COLEGIO MODELO

CUADERNILLO DE MATEMÁTICA

6 “D”

PROF.: RIVEROS E. CAROLINA

2026

COLEGIO MODELO

ESPACIO CURRICULAR: MATEMÁTICA-CICLO ORIENTADO- 6°D

PROFESORA: RIVEROS CAROLINA

PROGRAMA DE EXAMEN

UNIDAD Nº 1: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Función exponencial: fórmula; condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamiento; asíntota, ordenada al origen. Función Logarítmica: fórmula condiciones de crecimiento y decrecimiento. Gráfica y Análisis de la función. Desplazamientos; asíntotas. Propiedades de logaritmo. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Unidad N°2: TRIGONOMETRÍA

Ángulos orientados. Sistemas de medición angular. Circunferencia trigonométrica. Razones trigonométricas. Teorema del Seno. Teorema del Coseno.

Unidad N°3: TEORÍA DE CONJUNTOS

Teoría de conjuntos. Concepto. Formas de definir un conjunto: extensión y comprensión. Conjunto universal. Conjunto vacío. Subconjunto. Igualdad de conjunto. Operaciones con conjuntos: Unión. Intersección. Diferencia. Complemento. Propiedades de las operaciones con conjuntos.

Intervalos. Operaciones con conjuntos: Unión. Intersección. Diferencia. Complemento. Propiedades de las operaciones con conjuntos.

Sistemas de numeración. Operaciones con números reales aplicando propiedades.

Unidad N° 4. Probabilidad y estadística

Población y muestra. Variables estadísticas: cualitativas y cuantitativas. Distribuciones de frecuencia. Representación gráfica de datos: Histogramas. Polígonos de frecuencia. Medidas estadísticas: Media. Mediana. Moda. Varianza. Desvío estándar. Probabilidad. Experimentos aleatorios. Espacio muestral y sucesos. Probabilidad clásica. Interpretación de probabilidades en contextos reales.

<u>CONTRATO PEDAGÓGICO</u>

Espacio Curricular: MATEMATICA

Ciclo lectivo: 2026

Se deja constancia que el presente sirve para que el/la alumno/a, los padres y la profesora conozcan **las pautas de trabajo y los requisitos que se deben cumplir en los contenidos actitudinales.**

El/ la alumno/a de ……..año,……………………………, se compromete a cumplir las siguientes pautas de trabajo;

a) El horario de entrada al curso y salida debe ser respetado. El profesor sancionará al no cumplimiento dependiendo de la reiteración de la actitud.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
b) En caso de tener un celular u otro aparato electrónico será apagado o silenciado, ya que no pueden ser utilizados en la hora de clases, salvo que el docente lo establezca para una actividad Tampoco se permitirá el uso de auriculares durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia su actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
c) Se dirigirá con respeto hacia el profesor y hacia sus compañeros en todo momento; ser amigable y solidario.
d) El alumno no puede recibir llamadas de teléfono durante la clase, en caso de urgencia u otro caso llamar al teléfono particular del colegio: 4203963.
e) No salir del curso sin la autorización del profesor. Procurará ir al baño en los recreos, cómo también el llenado de botellas de agua de lo contrario el profesor evaluará la situación para permitir la salida.
f) Escuchar al profesor y a los compañeros, mantener una actitud de respeto y atención, levantar la mano para pedir la palabra, evitar charlas y acciones perturbadoras en clase (el profesor tiene la libertad de cambiar de banco a cualquier alumno si lo considera necesario para mejorar el clima de la clase o rendimiento académico del alumno).
g) Cuidar el material de trabajo, traer los útiles y el material solicitado para la clase; cuidar sus pertenencias y las de sus compañeros, mantener el orden y la limpieza del aula.El incumplimiento se verá reflejado en la nota actitudinal, y se registrará con signos negativos.
h) Evitar acciones como beber, comer, tomar mate, jugar en clase; insultar, escupir, charlar mientras el profesor o compañero está hablando, burlarse, discriminar, agredir verbal y/o físicamente, tratarse mal, romper, rayar bancos, paredes, carpetas, libros, sillas, realizar tareas de otra asignatura sin la autorización del profesor.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
i) Participar activa y disciplinadamente. En caso de indisciplina, el alumno será sancionado de acuerdo al régimen de convivencia.
j) Colaborar desinteresadamente y respetar a sus semejantes.
k) Responsabilidad, orden y prolijidad en la presentación de todas las actividades asignadas en tiempo y forma, del cuadernillo.

l) Mantener el cuaderno y cuadernillo de actividades prolijo, ordenado, traerlo todas las clases y completo a lo largo del año.
m) El alumno no podrá tomar fotos de la pizarra,ni filmar la clase y tampoco realizar transmisión en línea sin la autorización del docente, el incumplimiento será motivo de sanción.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
n) El alumno no podrá desayunar, merendar o almorzar durante la hora de clases.Se harán hasta tres llamados de atención en forma oral, si el alumno no cambia si actitud los llamados de atención se realizarán en forma escrita.
o) Proceder con absoluta honestidad.
p) La inasistencia a cada evaluación anunciada debe justificarse antes o durante la hora de la evaluación al preceptor. El alumno será evaluado sin aviso inmediatamente luego de su reincorporación al Colegio.

COMPROMISO DEL PROFESOR

a) Respetar a todos los alumnos y saber escuchar sus propuestas e inquietudes.
b) Explicar todas las dudas planteadas por los alumnos (siempre que ese alumno haya prestado atención y comportado debidamente).
c) Avisar con una semana de anticipación, por lo menos, la fecha y temas de las evaluaciones escritas.
d) Entregar en un plazo no mayor a 10 días hábiles los resultados de las evaluaciones y trabajos prácticos.
e) No utilizar celular en la hora de clases, salvo en el caso de una actividad escolar.
f) Ser justo con los alumnos, tener apertura al diálogo.
g) Cumplir con el horario de clases y respetar los recreos.
h) Actuar en forma no contradictoria respeto de lo que se les prohíbe a los alumnos (comer en clase, etc.)

CRITERIOS DE EVALUACION

a) Será anulado aquel ejercicio que se encuentre resuelto en más de una ocasión usando distintos métodos y llegando a conclusiones diferentes sin indicar cuál es la correcta.
b) El uso del vocabulario científico.
c) La presentación de trabajos en tiempo, en forma ordenada y prolija, con vocabulario correcto, teniendo en cuenta su ortografía.
d) La habilidad para seleccionar y aplicar distintos procedimientos en la resolución de situaciones problemáticas.
e) Presentación y prolijidad en las evaluaciones. Se descontará 0,25 por cada ejercicio desprolijo.
f) No se podrá utilizar la calculadora del celular, solamente la calculadora en formato tradicional.
g) El alumno debe abonar al docente la fotocopia de la evaluación.

Aclaración: El profesor es la máxima autoridad responsable del curso y por lo tanto tiene el derecho y la obligación de tomar las decisiones y reajustar las normas del contrato en casos particulares.

……………………………   ……………..…….   ……………………

Firma del alumno   Firma del padre, madre o tutor del alumno   Prof. Riveros Carolina

UNIDAD N°1: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

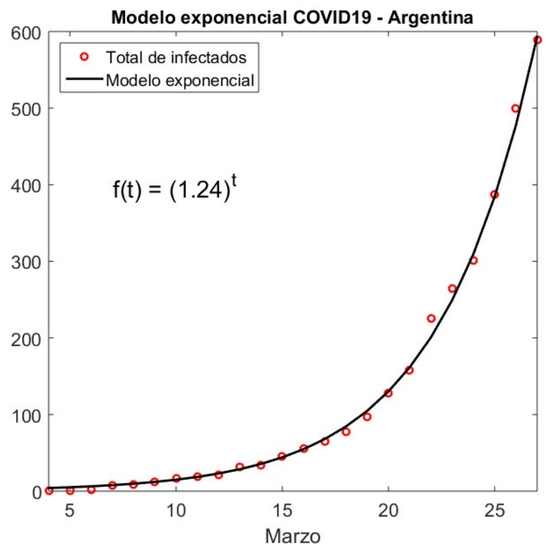
FUNCIÓN EXPONENCIAL

COVID-19 y las matemáticas: En tiempos de pandemia se pudo observar que el crecimiento de contagio de la enfermedad COVID-19 causada por el virus SARS-CoV-2, se comportaba de una manera que puede ser modelada muy bien con funciones exponenciales. Por ello, se hablaba que el crecimiento de contagios era exponencial. Y dado que estamos hablando de funciones que crecen de una manera pavorosa en poco tiempo se observó que el resultado fue grave. Se publicaron en distintos medios muchos gráficos que ilustraban cómo fue creciendo el número de casos de contagio comprobados, uno de ellos es el gráfico de la función **$f(t)=1{,}24^t$** que muestra como creció el número de infectados en función del tiempo (en días) que transcurrió en el mes de marzo de 2019.

Ejercicio 1: a) Confeccionar una tabla como la que se muestra a continuación, donde asignamos valores a "t" y calculamos la cantidad de infectados usando la fórmula.

Tiempo (t) en días	Total, de infectados
0	
5	
10	
15	
20	
25	

b) Representar los datos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos. (Nota: En el eje "x" o eje horizontal representamos el tiempo, en días, y en el eje vertical o eje "y" representamos la cantidad de infectados.



,

La función **$f(t)=1{,}24^t$** recibe el nombre de función exponencial. En general:

La función exponencial es una función de la forma $f(x)=k.\ a^x$, con a>0, a≠0, a≠1 y k≠0

❖ **Crecimiento y decrecimiento exponencial**

EJERCICIO 2: a) Dada la función $f(x)= 2^x$ (donde k=1 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (donde k=1 y 0<a<.1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.

d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0):
> - Si k=1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;1)
> - Cuando las bases de las funciones exponenciales son inversas (como 2 y ½) sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "y"

❖ **Variaciones de la función exponencial**

EJECICIO N°3: a) Dada la función $f(x)=3.\ 2^x$ (donde k>0 y a>1) . Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) Dada la función $f(x)= (-3).\ 2^x$ (donde k<0 y <a>.1) .Completar la tabla:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos los datos obtenidos en cada tabla.

d) Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

> Dada la función exponencial $f(x)= k.\ a^x$ (con a>0, a≠0 y k≠0) :
>
> - Si k≠1 entonces la función corta al eje "y" en el punto (0;k)
> - Cuando las bases de la funciones exponenciales son iguales y coeficientes (k) opuestos, sus

EJERCICIO N°4:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = 3^x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\boldsymbol{x}}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

EJERCICIO N°5:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x) = 2 \,.\, 3^x}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{g(x) = -2 \,.\, 3^x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes

- **Desplazamientos de la función exponencial**

EJERCICIO N°6: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$, $\mathbf{f_2(x)= 2^x +3}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^x -1}$.

Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y responder:

a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones $\mathbf{f_2(x)= 2^x +3}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^x -1}$?

b) ¿De qué depende este desplazamiento?

c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°7: Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$, $\mathbf{f_2(x)= 2^{x+1}}$ **y** $\mathbf{f_3(x)= 2^{x-3}}$.

Comparar las representaciones gráficas de las funciones exponenciales respecto de $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y responder:

a) ¿Hacia dónde se desplazan las gráficas de las funciones?

b) ¿De qué depende este desplazamiento?

c) Para cada una de ellas indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

EJERCICIO N°8:

a)Graficar la función $\mathbf{f_1(x)= 2^x}$ y a partir de ella trasladar la función $\mathbf{f_2(x)= 2^{x+2} -1}$

b)Graficar la función $\mathbf{f_1(x)= 3^x}$ y a partir de ella trasladar la función $\mathbf{f_2(x)= 3^{x-1} +2}$

c)Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

EJERCICIO N°9: a) Dada la función **f(x)= 2ˣ** . Completar su tabla de valores:

x	y
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)Para obtener la tabla de la función inversa intercambiamos el dominio y la imagen:

x	y
$\longleftrightarrow$	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un mismo sistema de ejes cartesianos.

