplazamiento?
c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°44:
a)Graficar la función $f_1(x)= 2^x$ y a partir de ella trasladar la función $f_2(x)= 2^{x+2} -1$
b)Graficar la función $f_1(x)= 3^x$ y a partir de ella trasladar la función $f_2(x)= 3^{x-1} +2$
c)Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

EJERCICIO N°45: a) Dada la función $f(x)= 2^x$. Completar su tabla de valores:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)Para obtener la tabla de la función inversa intercambiamos el dominio y la imagen:

x	y
$\leftrightarrow$	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

La función inversa obtenida es la FUNCIÓN LOGARÍTMICA de la forma: $y = \log_2 x$

Para tener en cuenta:
Las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base son funciones inversas, por lo tanto, sus representaciones gráficas son simétricas respecto de la recta y= x

Aprendemos el concepto de logaritmo:

CONCEPTO DE LOGARÍTMO:
Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva distinto de 1, al exponente al que se debe elevar la base "b" para obtener dicho número.

$$\log_b N = a \quad pues \quad b^a = N$$

Donde "a" no puede valer 1 y debe ser positivo. N debe ser positivo, "b" es la base, "N" recibe el nombre de argumento y "a" es el logaritmo.

Ejemplos:

- Para calcular $\log_2 8$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 8. Luego $\log_2 8 = 3 \ pues \ 2^3 = 8.$
- Para calcular $\log_{\frac{1}{2}} 32$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 32. Luego $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \ pues \ \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32.$

EJERCICIO N°46: Calcular los siguientes logaritmos y justificar tu respuesta

$a)\ \log_9 1 =$

$b)\ \log_5 25 =$

$c)\ \log_7 7 =$

$d)\ \log_{\frac{1}{3}} 3 =$

$e)\ \log_2 \frac{1}{2} =$

Nota: Existen logaritmos especiales como el logaritmo decimal **"log"** cuya base es 10 y el logaritmo natural o neperiano **"ln"** cuya base es el número e=2,7182818285…

$f)\ \log 100 =$ $g)\ \ln 5 =$ $h)\ \log 4 =$

EJERCICIO N°47: a) Dada la función $f(x) = \log_3 x$. Completar su tabla de valores:

x	Y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos
c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°48: a) Dada la función $g(x) = \log_5 x$. Completar su tabla de valores:

x	Y
1	
5	
25	
$\frac{1}{5}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos
c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

FUNCIÓN LOGARÍTMICA:
Es la función de la forma:

$$f(x) = \log_b x$$

donde "b" no puede ser 1 ni negativa y x debe ser mayor que cero.

❖ Crecimiento y decrecimiento la función logarítmica

EJERCICIO N°49:

a)Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$ (b>1). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

b)Dada la función $\boldsymbol{g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x}$ (donde b<1 y b>0). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un sistema de ejes cartesianos.

d)Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

Dada la función logarítmica:

$$f(x) = \log_b x$$ (con b>0 y distinta de 1)

- La función corta al eje "x" en el punto (1;0), su raíz
- Cuando las bases de las funciones logarítmicas son iguales inversas, sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "x"

Practicamos…

EJERCICIO N°50:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_3 x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

EJERCICIO N°51:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = \log_5 x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

❖ Variaciones de la función logarítmica

EJERCICIO N°52: a) Para cada función completar la tabla de valores

$f(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

$g(x) = \log_2(x+3)$

x	y
1	
5	
-1	
-2	
-3	

$h(x) = \log_2(x-3)$

x	y
4	
5	
$\frac{7}{2}$	
7	
3	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.
c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $f(x) = \log_2 x$?

EJERCICIO N°53: a) Para cada función completar la tabla de valores

$f(x) = \log_3 x$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

$g(x) = \log_3 x \quad -2$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

$h(x) = \log_3 x \quad +2$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.
c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $f(x) = \log_3 x$?

EJERCICIO N°54:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $h(x) = \log_4(x+1)$ y $g\,(x) = \log_4(x-2)$ a partir de la función $f(x) = \log_4 x$.
b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°55:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $h(x) = \log_5 x + 5$ y $g\,(x) = \log_4 x - 10$ a partir de la función $f(x) = \log_5 x$.
b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°56:

1) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función
$y = \log_3(x+1) - 2$

2) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función
$y = \log_3(x-2) + 1$

3) Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita figura como exponente.