La función inversa obtenida es la FUNCIÓN LOGARÍTMICA de la forma: $y = \log_2 x$

Para tener en cuenta:

Las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base son funciones inversas, por lo tanto, sus representaciones

Aprendemos el concepto de logaritmo:

CONCEPTO DE LOGARÍTMO:

Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva distinto de 1, al exponente al que se debe elevar la base "b" para obtener dicho número.

$$\log_b N = a \quad pues \quad b^a = N$$

Ejemplos:

- Para calcular $\log_2 8$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 8. Luego $\log_2 8 = 3 \ pues \ 2^3 = 8.$
- Para calcular $\log_{\frac{1}{2}} 32$ debo buscar un número tal que al elevar la base de por resultado 32. Luego $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \ pues \ \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32.$

EJERCICIO N°10: Calcular los siguientes logaritmos y justificar tu respuesta

$a)\ \log_9 1 =$

$b)\ \log_5 25 =$

$c)\ \log_7 7 =$

$d)\ \log_{\frac{1}{3}} 3 =$

$e)\ \log_2 \frac{1}{2} =$

Nota: Existen logaritmos especiales como el logaritmo decimal **"log"** cuya base es 10 y el logaritmo natural o neperiano **"ln"** cuya base es el número e=2,7182818285…

$\boldsymbol{f)}\ \mathbf{log\,100} =$ $\boldsymbol{g)}\ \mathbf{ln\,5} =$ $\boldsymbol{h)}\ \mathbf{log\,4} =$

EJERCICIO N°11: a) Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \log_3 x}$. Completar su tabla de valores:

x	Y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos

c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°12: a) Dada la funció**n** $\boldsymbol{g(x) = \log_5 x}$. Completar su tabla de valores:

x	Y
1	
5	
25	
$\frac{1}{5}$	

b) Graficar los datos obtenidos en un sistema de ejes cartesianos

c) Para la función logarítmica indicar dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada

FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

Es la función de la forma:

$$f(x) = \log_b x$$

- **Crecimiento y decrecimiento la función logarítmica**

EJERCICIO N°13:

a)Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$ (b>1). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

b)Dada la función $\boldsymbol{g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x}$ (donde b<1 y b>0). Completar la tabla:

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

c)Graficar los datos de ambas tablas en un sistema de ejes cartesianos.

d)Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

Dada la función logarítmica:

$$f(x)=\log_b x$$ (con b>0 y distinta de 1)

- La función corta al eje "x" en el punto (1;0), su raíz
- Cuando las bases de las funciones logarítmicas son iguales inversas, sus representaciones gráficas son simétricas con respecto al eje "x"

Practicamos…

EJERCICIO N°14:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x)=\log_3 x \quad y \quad g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

EJERCICIO N°15:

a)Graficar en un mismo sistema de ejes las funciones $\boldsymbol{f(x)=\log_5 x \quad y \quad g(x)=\log_{\frac{1}{5}} x}$

b)Para cada una de ella indicar: Dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen, si son crecientes o decrecientes.

- **Variaciones de la función logarítmica**

EJERCICIO N°16: a) Para cada función completar la tabla de valores

$\boldsymbol{f(x)=\log_2 x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{g(x)=\log_2(x+3)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{h(x)=\log_2(x-3)}$

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	
8	

x	y
1	
5	
-1	
-2	
-3	

x	y
4	
5	
$\frac{7}{2}$	
7	
3	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.

c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $\boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$?

<u>EJERCICIO N°17:</u> a) Para cada función completar la tabla de valores

$\boldsymbol{f(x) = \log_3 x}$ $\boldsymbol{g(x) = \log_3 x \quad - 2}$ $\boldsymbol{h(x) = \log_3 x \quad + 2}$

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

x	y
1	
3	
9	
$\frac{1}{3}$	

b) Graficar los datos de cada tabla en un mismo sistema de ejes cartesianos.

c) Para cada una de ellas indicar: dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

d) ¿Hacia dónde se desplaza la gráfica de cada función respecto de $\boldsymbol{f(x) = \log_3 x}$?

<u>EJERCICIO N°18:</u>

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\boldsymbol{h(x) = \log_4(x+1)}$ $\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{g\ (x) = \log_4(x-2)}$ a partir de la función $f(x) = \boldsymbol{\log_4 x}$.

b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

<u>EJERCICIO N°19:</u>

a)Graficar en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $\boldsymbol{h(x) = \log_5 x + 5}$ $\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{g\ (x) = \log_4 x - 10}$ a partir de la función $f(x) = \boldsymbol{\log_5 x}$.

b)Para cada una de ellas indicar: desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Es creciente o decreciente?

EJERCICIO N°20:

1) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función $y = \log_3(x+1) - 2$

2) Graficar la función $y = \log_3 x$ y a partir de ella trasladar la función $y = \log_3(x-2) + 1$

3) Para cada una de ellas indicar desplazamientos, dominio, imagen, asíntota, raíces, ordenada al origen. ¿Son crecientes o decrecientes?

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

ECUACIONES EXPONENCIALES

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita figura como exponente.

Ejemplo:

a) $2^x = 16$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$ **e)** $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

b) $3^{x-1} = 27$ **d)** $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ **f)** $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EXPONENCIALES

PRIMER CASO: Se transforma la ecuación dad en una igualdad de la misma base

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ igualando los exponentes

Verificación: $2^4 = 16$

b) $3^{x-1} = 27$

$3^{x-1} = 3^3$ igualando los exponentes

$x - 1 = 3$

$x = 3 + 1 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

Verificación: $3^{4-1} = 27$

$3^3 = 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

$\left[(2)^{-1}\right]^x = 2^{\frac{3}{2}}$

$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$

$-x = \frac{3}{2}$ igualando los exponentes

$\boxed{x = -\frac{3}{2}}$

Verificación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$

$\sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

$\sqrt{8} = \sqrt{8}$

SEGUNDO CASO: Las ecuaciones exigen transformaciones basadas en propiedades ya vistas

d)

$3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ aplicamos propiedades de la potencia de igual base

$3^{x} \cdot 3^{-1} + 3^{x} \cdot 3 = 90$ $\left(a^{m+n} = a^{m} \cdot a^{n}\right)$

$3^{x} \cdot \left(\frac{1}{3} + 3\right) = 90$ extraemos factor común 3^x

$3^{x} \cdot \frac{10}{3} = 90$

$3^{x} = 90 : \frac{10}{3}$

$3^{x} = 27$

$3^{x} = 3^{3}$ igualamos exponentes

$\boxed{x = 3}$

Verificación: $3^{3-1} + 3^{3+1} = 90$

$3^{2} + 3^{4} = 90$

$9 + 81 = 90$

$90 = 90$

e)

$3 \cdot 4^{x+1} = 96$ transponemos el 3

$4^{x+1} = 96 : 3$

$4^{x+1} = 32$

$\left(2^{2}\right)^{x+1} = 2^{5}$

$2^{2x+2} = 2^{5}$ igualamos exponentes

$2x + 2 = 5$

$2x = 5 - 2$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$

Verificación: $3 \cdot 4^{\frac{3}{2}+1} = 96$

$3 \cdot 4^{\frac{5}{2}} = 96$

$3 \cdot 2^{5} = 96$

$3 \cdot 32 = 96$

$96 = 96$

TERCER CASO: A través de una ecuación de segundo grado

f)

$2^{2x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$ aplicamos propiedad de la potencia

$\left(2^{x}\right)^{2} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$ reemplazamos $2^x = z$

$(z)^{2} - 9 \cdot z + 8 = 0$ resolvemos la ecuación de segundo grado

$z_1 = 8$

$z_2 = 1$

como $2^{x} = z \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 2^{x} = 8 \\ 2^{x} = 2^{3} \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 2^{x} = 1 \\ 2^{x} = 2^{0} \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

Verificación: si $x = 3$

$2^{2 \cdot 3} - 9 \cdot 2^{3} + 8 = 0$

$2^{6} - 9 \cdot 2^{3} + 8 = 0$

$64 - 72 + 8 = 0$

$0 = 0$

si $x = 0$

$2^{2 \cdot 0} - 9 \cdot 2^{0} + 8 = 0$

$2^{0} - 9 \cdot 2^{0} + 8 = 0$

$1 - 9 + 8 = 0$

$0 = 0$

EJERCICIO N°21:

1. Transformen cada una de las siguientes expresiones en una potencia de igual base:

a) $3^{x} \cdot 3^{x+1} =$

b) $2^{-x} \cdot 4 =$

c) $25^{x-1} : 5^{2x+4} =$

d) $8^{x} \cdot 4^{2-x} \cdot 2^{2x+2} =$

2. Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales y verifiquen:

a) $5^{x} = 625$

b) $3^{x-1} = 81$

c) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

d) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$

e) $6^{2x-2} = 1$

f) $4^{\frac{x-2}{x+3}} = 4^{\frac{x}{x+2}}$

g) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 17$

h) $3^{x-5} = 27^{1-x}$

i) $2^{4x-x^2} = 8$

j) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

k) $3^{x} - 3^{x-2} + 3^{x+2} = 89$

l) $4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 4 = 0$

m) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

Concepto de logaritmo: Se llama logaritmo de un número real positivo con base real positiva y distinto de 1, al exponente que se debe elevar la base "a" para obtener dicho número.

$$\log_{\underbrace{a}_{\text{base}}} \underbrace{N}_{\text{argumento}} = \underbrace{C}_{\text{logaritmo}} \Rightarrow a^{C} = N \begin{cases} 1 \neq a > 0 \\ N > 0 \end{cases}$$

Ejemplo: ✓ $\log_2 8 = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

✓ $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

Para tener en cuenta:

La potenciación tiene dos operaciones inversas:

$2^4 = 16 \longrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$ se obtiene la base

$\searrow \log_2 16 = 4$ se obtiene el exponente

EJERCICIO N°22: Calcular siempre que sea posible

a) $\log_9 1 =$

b) $\log_5 25 =$

c) $\log_7 7 =$

d) $\log_2 0 =$

e) $\log_{25} 5 =$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

g) $\log_2 \frac{1}{2} =$

h) $\log_{\sqrt{2}} 2 =$

i) $\log_2 \sqrt{8} =$

j) $\log_5 \sqrt[3]{5} =$

k) $\log_9 \frac{1}{3} =$

Logaritmos decimales y naturales: Algunos logaritmos se pueden obtener directamente usando la calculadora científica. Ellos son:

- los de base 10, llamados **logaritmos decimales**. Se simboliza $\boxed{log}$. Se omite escribir la base 10.
- Los de base *e* ("*e*"= irracional 2,718281...), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos** $\boxed{ln}$.

EJERCICIO N°23: Encontrar los siguientes logaritmos utilizando la calculadora

a) $log\ 202 =$

b) $log\ 20 =$

c) $log\ 2{,}02 =$

d) $log\ 0{,}242 =$

e) $ln\ 7 =$

f) $ln\ 25 =$

g) $ln\ 250 =$

h) $ln\ 0{,}25 =$

También es posible obtener con la calculadora los siguientes logaritmos:

$$log_5 32 = \frac{log\ 32}{log\ 5} = \frac{1{,}505}{0{,}699} = 2{,}153$$

$$log_5 32 = \frac{ln\ 32}{ln\ 5} = \frac{3{,}465}{1{,}61} = 2{,}153$$

Este procedimiento se llama **cambio de base**, lo que nos permite utilizar la calculadora científica en todos los casos.

Simbólicamente: $log_a N = \dfrac{log\ N}{log\ a}$

$$log_a N = \frac{ln\ N}{ln\ a}$$

EJERCICIO N°24: Calcular aplicando logaritmo decimal

a) $log_4 100 =$ b) $log_3 10 =$ c) $log_{\frac{1}{2}} 7 =$ d) $log_5 \frac{1}{8} =$

EJERCICIO N°25: Calcular aplicando logaritmo neperiano

a) $log_2 165 =$ b) $log_5 72 =$ c) $log_3 8{,}21 =$ d) $log_{15} 0{,}25 =$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

1) Logarito de un producto: Es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$\log_a(P\cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2(4\cdot 16) = \log_2 4 + \log_2 16$$

$$\log_2 64 = 2 + 4$$

$$6 = 6$$

2) Logarito de una división: Es igual a logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_5(25 : 5) = \log_5 25 - \log_5 5$$

$$\log_5 5 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

3) Logarito de una potencia: Es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$\log_a P^n = n\cdot\log_a P$$

Ejemplo:

$$\log_2 8^3 = \log_2(8\cdot 8\cdot 8)$$

$$\log_2 512 = \log_2 8 + \log_2 8 + \log_2 8$$

$$9 = 3\cdot\log_2 8$$

$$9 = 3.3$$

$$9 = 9$$

4) Logarito de una raíz: Es igual al logaritmo del argumento dividido en el indice. Esto es…

$$\log_a \sqrt[n]{Q} = \log_a Q^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\log_a Q$$

Ejemplo:

$$\log_2 \sqrt[3]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_2 2 = \frac{1}{3}\cdot\log_2 8$$

$$1 = \frac{1}{3}\cdot 3$$

$$1 = 1$$

EJERCICIO N°26: Resolver aplicando propiedades

a) $\log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$

b) $\log_2\left(\frac{1}{32} : 64\right) =$

c) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right)^3 =$

d) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$

e) $\log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$

f) $\log_3 27^4 =$

g) $\log_2\left(16 : \frac{1}{2}\right) =$

h) $\log_3(9 \cdot 81) =$

EJERCICIO N°69: Expresar como un solo logaritmo y resolver

a) $2 \cdot \log_5 \frac{1}{10} - 4 \cdot \log_5 1 + \log_5 16 =$

b) $\log_6 3 + \frac{\log_6 27}{3} + \log_6 4 =$

c) $\left[\log_4 \frac{1}{32} - \log_4 2\right]^2 =$

d) $3 \cdot \log_5 5 + \log_5 \frac{1}{5} - \frac{\log_5 \frac{1}{125}}{3} =$

EJERCICIO N°27: Calcular usando la definición

a) $\log_3 27 =$

b) $\log_5 125 =$

c) $\log\ 10.000 =$

d) $\log\ 0,01 =$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 64 =$

f) $\log_2 0,5 =$

g) $\log_3 \sqrt[5]{81} =$

h) $\log_3 \sqrt{27} =$

i) $\log_{\frac{1}{4}} 16 =$

j) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} =$

k) $\log_2 0,25 =$

l) $\log_{12} 12 =$

m) $\log_5 1 =$

n) $\log_5 \frac{1}{5} =$

o) $\log_{\sqrt{3}} 9 =$

EJERCICIO N°28: Calcular el valor de "x"

a) $\log_2 x = 5$

b) $\frac{1}{2} = \log_4 x$

c) $\log_3(x+1) = 2$

d) $\log_5 x = -3$

e) $\log_2 x = \frac{1}{7}$

f) $\log\ x = -2$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS:

Una ecuación es logarítmica cuando la incógnita esta en el argumento o la base del logaritmo. Ej::

a) $\log_4(x+12) = 2$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

c) $\log_2(x-1) + \log_2 3 - \log_2(x+3)$

d) $\log_4 x - \log_2 3 = \log_2 5$

e) $3^x = 10$

f) $3 \cdot \log_2^2 x - 6 \cdot \log_2 x = -3$

Resolución de ecuaciones logarítmicas

1º caso: Aplicando la definición de logaritmo:

a)

$$\log_4(x+12) = 2$$
$$4^2 = x + 12$$
$$16 = x + 12$$
$$16 - 12 = x$$
$$\boxed{4 = x}$$

Verificación:

$$\log_4(4+12) = 2$$
$$\log_4 16 = 2$$
$$2 = 2$$

2° caso: Aplicando propiedades de los logaritmos:

b) $log_2(x+1)+log_2(x-1)=3$ → aplicando propiedades de los logaritmos

$log_2(x+1)\cdot(x-1)=3$

$log_2\left(x^2-1\right)=3$ → definición de logaritmo

$x^2-1=2^3$

$x^2=8+1$

$x=\sqrt{9}$

$\boxed{x=\pm 3}$

Verificación: $log_2(3+1)+log_2(3-1)=3$

$log_2(4)+log_2(2)=3$

$2+1=3$

$3=3$

$x=-3$
no verifica

3° caso: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

c) $log_2(x-1)+log_2 3=log_2(x+3)$ → propiedades del producto

$log_2(x-1)\cdot 3=log_2(x+3)$ → logaritmos de igual base tienen igual argumento

$(x-1)\cdot 3=x+3$

$3\cdot x-3=x+3$

$3\cdot x-x=3+3$

$2\cdot x=6$

$x=6:2$

$\boxed{x=3}$.

Verificación: $log_2(3-1)+log_2 3=log_2(3+3)$

$log_2(2)+log_2 3=log_2(6)$

$log_2 2\cdot 3=log_2 6$

$log_2 6=log_2 6$

4° caso: Aplicando propiedades y cambios de base:

d) $log_4 x-log_2 3=log_2 5$

↓
cambio de base

$\frac{log_2 x}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$

$\frac{log_2 x}{2}-log_2 3=log_2 5$ → aplicando propiedad de la raíz y del cociente

$log_2\left(\sqrt{x}:3\right)=log_2 5$

$\left(\sqrt{x}:3\right)=5$

$\sqrt{x}=15$

$x=15^2$

$x=225$

Verificación: $log_4 225-log_2 3=log_2 5$

$\frac{log_2 225}{log_2 4}-log_2 3=log_2 5$

$log_2\left(\sqrt{225}:3\right)=log_2 5$

$\left(\sqrt{225}:3\right)=5$

$\sqrt{225}=15$

$15=15$

5° caso: Para resolver ecuaciones exponenciales:

$$3^x = 10$$

→ aplicando logaritmos decimales a ambos miembros de la igualdad

$$\log 3^x = \log 10$$

$$x \cdot \log 3 = \log 10$$

$$x = \frac{\log 10}{\log 3}$$

$$x = \frac{1}{0,477}$$

$$\boxed{x = 2,096}$$

Verificación:

$3^{2,096} \cong 10$

6° caso: A través de una ecuación de segundo grado:

$$3 \cdot \log_2{}^2 x - 6 \cdot \log_2 x = -3$$

si reemplazo $\log_2 x = z$

$$3 \cdot z^2 - 6 \cdot z + 3 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado → $z = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{6}$$

$$z = \frac{6 \pm 0}{6}$$

$$\boxed{z = 1}$$

$$z = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1$$

$$2^1 = x$$

$$\boxed{2 = X}$$

Verificación:

$$3 \cdot \log_2{}^2 2 - 6 \cdot \log_2 2 = -3$$

$$3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

$$3 - 6 = -3$$

$$-3 = -3$$

EJERCICIO N°29: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\log_5(x-2) = -1$

b) $\log\ (x^2-3) = 0$

c) $\log_{(x+1)} 3 = 1$

d) $\log_2 x + \log_2 3 = 4$

e) $2 \cdot \log_{\frac{1}{8}}(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-2) = 4$

f) $3 \cdot \log_4(x+2) - \log_4(x+2) = 1$

g) $\log_2(x-1) + 1 = \log_2(x-2) + \log_2(7-x)$

h) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

i) $\log_2 x + \log_8 x = \dfrac{1}{2}$

j) $0,3^x = 1,5$

k) $3 \cdot 2^x = 10$

l) $(1,12)^x = 3$

m) $(\log_4 x)^2 + 2 \cdot \log_4 x - 3 = 0$

n) $2 \cdot \log^2 x + 5 \cdot \log\ x = 3$

EJERCICIOS DE REPASO

EJERCICIO A: Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ 3^{x+3} = 9$ $\qquad b) 25^{x-1} = 125$ $\qquad c) 3^{2.x} = \dfrac{1}{81}$

$d) 8^{2.x-1} = 128$ $\qquad e)\ 4^{x+1} = 32$ $\qquad f) 5^{(x-1).(x+2)} = 1$ $\qquad g) 2^{4.x} = 0{,}5^{4.x+2}$

EJERCICIO B: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\boxed{\log_2 x = \log_2 16}$ $\qquad$ b) $\boxed{\log_3 x - \log_3(x-2) = 2}$

EJERCICIO C: Resolver

a) $\boxed{\dfrac{\left(\log_5 \frac{1}{25}\right)^2}{\log_3 81} - \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 8}}$ b) $\boxed{\log_a (x \cdot y)^3}$

EJERCICIO D:

El valor de "x" en las siguientes ecuaciones es:

$\boxed{\log_{x+2} 3 = 1}$

a) $x = 0$ $\qquad$ b) $x = 1$ $\qquad$ c) $x = -1$ $\qquad$ d) $x = -2$

$\boxed{\frac{1}{3} \cdot \log_2(1+7x) = 2}$

a) $x = \frac{3}{7}$ $\qquad$ b) $x = 1$ $\qquad$ c) $x = -9$ $\qquad$ d) $x = 9$

$\boxed{2 \cdot \log_{\sqrt{3}}(5-x) = 4}$

a) $x = -4$ $\qquad$ b) $x = 20$ $\qquad$ c) $x = 2$ $\qquad$ d) $x = -76$

$\boxed{\log_3(x+5) - \log_3(x-1) = 1}$

a) $x = 4$ $\qquad$ b) $x = \frac{1}{4}$ $\qquad$ c) $x = -\frac{7}{2}$ $\qquad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_x 2 + \log_x 6 = 2 + \log_x 3}$

a) $x = 6$ $\qquad$ b) $x = 4$ $\qquad$ c) $x = -4$ $\qquad$ d) $x = 2$

$\boxed{\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2 8}$

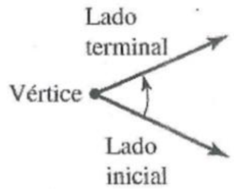
a) $x = \pm 1$ $\qquad$ b) $x = \pm 2$ $\qquad$ c) $x = \pm 3$ $\qquad$ d) $x = \pm 4$

$\boxed{2\log_3 x - \log_3(x+1) - \log_3 x = 2}$

a) $x_1 = -\frac{9}{8}$, $x_2 = 0$ $\qquad$ b) $x_1 = -\frac{8}{9}$, $x_2 = 0$ $\qquad$ c) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$ $\qquad$ d) $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = 0$

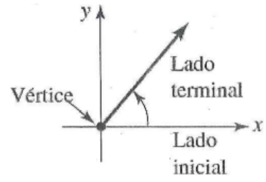
UNIDAD N°2: TRIGONOMÉTRIA

Ángulos orientados



Un ángulo orientado está formado por dos semirrectas con el mismo origen. Las semirrectas son los lados del ángulo y el origen común se llama vértice del ángulo. Uno de los lados es el lado inicial y el otro se llama lado terminal.