Ejemplo:

a) $2^x = 16$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$ **e)** $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

b) $3^{x-1} = 27$ **d)** $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ **f)** $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES

PRIMER CASO: Se transforma la ecuación dad en una igualdad de la misma base

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ igualando los exponentes

Verificación: $2^4 = 16$

b) $3^{x-1} = 27$

$3^{x-1} = 3^3$ igualando los exponentes

$x - 1 = 3$

$x = 3 + 1 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Verificación: $3^{4-1} = 27$

$3^3 = 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

$\left[(2)^{-1}\right]^x = 2^{\frac{3}{2}}$

$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$-x = \frac{3}{2}$ igualando los exponentes

$\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Verificación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$\sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

$\sqrt{8} = \sqrt{8}$

SEGUNDO CASO: Las ecuaciones exigen transformaciones basadas en propiedades ya vistas

d)

$3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ aplicamos propiedades de la potencia de igual base

$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$ $\left(a^{m+n} = a^m \cdot a^n\right)$

$3^x \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90$ extraemos factor común 3^x

$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$

$3^x = 90 : \frac{10}{3}$

$3^x = 27$

$3^x = 3^3$ igualamos exponentes

$\boxed{x = 3}$

Verificación: $3^{3-1} + 3^{3+1} = 90$

$3^2 + 3^4 = 90$

$9 + 81 = 90$

$90 = 90$

e)

$3 \cdot 4^{x+1} = 96$ transponemos el 3

$4^{x+1} = 96 : 3$

$4^{x+1} = 32$

$\left(2^2\right)^{x+1} = 2^5$

$2^{2x+2} = 2^5$ igualamos exponentes

$2x + 2 = 5$

$2x = 5 - 2$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$

Verificación: $3 \cdot 4^{\frac{3}{2}+1} = 96$

$3 \cdot 4^{\frac{5}{2}} = 96$

$3 \cdot 2^5 = 96$

$3 \cdot 32 = 96$

$96 = 96$

TERCER CASO: A través de una ecuación de segundo grado

f)

$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ aplicamos propiedad de la potencia

$\left(2^x\right)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ reemplazamos $2^x = z$

$(z)^2 - 9 \cdot z + 8 = 0$ resolvemos la ecuación de segundo grado

$z_1 = 8$

$z_2 = 1$

como $2^x = z \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2^x = 8 \\ 2^x = 2^3 \end{array}} \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2^0 \end{array}} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Verificación: si $x = 3$

$2^{2 \cdot 3} - 9 \cdot 2^3 + 8 = 0$

$2^6 - 9 \cdot 2^3 + 8 = 0$

$64 - 72 + 8 = 0$

$0 = 0$

si $x = 0$

$2^{2 \cdot 0} - 9 \cdot 2^0 + 8 = 0$

$2^0 - 9 \cdot 2^0 + 8 = 0$

$1 - 9 + 8 = 0$

$0 = 0$

EJERCICIO N°57:

1. Transformen cada una de las siguientes expresiones en una potencia de igual base:

a) $3^x \cdot 3^{x+1} =$

b) $2^{-x} \cdot 4 =$

c) $25^{x-1} : 5^{2x+4} =$

d) $8^x \cdot 4^{2-x} \cdot 2^{2x+2} =$

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales y verifiquen:

a) $5^x = 625$

b) $3^{x-1} = 81$

c) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

d) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$

e) $6^{2x-2} = 1$

f) $4^{\frac{x-2}{x+3}} = 4^{\frac{x}{x+2}}$

g) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 17$

h) $3^{x-5} = 27^{1-x}$

i) $2^{4x-x^2} = 8$

j) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

k) $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+2} = 89$

l) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

m) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

Concepto de logaritmo: Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva y distinto de 1, al exponente que se debe elevar la base "a" para obtener dicho número.

$$\boxed{\log_{\underset{\text{base}}{a}} \underset{\text{argumento}}{N} = \underset{\text{logaritmo}}{C} \Rightarrow a^C = N \begin{cases} 1 \neq a > 0 \\ N > 0 \end{cases}}$$

Ejemplo: ✓ $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

✓ $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

Para tener en cuenta:
La potenciación tiene dos operaciones inversas:

$2^4 = 16 \longrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$ se obtiene la base

$\searrow \log_2 16 = 4$ se obtiene el exponente

<u>**EJERCICIO N°58:**</u> Calcular siempre que sea posible

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_5 25 =$

c) $\log_7 7 =$

d) $\log_2 0 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

g) $\log_2 \frac{1}{2} =$

h) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

i) $\log_2 \sqrt{8} =$

j) $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

k) $\log_9 \frac{1}{3} =$

Logaritmos decimales y naturales: Algunos logaritmos se pueden obtener directamente usando la calculadora científica. Ellos son:

- los de base 10, llamados **logaritmos decimales**. Se simboliza $\boxed{log}$. Se omite escribir la base 10.
- Los de base *e* ("*e*"= irracional 2,718281...), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos** $\boxed{ln}$.

<u>**EJERCICIO N°59:**</u> Encontrar los siguientes logaritmos utilizando la calculadora

a) $\log\ 202 =$

b) $\log\ 20 =$

c) $\log\ 2{,}02 =$

d) $\log\ 0{,}242 =$

e) $\ln\ 7 =$

f) $\ln\ 25 =$

g) $\ln\ 250 =$

h) $\ln\ 0{,}25 =$

También es posible obtener con la calculadora los siguientes logaritmos:

$$\log_5 32 = \frac{\log\ 32}{\log\ 5} = \frac{1{,}505}{0{,}699} = 2{,}153$$

$$\log_5 32 = \frac{\ln\ 32}{\ln\ 5} = \frac{3{,}465}{1{,}61} = 2{,}153$$

Este procedimiento se llama **cambio de base**, lo que nos permite utilizar la calculadora científica en todos los casos.

Simbólicamente: $\log_a N = \dfrac{\log\ N}{\log\ a}$

$$\log_a N = \frac{\ln\ N}{\ln\ a}$$

EJERCICIO N°60: Calcular aplicando logaritmo decimal

a) $\log_4 100 =$ b) $\log_3 10 =$ c) $\log_{\frac{1}{2}} 7 =$ d) $\log_5 \frac{1}{8} =$

EJERCICIO N°61: Calcular aplicando logaritmo neperiano

a) $\log_2 165 =$ b) $\log_5 72 =$ c) $\log_3 8{,}21 =$ d) $\log_{15} 0{,}25 =$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1) Logarito de un producto: Es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(P\cdot Q)=\log_a P+\log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2(4\cdot 16)=\log_2 4+\log_2 16$$

$$\log_2 64=2+4$$

$$6=6$$

2) Logarito de una división: Es igual a logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a\left(\frac{P}{Q}\right)=\log_a P-\log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_5(25:5)=\log_5 25-\log_5 5$$

$$\log_5 5=2-1$$

$$1=1$$

3) Logarito de una potencia: Es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a P^n=n\cdot\log_a P$$

Ejemplo:

$$\log_2 8^3=\log_2(8\cdot 8\cdot 8)$$

$$\log_2 512=\log_2 8+\log_2 8+\log_2 8$$

$$9=3\cdot\log_2 8$$

$$9=3.3$$

$$9=9$$

4) Logarito de una raíz: Es igual al logaritmo del argumento dividido en el indice. Esto es…

$$\log_a \sqrt[n]{Q}=\log_a Q^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{8}=\log_2 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 2=\frac{1}{3}\cdot\log_2 8$$