Posición normal del ángulo orientado



El ángulo orientado puede ubicarse en un sistema cartesiano de tal manera que su vértice coincide con el origen del sistema y su lado inicial con el semieje positivo x. En ese caso se dice que el ángulo orientado está en posición normal.

Ángulos orientados + y –

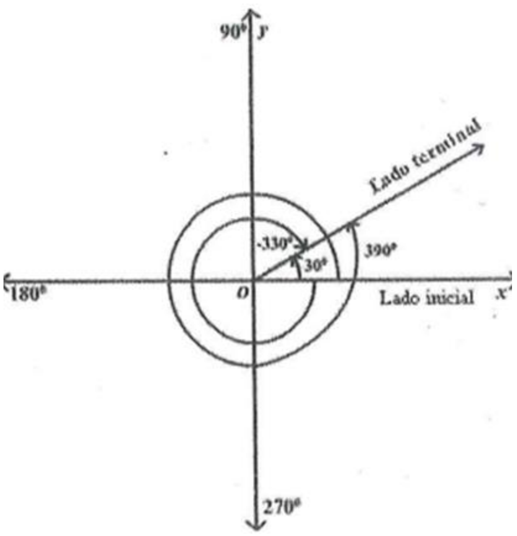
Los ángulos orientados pueden tener dos sentidos de giro:

- Sentido positivo: contrario al movimiento de las agujas del reloj.
- Sentido negativo: movimiento de las agujas del reloj.

Ángulos orientados en un sistema cartesiano

Las características de un ángulo orientado en un sistema cartesiano son:

- Su vértice coincide con el origen de coordenadas.
- Está generado por la rotación de una semirrecta con origen en (0;0). La semirrecta parte desde una posición inicial coincidente con el semieje positivo de las x y gira manteniendo fijo su origen hasta llegar a una posición que marca su lado terminal.
- La rotación de la semirrecta puede ser mayor que un giro.



En el gráfico se muestran tres ángulos que tienen el mismo lado terminal:

- positivo de 30 ° (menor que un giro)
- negativo de 330° (menor que un giro)
- positivo de 390° (mayor que un giro)

Se considera al plano cartesiano dividido en cuatro sectores llamados cuadrantes: Se determina en cuál de los cuadrantes se encuentra el lado terminal del ángulo y esta posición da la ubicación del ángulo. El lado terminal de los tres ángulos representados está en el primer cuadrante por lo que todos ellos pertenecen a dicho cuadrante.

1)a) Representa en un plano cartesiano los siguientes ángulos:

- 165°
- - 50°
- 840°
- 230°

b) Indica en qué cuadrante está cada ángulo.

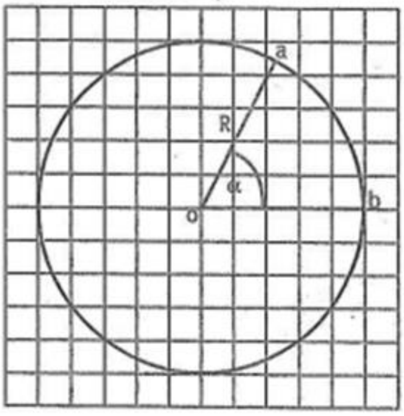
Sistema de medición de ángulos: Para medir ángulos se usan distintos sistemas de medición

- **Sistema sexagesimal:** la unidad de medida en este sistema es el **grado sexagesimal** (1°), que se obtiene al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1° = \frac{1 \text{ recto}}{90} \Rightarrow 1 \text{ recto} = 90°$$

- **Sistema circular:** la unidad de medida en este sistema es el radián.

Se llama **radián** al ángulo central que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.



$r = \overline{ob}$

$\widehat{ab} = \overline{ob}$

$\hat{\alpha} = 1$ radián

$\hat{\alpha} = \dfrac{\widehat{ab}}{\overline{ob}}$

Equivalencia entre los sistemas

Los ángulos centrales son proporcionales a los arcos que intersecan, por lo tanto:

$$\frac{\hat{\alpha}}{\widehat{ab}} = \frac{360°}{\text{long } C(o;\overline{ob})} \Rightarrow \frac{1 \text{ radián}}{\overline{ob}} = \frac{360°}{2\pi\ \overline{ob}} \Rightarrow \frac{2\pi\ \overline{ob}}{\overline{ob}} = 360° \Rightarrow 2\pi = 360°$$

En la siguiente tabla figuran algunas equivalencias entre los dos sistemas de medición de ángulos.

Sistema sexagesimal	Sistema circular
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

<u>EJERCICIO N°30:</u> Calcular en grados sexagesimal

a. $4\pi =$ ☐　　c. 2 radianes = ☐　　e. $\frac{5}{4}\pi =$ ☐

b. $\frac{\pi}{6} =$ ☐　　d. $1{,}5\ \pi =$ ☐　　f. $2{,}75\ \pi =$ ☐

<u>EJERCICIO N°31:</u> Expresar los siguientes ángulos en radianes, en función de **π.**

a. 120° = ☐　　c. 315° = ☐　　e. 135° = ☐

b. 225° = ☐　　d. 100° = ☐　　f. 270° = ☐

<u>EJERCICIO N°32:</u> Marcar las opciones correctas

a. ¿Cuál ángulo es equivalente a $\frac{\pi}{3}$?

○ 90°　　○ 120°　　○ 60°　　○ 30°

b. ¿Cuál ángulo es equivalente a 45°?

○ $\frac{\pi}{2}$　　○ $\frac{\pi}{4}$　　○ $\frac{\pi}{3}$　　○ π

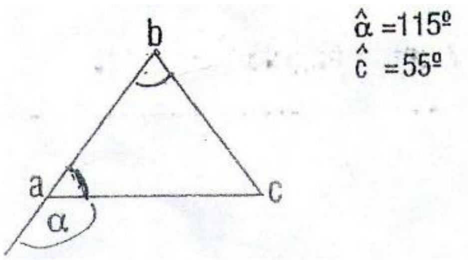
c. ¿Cuáles ángulos son agudos?

○ 100°　　○ $\frac{\pi}{8}$　　○ $\frac{2}{5}\pi$　　○ 10°

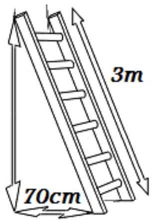
TRIGONOMETRÍA

En años anteriores estudiamos algunas propiedades de los ángulos de un triángulo, por ejemplo, la propiedad que relaciona los ángulos interiores de un triángulo (la suma de los ángulos anteriores de un triángulo es igual 180°) o la propiedad que relaciona un ángulo interior con el correspondiente ángulo exterior consecutivo (la suma de ángulo exterior con su correspondiente ángulo interior consecutivo es igual 180°). También estudiamos el "Teorema de Pitágoras" que relaciona los lados de un triángulo rectángulo. Para recordarlos se propone resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio N°33: Calcular el valor de los ángulos $\hat{a}$ y $\hat{b}$ con los siguientes datos



Ejercicio N°34: Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.

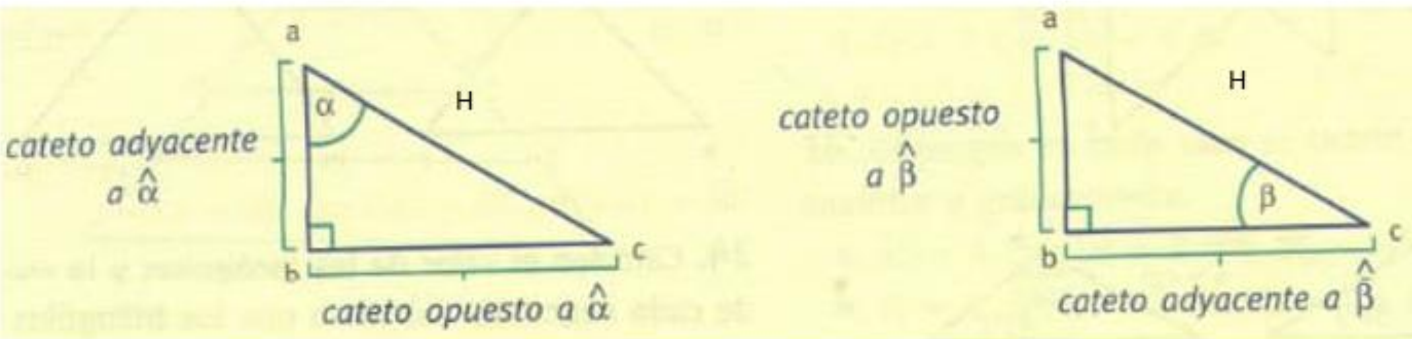


Ahora se nos presenta el problema de calcular el valor de uno de los ángulos dados el valor de sus lados. ¿Es posible establecer esta relación?

La diciplina de la matemática que trata este tipo de relaciones y problemas es la **TRIGONOMETRÍA.**

Analizaremos las relaciones que vinculan los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

Consideremos pues un triángulo rectángulo, donde el ángulo recto es $\hat{b}$ y el lado opuesto al ángulo recto su hipotenusa "**H**". Cada cateto recibe un nombre según el ángulo agudo que se considere.



¿Cuántas razones puedes formar con los tres lados?

$$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa};\ \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa};\ \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto};\ \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente};\ \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto};\ \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

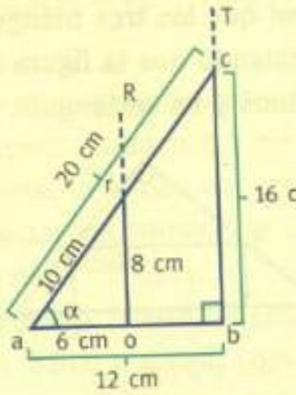
Son seis razones en total.

Sería interesante analizar lo que ocurre con estas razones cuando varían los lados o los ángulos del triángulo.

Si trazamos rectas paralelas a cualquiera de los catetos, cada una de ellas determina triángulos semejantes y que tienen en común el ángulo α. Por ejemplo:

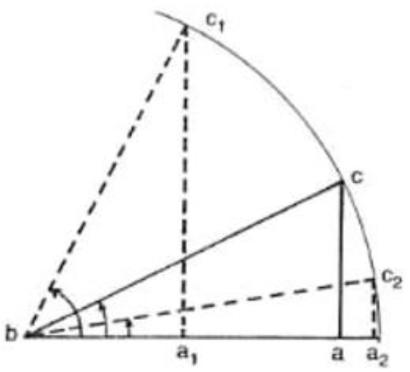
Si se consideran los triángulos rectángulos $\overset{\triangle}{aor}$ y $\overset{\triangle}{abc}$, se pueden formar las siguientes razones con las longitudes de los lados.

En $\overset{\triangle}{aor}$	En $\overset{\triangle}{abc}$
$\frac{\overline{or}}{\overline{ar}} = 0{,}8$	$\frac{\overline{bc}}{\overline{ac}} = 0{,}8$
$\frac{\overline{ao}}{\overline{ar}} = 0{,}6$	$\frac{\overline{ab}}{\overline{ac}} = 0{,}6$
$\frac{\overline{or}}{\overline{ao}} = 1{,}\hat{3}$	$\frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} = 1{,}\hat{3}$



Las razones que se formaron con las medidas de los lados dependen únicamente del ángulo $\hat{\alpha}$.

Decimos entonces que la razón de los pares de lados correspondientes es constante. Y podemos asegurar lo mismo para las razones restantes.