$$1=\frac{1}{3}\cdot 3$$

$$1=1$$

<u>EJERCICIO N°62:</u> Resolver aplicando propiedades

a) $log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$

b) $log_2\left(\frac{1}{32} : 64\right) =$

c) $log_4\left(\frac{1}{64}\right)^3 =$

d) $log_5 \sqrt[4]{125} =$

e) $log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$

f) $log_3 27^4 =$

g) $log_2\left(16 : \frac{1}{2}\right) =$

h) $log_3(9 \cdot 81) =$

<u>EJERCICIO N°63:</u> Expresar como un solo logaritmo y resolver

a) $2 \cdot log_5 \frac{1}{10} - 4 \cdot log_5 1 + log_5 16 =$

b) $log_6 3 + \frac{log_6 27}{3} + log_6 4 =$

c) $\left[log_4 \frac{1}{32} - log_4 2\right]^2 =$

d) $3 \cdot log_5 5 + log_5 \frac{1}{5} - \frac{log_5 \frac{1}{125}}{3} =$

<u>EJERCICIO N°64:</u> Calcular usando la definición

a) $log_3 27 =$

b) $log_5 125 =$

c) $log\ 10.000 =$

d) $log\ 0{,}01 =$

e) $log_{\frac{1}{2}} 64 =$

f) $log_2 0{,}5 =$

g) $log_3 \sqrt[5]{81} =$

h) $log_3 \sqrt{27} =$

i) $log_{\frac{1}{4}} 16 =$

j) $log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} =$

k) $log_2 0{,}25 =$

l) $log_{12} 12 =$

m) $log_5 1 =$

n) $log_5 \frac{1}{5} =$

o) $log_{\sqrt{3}} 9 =$

<u>EJERCICIO N°65:</u> Calcular el valor de "x"

a) $log_2 x = 5$

b) $\frac{1}{2} = log_4 x$

c) $log_3(x+1) = 2$

d) $log_5 x = -3$

e) $log_2 x = \frac{1}{7}$

f) $log\ x = -2$

<u>ECUACIONES LOGARÍTMICAS:</u>

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita esta en el argumento o la base del logaritmo. Ej::

a) $log_4(x+12) = 2$

b) $log_2(x+1) + log_2(x-1) = 3$

c) $log_2(x-1) + log_2 3 - log_2(x+3)$

d) $log_4 x - log_2 3 = log_2 5$

e) $3^x = 10$

f) $3 \cdot log_2^2 x - 6 \cdot log_2 x = -3$

Resolución de ecuaciones logarítmicas

1º caso: Aplicando la definición de logaritmo:

a)

$$log_4(x+12) = 2$$
$$4^2 = x+12$$
$$16 = x+12$$
$$16-12 = x$$
$$\boxed{4 = x}$$

Verificación:

$$log_4(4+12) = 2$$
$$log_4 16 = 2$$
$$2 = 2$$

2° caso: Aplicando propiedades de los logaritmos:

b) $log_2(x+1)+log_2(x-1)=3$ → aplicando propiedades de los logaritmos

$log_2(x+1)\cdot(x-1)=3$

$log_2\left(x^2-1\right)=3$ → definición de logaritmo

$x^2-1=2^3$

$x^2=8+1$

$x=\sqrt{9}$

$\boxed{x=\pm 3}$

Verificación: $log_2(3+1)+log_2(3-1)=3$

$log_2(4)+log_2(2)=3$

$2+1=3$

$3=3$

$x=-3$
no verifica

3° caso: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

c) $log_2(x-1)+log_2 3=log_2(x+3)$ → propiedades del producto

$log_2(x-1)\cdot 3=log_2(x+3)$ → logaritmos de igual base tienen igual argumento

$(x-1)\cdot 3=x+3$

$3\cdot x-3=x+3$

$3\cdot x-x=3+3$

$2\cdot x=6$

$x=6:2$

$\boxed{x=3}$.

Verificación: $log_2(3-1)+log_2 3=log_2(3+3)$

$log_2(2)+log_2 3=log_2(6)$

$log_2 2\cdot 3=log_2 6$

$log_2 6=log_2 6$

4° caso: Aplicando propiedades y cambios de base:

d) $log_4 x-log_2 3=log_2 5$
↓
cambio de base

$\frac{log_2 x}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$

$\frac{log_2 x}{2}-log_2 3=log_2 5$ → aplicando propiedad de la raíz y del cociente

$log_2\left(\sqrt{x}:3\right)=log_2 5$

$\left(\sqrt{x}:3\right)=5$

$\sqrt{x}=15$

$x=15^2$

$x=225$

Verificación: $log_4 225-log_2 3=log_2 5$

$\frac{log_2 225}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$

$log_2\left(\sqrt{225}:3\right)=log_2 5$

$\left(\sqrt{225}:3\right)=5$

$\sqrt{225}=15$

$15=15$

5° caso: Para resolver ecuaciones exponenciales:

$$3^x = 10$$ → aplicando logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad

$$\log\ 3^x = \log\ 10$$

$$x \cdot \log\ 3 = \log\ 10$$

$$x = \frac{\log\ 10}{\log\ 3}$$

$$x = \frac{1}{0{,}477}$$

$$\boxed{x = 2{,}096}$$

Verificación:

$$3^{2{,}096} \cong 10$$

6° caso: A través de una ecuación de segundo grado:

$$3 \cdot \log_2{}^2\ x - 6 \cdot \log_2 x = -3$$

si reemplazo $\log_2 x = z$

$$3 \cdot z^2 - 6 \cdot z + 3 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado → $z = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$z = \frac{6 \pm 0}{6}$$

$$\boxed{z = 1}$$

$$z = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1$$

$$2^1 = x$$

$$\boxed{2 = X}$$

Verificación:

$$3 \cdot \log_2{}^2 2 - 6 \cdot \log_2 2 = -3$$

$$3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

$$3 - 6 = -3$$

$$-3 = -3$$

EJERCICIO N°66: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_5(x-2) = -1$

b) $\log\ (x^2 - 3) = 0$

c) $\log_{(x+1)} 3 = 1$

d) $\log_2 x + \log_2 3 = 4$

e) $2 \cdot \log_{\frac{1}{8}}(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-2) = 4$

f) $3 \cdot \log_4(x+2) - \log_4(x+2) = 1$

g) $\log_2(x-1) + 1 = \log_2(x-2) + \log_2(7-x)$

h) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

i) $\log_2 x + \log_8 x = \frac{1}{2}$

j) $0{,}3^x = 1{,}5$

k) $3 \cdot 2^x = 10$

l) $(1{,}12)^x = 3$

m) $(\log_4 x)^2 + 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

n) $2 \cdot \log^2 x + 5 \cdot \log\ x = 3$

EJERCICIOS DE REPASO

EJERCICIO A: Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ 3^{x+3} = 9$ $\quad b)\ 25^{x-1} = 125$ $\quad c)\ 3^{2.x} = \frac{1}{81}$

$d)\ 8^{2.x-1} = 128$ $\quad e)\ 4^{x+1} = 32$ $\quad f)\ 5^{(x-1).(x+2)} = 1$ $\quad g)\ 2^{4.x} = 0{,}5^{4.x+2}$

EJERCICIO B: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\boxed{\log_2 x = \log_2 16}$ $\quad$ b) $\boxed{\log_3 x - \log_3(x-2) = 2}$

EJERCICIO C: Resolver

a) $\boxed{\dfrac{\left(\log_5 \frac{1}{25}\right)^2}{\log_3 81} - \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 8}}$ $\quad$ b) $\boxed{\log_a (x \cdot y)^3}$

EJERCICIO D:

El valor de "x" en las siguientes ecuaciones es:

$\boxed{\log_{x+2} 3 = 1}$

a) $x = 0$ $\quad$ b) $x = \hat{1}$ $\quad$ c) $x = -1$ $\quad$ d) $x = -2$

$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \log_2(1+7x) = 2}$

a) $x = \frac{3}{7}$ $\quad$ b) $x = 1$ $\quad$ c) $x = -9$ $\quad$ d) $x = 9$

$\boxed{2 \cdot \log_{\sqrt{3}}(5-x) = 4}$

a) $x = -4$ $\quad$ b) $x = 20$ $\quad$ c) $x = 2$ $\quad$ d) $x = -76$

$\boxed{\log_3(x+5) - \log_3(x-1) = 1}$

a) $x = 4$ $\quad$ b) $x = \frac{1}{4}$ $\quad$ c) $x = -\frac{7}{2}$ $\quad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_x 2 + \log_x 6 = 2 + \log_x 3}$

a) $x = 6$ $\quad$ b) $x = 4$ $\quad$ c) $x = -4$ $\quad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8}$

a) $x = \pm 1$ $\quad$ b) $x = \pm 2$ $\quad$ c) $x = \pm 3$ $\quad$ d) $x = \pm 4$

$\boxed{2\log_3 x - \log_3(x+1) - \log_3 x = 2}$

a) $x_1 = -\frac{9}{8}$, $x_2 = 0$ $\quad$ b) $x_1 = -\frac{8}{9}$, $x_2 = 0$ $\quad$ c) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ $\quad$ d) $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = 0$