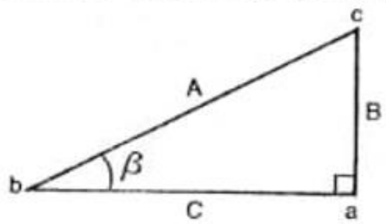
Hagamos variar ahora el ángulo β girando el lado $\overline{ac}$.

Es evidente que:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} \neq \frac{\overline{a_1c_1}}{\overline{bc_1}} \neq \frac{\overline{a_2c_2}}{\overline{bc_2}}$$

pues al aumentar un lado, el otro disminuye.

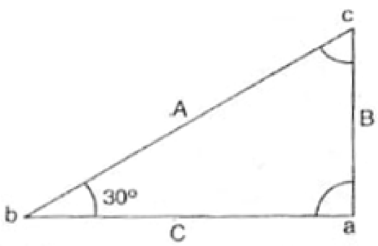
Hemos verificado que las razones entre pares de lados se mantienen constantes mientras el ángulo es constante, y varían al variar el ángulo. Es decir, estas razones **dependen del ángulo** y no de los lados. Cada una de las seis razones consideradas **es un número** que recibe un nombre especial.



En $\overset{\triangle}{abc}$ consideramos el ángulo β
A: hipotenusa
B: cateto opuesto a β
C: cateto adyacente a β

		Se anota
1.	$\frac{B}{A} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \text{seno de } \beta$	sen β
2.	$\frac{C}{A} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{coseno de } \beta$	cos β
3.	$\frac{B}{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \text{tangente de } \beta$	tg β
4.	$\frac{C}{B} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \text{cotangente de } \beta$	cotg β
5.	$\frac{A}{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \text{secante de } \beta$	sec β
6.	$\frac{A}{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \text{cosecante de } \beta$	cosec β

Veamos cómo pueden calcularse aproximadamente estas 6 razones para un cierto ángulo. Sea por ejemplo, un ángulo de 30°. Se construye un triángulo rectángulo con un ángulo de 30° y se mide la longitud de los lados.



$\hat{b} = 30°$
$A = 6$ cm
$B = 3$ cm
$C = 5{,}2$ cm

Calculamos las razones correspondientes.

$\text{sen } 30° = \frac{B}{A} = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0{,}5$ $\quad$ $\text{cotg } 30° = \frac{C}{B} = \frac{5{,}2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 1{,}7\widehat{3}$

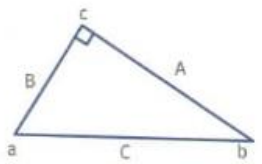
$\cos 30° = \frac{C}{A} = \frac{5{,}2 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 0{,}8\widehat{6}$ $\quad$ $\sec 30° = \frac{A}{C} = \frac{6 \text{ cm}}{5{,}2 \text{ cm}} = 1{,}15$

$\text{tg } 30° = \frac{B}{C} = \frac{3 \text{ cm}}{5{,}2 \text{ cm}} = 0{,}577$ $\quad$ $\text{cosec } 30° = \frac{A}{B} = \frac{6 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = 2$

Ejercicio N°35: Completar teniendo en cuenta el triángulo **abc**

a.

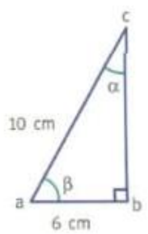
- A es el cateto adyacente al ángulo ____.
- A es el cateto opuesto al ángulo ____.
- B es el cateto adyacente al ángulo ____.
- B es el cateto opuesto al ángulo ____.



b. Escriban las razones trigonométricas.

- sen $\hat{a}$ = ____
- cosec $\hat{a}$ = ____
- sen $\hat{b}$ = ____
- cosec $\hat{b}$ = ____
- cos $\hat{a}$ = ____
- sec $\hat{a}$ = ____
- cos $\hat{b}$ = ____
- sec $\hat{b}$ = ____
- tg $\hat{a}$ = ____
- cotg $\hat{a}$ = ____
- tg $\hat{b}$ = ____
- cotg $\hat{b}$ = ____

Ejercicio N°36: Calcular las razones trigonométricas en el siguiente triángulo



- sen $\hat{\alpha}$ = ____
- cos $\hat{\alpha}$ = ____
- tg $\hat{\alpha}$ = ____
- cotg $\hat{\alpha}$ = ____
- sec $\hat{\alpha}$ = ____
- cosec $\hat{\alpha}$ = ____

- sen $\hat{\beta}$ = ____
- cos $\hat{\beta}$ = ____
- tg $\hat{\beta}$ = ____
- cotg $\hat{\beta}$ = ____
- sec $\hat{\beta}$ = ____
- cosec $\hat{\beta}$ = ____

USO DE LA CALCULADORA

Las calculadoras científicas permiten hallar las razones trigonométricas de un ángulo.
Si los ángulos se miden en grados sexagesimales, como en nuestro caso, la calculadora tiene que estar en modo DEG (en el visor se puede observar una D pequeña).
Las teclas para hallar el seno, el coseno y la tangente son sin, cos y tan.

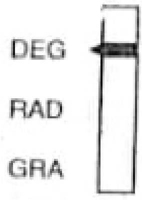
Primer Paso: "Elección del sistema"

En general, las calculadoras están preparadas para trabajar en tres sistemas de unidades angulares.

a) **Sistema sexagesimal.** Es el que usas habitualmente.
La unidad de amplitud es el grado sexagesimal (en inglés DEGREE), igual a la noventava parte del ángulo recto.

b) **Sistema centesimal.**
La unidad de amplitud es el grado centesimal (en inglés GRADE), igual a la centésima parte del ángulo recto.

c) **Sistema circular.**
La unidad de amplitud es el radián.
Este sistema será estudiado más adelante.
Para las computadoras se acepta universalmente el idioma inglés.
Por eso encontrarás en inglés los nombres que te hemos señalado para cada sistema.
Por ahora vamos a trabajar con el sistema sexagesimal.
Deberás colocar entonces el selector de la calculadora en la posición DEG.



Segundo Paso: "Introducción de datos"

A continuación debes introducir en la calculadora la amplitud del ángulo.

a) Algunas calculadoras están preparadas para recibir el ángulo expresado en grados, minutos y segundos.

Para ello cuentan con la tecla ° ’ ”

Ejemplo:

Si se conoce el ángulo y se quiere hallar el valor de la razón trigonométrica, se deben seguir estos pasos.

$sen\ 30° = 0{,}5 \rightarrow$ sin 3 0 =

$cos\ 52° 45' \cong 0{,}762 \rightarrow$ cos 5 2 °’” 4 5 °’” =

$tg\ 110° 55' 8'' \cong -1{,}415 \rightarrow$ tan 1 1 0 °’” 5 5 °’” 8 °’” =

Si se conoce la razón trigonométrica y se quiere saber a qué ángulo corresponde, se deben seguir estos pasos.

$sen\ x = 0{,}41 \Rightarrow x \cong 14° 28' 39'' \rightarrow$ SHIFT sin 0 . 4 1 = SHIFT °’”

$cos\ x = -0{,}514 \Rightarrow x \cong 118° 33' 18'' \rightarrow$ SHIFT cos (–) 0 . 5 4 1 = SHIFT °’”

$tg\ x = 1{,}839 \Rightarrow x \cong 55° 32' 12'' \rightarrow$ SHIFT tan 1 . 8 3 9 = SHIFT °’”

Ejercicio N°37: Encontrar las siguientes razones trigonométricas

a. $\cos 25° =$

b. $\operatorname{sen} 25° =$

c. $\operatorname{tg} 25° =$

d. $\cos 75° =$

e. $\operatorname{sen} 75° =$

f. $\operatorname{tg} 75° =$

g. $\operatorname{sen} 48° 23' 45'' =$

h. $\operatorname{sen} 48° 45'' =$

i. $\operatorname{tg} 45° =$

Ejercicio N°38: Encontrar la medida del ángulo en cada caso

a. $\cos \alpha = 0{,}707$

b. $\text{sen}\, \alpha = 0{,}707$

c. $\text{tg}\, \alpha = 0{,}707$

d. $\cos \alpha = 0{,}25$

e. $\text{sen}\, \alpha = 0{,}5$

f. $\text{tg}\, \alpha = 0{,}42$

g. $\cos \alpha = 0{,}5$

h. $\text{sen}\, \alpha = 0{,}99$

i. $\text{tg}\, \alpha = 2$

Ejercicio N°39: Investigar con la calculadora y responder

a)¿Entre que valores varía el seno y el coseno de un ángulos agudo?

b)¿Pasa lo mismo con la tangente de un ángulo agudo?

Ejercicio N°40: Completar usando la calculadora

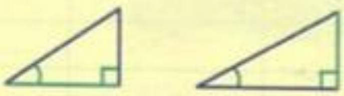
Razón trigonométrica	Ángulo				
	0°	30°	45°	60°	90°
seno					
coseno					
tangente					

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo significa hallar las medidas de los tres lados y de los ángulos agudos a partir de ciertos datos, usando las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Para resolver un triángulo rectángulo, como el ángulo recto ya está determinado, se debe conocer al menos el valor de uno de sus ángulos agudos y un lado, o el valor de dos de sus lados.

- **Dados un ángulo agudo y uno de sus lados.**



ángulo agudo y cateto

ángulo agudo e hipotenusa

Para calcular el ángulo $\hat{b}$, debe aplicarse la propiedad de los ángulos agudos.

$$\hat{c} + \hat{b} = 90° \Rightarrow \hat{b} = 90° - \hat{c} \Rightarrow \hat{b} = 90° - 34° \Rightarrow \hat{b} = 56°$$

Para calcular el lado $\overline{ac}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el lado.

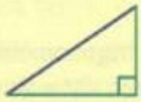
$$\cos \hat{c} = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} \Rightarrow \overline{ac} = \overline{bc} \,.\, \cos \hat{c} \Rightarrow \overline{ac} = 3{,}5\text{ cm} \,.\, \cos 34° \Rightarrow \overline{ac} \cong 3{,}5\text{ cm} \,.\, 0{,}83$$

$$\Rightarrow \overline{ac} \cong 2{,}902\text{ cm}$$

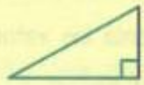
Para calcular el lado $\overline{ab}$, se razona de la misma manera.

$$\text{sen}\, \hat{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \overline{ab} = \overline{bc} \,.\, \text{sen}\, \hat{c} \Rightarrow \overline{ab} = 3{,}5\text{ cm} \,.\, \text{sen}\, 34° \Rightarrow \overline{ab} \cong 3{,}5\text{ cm} \,.\, 0{,}56 \Rightarrow \overline{ab} \cong 1{,}96\text{ cm}$$

- **Dados dos de sus lados.**



dos catetos



cateto e hipotenusa

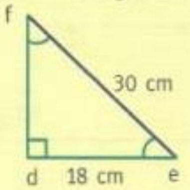
Para calcular el lado df, debe aplicarse el teorema de Pitágoras.

$\overline{ef}^2 = \overline{de}^2 + \overline{df}^2 \Rightarrow \overline{df} = \sqrt{\overline{ef}^2 - \overline{de}^2}$

$\overline{df} = \sqrt{(30\text{ cm})^2 - (18\text{ cm})^2}$

$\overline{df} = \sqrt{900\text{ cm}^2 - 324\text{ cm}^2}$

$\overline{df} = 24\text{ cm}$



Para calcular el ángulo $\hat{f}$, se debe recurrir a una razón trigonométrica que relacione los dos datos con el ángulo.

$\text{sen } \hat{f} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}} \Rightarrow \text{sen } \hat{f} = \frac{18\text{ cm}}{30\text{ cm}} \Rightarrow \text{sen } \hat{f} = 0{,}6 \Rightarrow \hat{f} \cong 36°\,52'\,12''$

Para calcular el ángulo $\hat{e}$, debe razonarse de la misma manera.

$\cos \hat{e} = \frac{\overline{de}}{\overline{ef}} \Rightarrow \cos \hat{e} = \frac{18\text{ cm}}{30\text{ cm}} \Rightarrow \cos \hat{e} = 0{,}6 \Rightarrow \hat{e} \cong 53°\,7'\,48''$

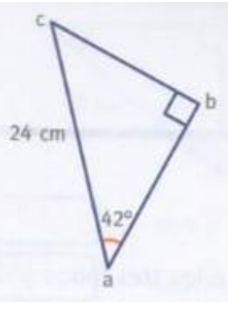
Se puede verificar que: $\hat{e} + \hat{f} = 53°\,7'\,48'' + 36°\,52'\,12'' = 90°$

<u>Ángulo de elevación o depresión</u>

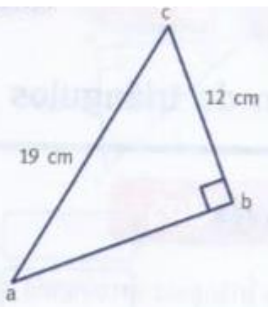
El ángulo formado por la línea horizontal y la línea visual a un objeto se denomina **ángulo de elevación** o **depresión**, según la observación se realice hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

Ejercicio N°41: Resolver los siguientes triángulos rectángulos

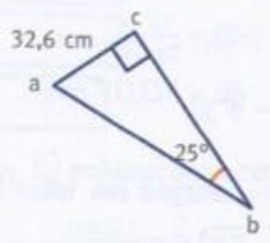
a.



c.



b.



d.

Ejercicio N°42: Pensar y resolver. Dibujar un esquema de la situación

a. Desde una torre de vigilancia una persona observa un auto, con un ángulo de depresión de 59°. Si el auto se encuentra a 35 m de la base de la torre, ¿a qué altura se encuentra el vigilador?

b. Un pintor tiene que realizar un trabajo a 5 metros de altura y tiene una escalera de 6,5 metros. ¿Cuál es el ángulo que debe formar la escalera con el piso para alcanzar la altura que necesita?

c. Juan y Martín observan una antena desde lugares opuestos de un camino en línea recta, con ángulos de elevación de 30° y 55°, respectivamente. Si la antena se encuentra a 15 m de altura, ¿cuál es la distancia que hay entre Juan y Martín?

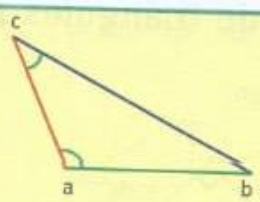
d. Un velero se encuentra ubicado entre dos islas. En el borde más cercano a una de ellas hay un faro de 25 metros de altura y en el borde más cercano a la otra, un acantilado de 15 metros de altura. Desde el velero se observan estos dos puntos con ángulos de elevación de 29° y 30°, respectivamente. ¿De cuál de las dos islas está más cerca el velero?

TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO

Teorema del seno

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

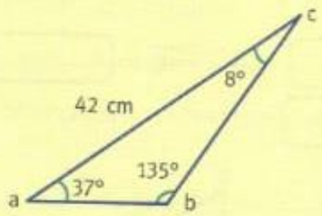
$$\frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{\overline{ac}}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$



Para calcular los lados $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$, se aplica el teorema del seno.

$$\frac{42\text{ cm}}{\operatorname{sen}135^\circ} = \frac{\overline{ab}}{\operatorname{sen}8^\circ} \Rightarrow \overline{ab} \cong 8{,}27\text{ cm}$$

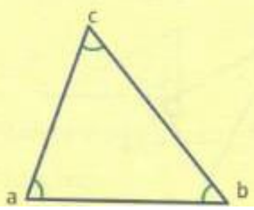
$$\frac{42\text{ cm}}{\operatorname{sen}135^\circ} = \frac{\overline{bc}}{\operatorname{sen}37^\circ} \Rightarrow \overline{bc} \cong 35{,}75\text{ cm}$$



Teorema del coseno

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.

$$\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 - 2\,.\,\overline{bc}\,.\,\overline{ac}\,.\cos\hat{c}$$
$$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2\,.\,\overline{ab}\,.\,\overline{ac}\,.\cos\hat{a}$$
$$\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 - 2\,.\,\overline{bc}\,.\,\overline{ab}\,.\cos\hat{b}$$

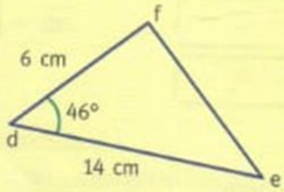


Para calcular el lado $\overline{ef}$, se aplica el teorema del coseno.

$\overline{ef}^2 = \overline{df}^2 + \overline{de}^2 - 2 \,.\, \overline{df} \,.\, \overline{de} \,.\, \cos \hat{d}$

$\overline{ef}^2 \cong 36\ cm^2 + 196\ cm^2 - 2 \,.\, 6\ cm \,.\, 14\ cm \,.\, 0{,}695$

$\overline{ef}^2 \cong 115{,}24\ cm^2 \Rightarrow \overline{ef} \cong 10{,}73\ cm$

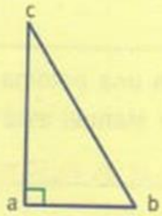


El teorema de Pitágoras es un caso particular del teorema del coseno.

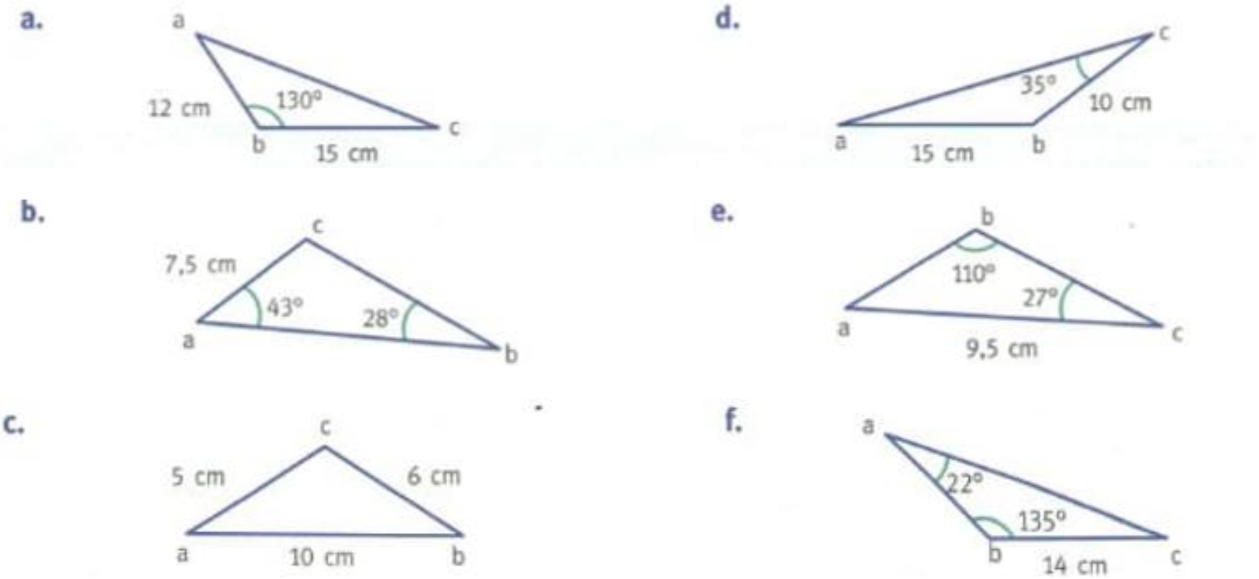
$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \,.\, \overline{ab} \,.\, \overline{ac} \,.\, \cos \hat{a}$

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 - 2 \,.\, \overline{ab} \,.\, \overline{ac} \,.\, \cos 90°$

$\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$



Ejercicio N°43: Calcular el valor de cada ángulo y lado que falta

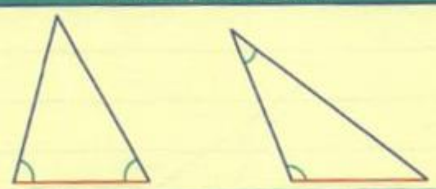
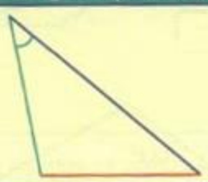


RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto, y resolverlo es hallar el valor de sus tres ángulos y sus tres lados. Para ello hay que aplicar los teoremas del seno, del coseno y la propiedad de la suma de los ángulos interiores, que es igual a 180°.

Siempre que sea posible, se deben utilizar los datos y no los resultados obtenidos.

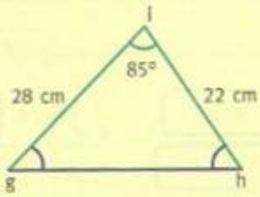
Se pueden presentar distintos casos.

Dos lados y el ángulo comprendido	Un lado y dos ángulos
	
Los tres lados	**Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**
	

Para resolver un triángulo oblicuángulo dados **dos lados y el ángulo comprendido**, se pueden seguir estos pasos.

1. Se aplica el teorema del coseno para calcular el lado gh.

$$\overline{gh}^2 = (28\ cm)^2 + (22\ cm)^2 - 2 \cdot 28\ cm \cdot 22\ cm \cdot \cos 85°$$
$$\overline{gh}^2 \cong 784\ cm^2 + 484\ cm^2 - 107{,}376\ cm^2$$
$$\overline{gh} \cong 34{,}07\ cm$$



2. Se aplica el teorema del seno para averiguar los ángulos $\hat{g}$ y $\hat{h}$.

$$\frac{22\ cm}{\text{sen}\ \hat{g}} = \frac{37{,}08\ cm}{\text{sen}\ 85°} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{g} \cong \frac{22\ cm \cdot \text{sen}\ 85°}{34{,}07\ cm} \Rightarrow \hat{g} \cong 40°\ 2'$$

$$\frac{28\ cm}{\text{sen}\ \hat{h}} = \frac{37{,}08\ cm}{\text{sen}\ 85°} \Rightarrow \text{sen}\ \hat{h} \cong \frac{28\ cm \cdot \text{sen}\ 85°}{34{,}07\ cm} \Rightarrow \hat{h} \cong 54°\ 52'$$

Para **verificar** los resultados obtenidos, se puede aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Ejercicio N°44: Pensar y resolver

Laura y Pablo fueron a conocer el obelisco. Laura se paró a la derecha y observa el extremo superior con un ángulo de elevación desde el piso de 55°. Pablo lo observa desde la izquierda con un ángulo de elevación desde el piso de 65°. La distancia entre Laura y Pablo es de 20,8 metros.

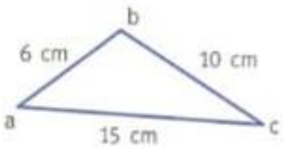
a. ¿Cuál es la altura del obelisco?

b. ¿A qué distancia del obelisco se encuentra Pablo? ¿Y Laura?

Ejercicio N°45: Leer atentamente y resolver

a. Santiago está construyendo una casita de juegos para sus hijos. Para hacer el techo, corta una madera de 2,50 m de largo en tres partes y forma un triángulo. Uno de los lados mide 0,70 m y el otro, 1,20 m. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo?

b. Para colgar unos adornos, Julieta quiere colocar tres clavos en una pared como lo indica la figura. ¿Cuál es la medida del $\hat{c}$?



c) El campanario de la plaza tiene dos niveles desde los que se puede tener la vista panorámica. Desde el primer nivel, se observa el pie del tobogán con un ángulo de depresión de 20° y desde el segundo nivel, con un ángulo de depresión de 35°. La distancia que hay entre el pie del tobogán y el primer nivel es de 26,90 m.

1) ¿Cuál es la distancia entre los dos niveles?

2) ¿A qué distancia del pie del campanario se encuentra el tobogán?

d) Catalina observa la terraza de su edificio con un ángulo de elevación desde el piso de 55°. Si luego de recorrer una distancia de 19,45 m, acercándose al edificio, la observa con un ángulo de elevación desde el piso de 75°, ¿cuál es la distancia que hay desde los pies de Catalina a la terraza de su edificio?

e) Desde un globo aerostático que se encuentra a 6 km de altura se observan dos puestos de peajes cuyos ángulos de depresión son de 50° y 20°, respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran entre sí los puestos de peajes?

UNIDAD N°3: TEORÍA DE CONJUNTOS

El mundo en que vive el ser humano está rodeado de conjuntos: conjunto de utensilios de cocina, conjuntos de muebles de una habitación, conjuntos de libros de una biblioteca, conjunto de árboles, etc.

CONJUNTO

Es una colección de objetos que tienen una o más características en común.

Ejemplos:

- El álbum de figuritas
- Las letras del alfabeto
- Los números 2, 4, 6, 8
- Las estrellas del cielo

Notación: Cada conjunto se designa con una letra mayúscula imprenta. **Ejemplos:** A, B, C

ELEMENTO

Objetos que integran un conjunto.

Ejemplo: Si A representa el conjunto de los dedos de la mano, sus elementos serán:

- Pulgar
- Índice
- Medio
- Anular
- Meñique

Notación: Cada elemento se designa con una letra minúscula imprenta. **Ejemplos:** a, b, c

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Cuando un elemento forma parte de un conjunto, se dice que el elemento pertenece al conjunto.

Notación: Para indicar la pertenencia se utiliza el símbolo $\in$

Cuando un elemento **no está** en un conjunto, dicho elemento **no pertenece** al conjunto.
En símbolos: $\notin$

Ejemplo:

Consideramos el conjunto A de animales domésticos.

Si **p** representa **perro** entonces $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$
Si **e** representa **elefante** entonces $\mathbf{e} \notin \mathbf{A}$

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Para definir un conjunto se utilizan **dos llaves en las cuales se encierran sus elementos o la propiedad que los caracteriza.**

Un conjunto puede definirse por:

- **EXTENSIÓN:** cuando se nombra a cada elemento. Ejemplo: V = { a, e, i, o, u }
- **COMPRENSIÓN:** cuando se especifica la o las características que poseen sus elementos. Se emplea una letra, generalmente x, para representar al elemento genérico.
  Ejemplo: V = { x / x es una vocal del alfabeto }

Ejercicios:

1) Indica si los siguientes conjuntos están definidos por extensión o por comprensión:

A = {-2, 2}
B = {x / x es una estación del año}
C = {x / x es una de las tres primeras letras del abecedario}
D = {a, e, i, o, u}

2) Define por extensión los siguientes conjuntos:

A = {x / x es un número de una cifra mayor que 2}
B = {x / x es una letra de la palabra "ropa"}
C = {x / x es un mes del año}
D = {x / x es capital de Perú}

3) Define por comprensión los siguientes conjuntos:

A = {2, 4, 6, 8 }
B = {Sábado, Domingo}
C = {San Juan, San Luis, La Rioja, Mendoza}
D = {r, o, s, a}

4) Dados los siguientes conjuntos:

A ={ 0, 2, 4, 6, 8, 10}
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
C = {x/ x es dígito mayor que 3}

Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F)

a) $7 \in B$
b) $0 \in A$
c) $3 \notin C$
d) $8 \in A$
e) $5 \notin B$
f) $9 \notin C$
g) $11 \notin A$
h) $8 \in B$

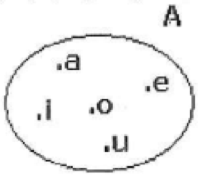
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN CONJUNTO

Para representar gráficamente a los conjuntos se emplean los **DIAGRAMAS DE VENN**.

Diagrama de Venn

Un **diagrama de Venn** es una línea curva cerrada dentro de la cual se colocan los puntos que representan a los elementos que pertenecen al conjunto.

Ejemplo: Si **A = { a, e, i, o, u }** entonces gráficamente será:



CONJUNTO UNIVERSAL

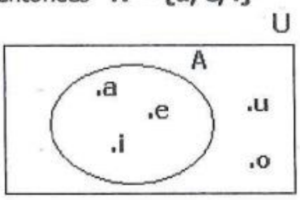
Es el conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia.

Notación: El conjunto universal se simboliza con la letra mayúscula imprenta **U**.

Gráfico: El conjunto universal se representa con un **rectángulo** y dentro de el se ubican los diagramas de Venn que representan los conjuntos.

Ejemplo:

Si **U = {x/x es una vocal}** entonces **A = {a, e, i}**



CONJUNTO VACIO

Es el conjunto que NO tiene elementos.

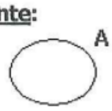
Notación: El conjunto vacío se simboliza con ϕ o **{ }**.

Ejemplo:

A = {x/x es alumno de 6º año del Colegio Juan Pablo II que mide mas de 3 m de altura}

A = { } o **A =** ϕ

Gráficamente:



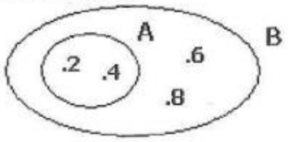
SUBCONJUNTO

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B (o que A está contenido en B).

Notación: Si A es subconjunto de B lo simbolizamos $\mathbf{A \subset B}$.
Si A no es subconjunto de B lo simbolizamos $\mathbf{A \not\subset B}$.

Ejemplo: Si $\mathbf{A = \{2, 4\}}$ y $\mathbf{B = \{2, 4, 6, 8\}}$ entonces $\mathbf{A \subset B}$

Gráficamente:



Observación: para cualquier conjunto A se verifica que:

$\mathbf{\Phi \subset A}$; $\mathbf{A \subset A}$ y $\mathbf{A \subset U}$

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Notación: Si A es igual a B lo simbolizamos $\mathbf{A = B}$.

Ejemplo:

Sean A = {x/x es letra de la palabra "**mora**"} y B = {x/x es letra de la palabra "**ramo**"}

Definamos los conjuntos A y B por extensión: A = **{m, o, r, a}** y B = **{r, a, m, o}**
Por lo tanto: **A = B**

Observación:

- Si $\mathbf{A \subset B}$ y $\mathbf{B \subset A}$ entonces $\mathbf{A = B}$
- Si $\mathbf{A = B}$ entonces $\mathbf{A \subset B}$ y $\mathbf{B \subset A}$

Ejercicios:

5) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

A = {x/x es un número par no negativo menor que 9}
B = {x/x es uno de los dígitos del número "24680"}
C = {2, 4, 6, 8}
D = {x/x es uno de los dígitos del número "8246"}
E = {2, 4, 6, 8, 0}

6) Traduce las siguientes expresiones de acuerdo a la notación conjuntista:

a) x no pertenece a B
b) x pertenece a C
c) M es subconjunto de P
d) d es elemento de A
e) X está incluido en Y
f) A no es subconjunto de Q
g) A es igual a G
h) m no es elemento de H

7) Dados los siguientes conjuntos:

A = {x/x es letra de la palabra "arco"}
B = {x/x es letra de la palabra "rocas"}
C = {x/x es letra de la palabra "croa"}
D = {x/x es letra de la palabra "coral"}

a) Representa **analítica** (en símbolos) y **gráficamente** las inclusiones que resulten.

b) ¿Hay conjuntos iguales?¿Cuáles?

8) Explica la diferencia entre las expresiones: $a \in B$ y $\{a\} \subset B$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos permiten obtener nuevos conjuntos.

Las operaciones que vamos a estudiar son:

- Unión
- Intersección
- Diferencia
- Complemento

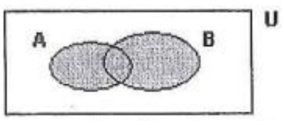
UNIÓN

Se llama **unión** entre dos conjuntos **A** y **B** al conjunto formado por:
todos los elementos que pertenecen a A o todos los elementos que pertenecen a B.

Se simboliza: $A \cup B$

Es decir: $A \cup B = \{x / x \in A \ \ o \ \ x \in B\}$

Gráficamente:



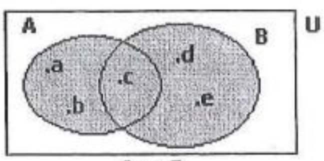
A ∪ B

Ejemplo:

A = {a, b, c} B = {c, d, e}

Analíticamente: $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

Gráficamente:



A ∪ B

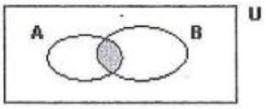
INTERSECCIÓN

Se llama **intersección** entre dos conjuntos **A** y **B** al conjunto formado por:
todos los elementos que pertenecen a A y todos los elementos que pertenecen a B.

Se simboliza: $\mathbf{A \cap B}$

Es decir: $\mathbf{A \cap B = \{x /\ x \in A \ \ y \ \ x \in B\}}$

Gráficamente:



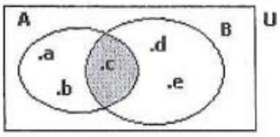
A ∩ B

Ejemplo:

A = {a, b, c}   B = {c, d, e}

Analíticamente: $\mathbf{A \cap B = \{c\}}$

Gráficamente:



A ∩ B

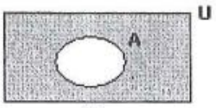
COMPLEMENTO

Se llama **complemento** de **A** al conjunto formado por:
todos los elementos del conjunto universal (U) que no pertenecen al conjunto A

Se simboliza: $\mathbf{\overline{A}}$

Es decir: $\mathbf{\overline{A} = \{x /\ x \in U \ \ y \ \ x \notin A\}}$

Gráficamente:



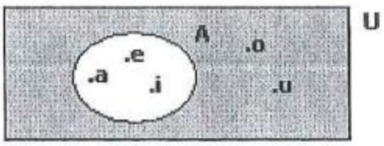
$\overline{A}$

Ejemplo:

U = {x/x es vocal} = {a, e, i, o, u}   A = {a, e, i}

Analíticamente: $\mathbf{\overline{A} = \{o, u\}}$

Gráficamente:



$\overline{A}$

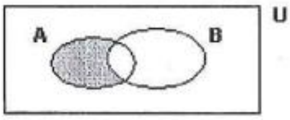
DIFERENCIA

Se llama **diferencia** entre dos conjuntos **A** y **B** al conjunto formado por:
todos los elementos que pertenecen a A y todos los elementos que no pertenecen a B.

Se simboliza: **A - B**

Es decir: $\mathbf{A - B = \{x /\ x \in A \quad y \quad x \notin B\}}$

Gráficamente:



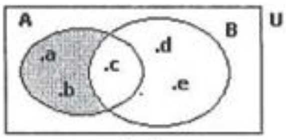
A - B

Ejemplo:

A = {a, b, c}   B = {c, d, e}

Analíticamente: **A - B = {a, b}**

Gráficamente:



A - B

Observación: Se verifica que:

$$\mathbf{U - A = \overline{A}}$$

$$\mathbf{A - B \neq B - A}$$

$$\mathbf{A - B = A \cap \overline{B}}$$

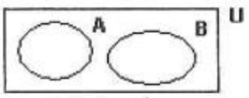
CONJUNTOS DISJUNTOS

Dos conjuntos son disjuntos si no tienen elementos en común.

Es decir: **Dos conjuntos son disjuntos si la intersección es igual al conjunto vacío.**

Simbólicamente: **A y B son disjuntos** si y solo si $\mathbf{A \cap B = \Phi}$

Gráficamente:



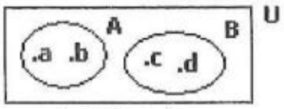
$A \cap B = \Phi$

Ejemplo:

A = {a, b} B = {c, d}

Como **A∩ B = Φ** entonces **A y B son disjuntos.**

Gráficamente:



A ∩ B = Φ

Ejercicios:

9) Dados los siguientes conjuntos:

U = {a; b; c; d; e; i; u; l; m; n; o; r; s; t }

A = { x/ x es letra de la palabra "**alumno**"}

B = { x/ x es letra de la palabra " **estudiante**"}

Resuelve **analítica y gráficamente**:

a) A∪B

b) A∩B

c) A – B

d) B – A

10) Sean:

U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A = {1, 2, 3, 4}

B = { 5, 6, 7, 8}

C = {3, 4, 5, 6}

D = {3, 4}

Resuelve **analítica y gráficamente**:

a) A∪B

b) D∩B

c) A – B

d) C∪D

e) A∩C

f) $\overline{A}$

g) D – C

h) $\overline{A \cap B}$

¿Qué conjuntos son disjuntos? Justifica

11) Completa las siguientes propiedades: (puedes ayudarte realizando los gráficos)

a) A ∪ U = ...

b) A ∪ Φ = ...

c) A ∩ U = ...

d) A ∩ Φ = ...

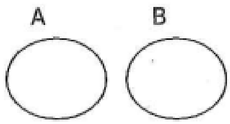
e) $\overline{\Phi}$ = ...

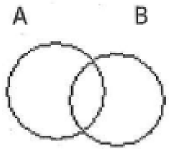
f) $\overline{U}$ = ...

g) $\overline{\overline{A}}$ = ...

12) En los siguientes diagramas pinta la región que representa y completa:

A∪B

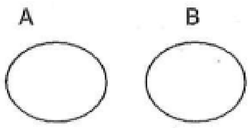


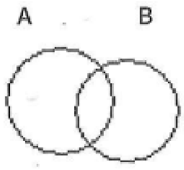


Si A⊂ B entonces A∪B =..............

A y B son disjuntos

A∩B

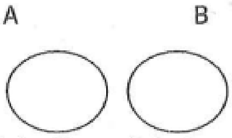


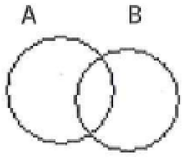


Si A⊂ B entonces
A∩B = ...

Si A y B son disjuntos
entonces A∩B = ...

A - B





Si A⊂ B entonces
A - B = ...

Si A y B son disjuntos
entonces A - B = ...

INTERVALOS

La representación gráfica del conjunto de los números reales es en la recta numérica.
Dos números reales **a** y **b** con **a < b** (se lee: "a menor que b")
se dibujan en la recta numérica **a** a la **izquierda** de **b**.

Ejemplos:

- Para expresar los **números reales** que son **menores que 2** se escribe **x< 2**
- Para expresar los **números reales mayores que -1 y menores que 3** se escribe **-1 < x< 3**

Estas expresiones dan lugar a los **INTERVALOS**.

Un intervalo es un subconjunto de los números reales, comprendido entre dos valores fijos llamados extremos.

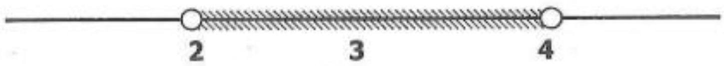
Los **extremos pueden o no pertenecer al intervalo** dando origen a distintos tipos de intervalos:

Intervalo ABIERTO: Llamaremos intervalo abierto (a, b) al conjunto de los números reales mayores que a y menores que b con a < b.
a y **b** son los extremos y **NO pertenecen al intervalo.**

Es decir: $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \}$

Gráficamente:

Ejemplo:
$(2, 4) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 2 < x < 4 \}$



Intervalo CERRADO: Llamaremos intervalo cerrado [a, b] al conjunto de los números reales mayores que a y menores que b con a < b.
a y **b** son los extremos y **SI pertenecen al intervalo.**

Es decir: $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b \}$

Gráficamente:

Ejemplo:
$[2, 4] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq x \leq 4 \}$

Intervalo SEMIABIERTO: Son intervalos en los que se realizan combinaciones con los extremos.

Pueden ser:

(a, b] = { x∈R / a < x ≤ b}

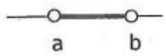
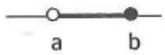
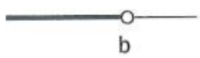
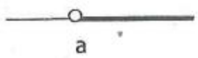
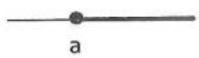
[a, b) = { x∈R / a ≤ x < b}

Intervalos INFINITOS: Se presentan las siguientes posibilidades:

(-∞, b)	Conjunto de los números reales menores que b.
(-∞, b]	Conjunto de los números reales menores o iguales que b.
(a, +∞)	Conjunto de los números reales mayores que a.
[a, +∞)	Conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

Nota: Los símbolos **+∞** y **-∞** se utilizan para indicar que son el infinito positivo y el infinito negativo respectivamente.

EN RESUMEN:

Denominación del intervalo	Notación del intervalo	Notación como subconjunto	Gráfica del intervalo
ABIERTO	(a, b)	{ x∈R / a < x < b}	
CERRADO	[a, b]	{ x∈R / a ≤x ≤ b}	
SEMIABIERTO	(a, b]	{ x∈R / a < x ≤ b}	
	[a, b)	{ x∈R / a ≤ x < b}	
INFINITOS	(-∞, b)	{ x∈R / x < b}	
	(-∞, b]	{ x∈R / x ≤ b}	
	(a, +∞)	{ x∈R / a < x }	
	[a, +∞)	{ x∈R / a ≤ x }	

Observación:
Los intervalos **NO** se expresan por **extensión**.
Los intervalos **NO** se representan en un **diagrama de Venn**.

Ejercicios:

1) Representa los siguientes intervalos en la recta numérica:

a) $(4, +\infty)$
b) $(6, 10]$
c) $(-2, 5)$
d) $[-3, 0]$
e) $(-\infty, -2]$
f) $[-3, 2)$

2) Expresa los siguientes conjuntos como intervalos y represéntalos en la recta numérica:

$A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x \leq 12 \}$
$B = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -4 \}$
$C = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -1{,}5 < x < 3{,}5 \}$

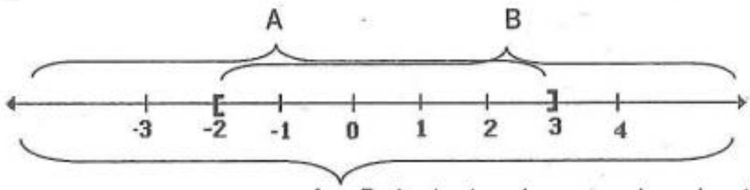
OPERACIONES CON INTERVALOS

Como los intervalos son conjuntos, las operaciones que se pueden realizar con ellos son las definidas en general para conjuntos: **unión, intersección, complemento** y **diferencia**.

La forma de trabajar será gráficamente y luego se expresará el resultado como intervalo.

Ejemplo:
Sean $U = (-\infty, +\infty)$, $A = (-\infty, 3]$ y $B = [-2, +\infty)$

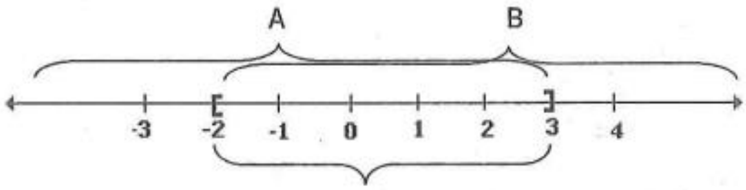
- $A \cup B$



$A \cup B$ (todos los elementos de ambos intervalos)

Por lo tanto: $A \cup B = (-\infty, +\infty)$ entonces $A \cup B = \mathbb{R}$

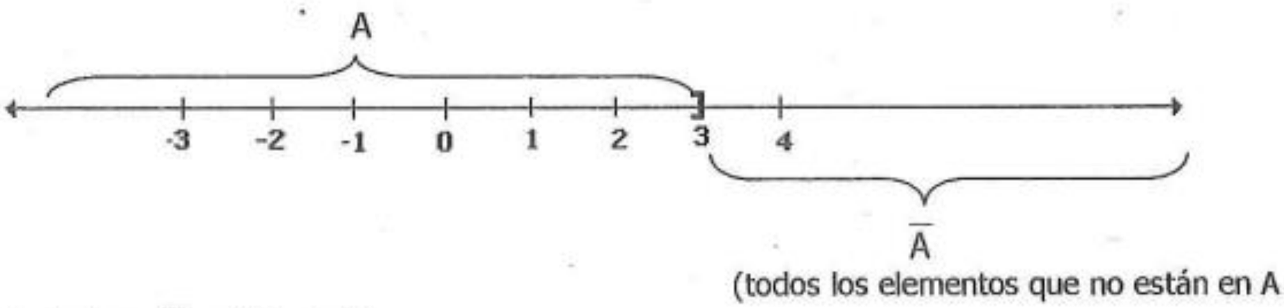
- $A \cap B$



$A \cap B$ (los elementos comunes a ambos intervalos)

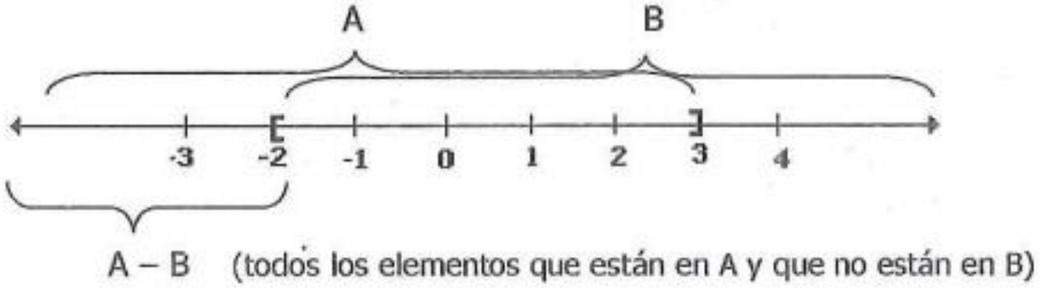
Por lo tanto: $A \cap B = [-2, 3]$

❖ $\overline{A}$



Por lo tanto: $\overline{A} = (3, +\infty)$

❖ A – B



Por lo tanto: $A - B = (-\infty, -2)$

Ejercicio:

3) Calcula $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ y $A - B$

a) $A = [-3, 5)$ y $B = [1, 4]$

b) $A = (-2, 5)$ y $B = (-4, 2]$

c) $A = (-\infty, 4)$ y $B = [-3, -1]$

d) $A = (-2, 7)$ y $B = [7, 9)$

e) $A = (3, 6)$ y $B = (4, +\infty)$

f) $A = (-3, +\infty)$ y $B = (-\infty, -1]$