



CUADERNILLO DE MATEMÁTICA

5° año Secundaria
2026



Alumn@:

Orientación:

Docente: *Prof. Sergio Baigorria*



CONTRATO PEDAGÓGICO

Espacio curricular: Matemática.

Curso: 5° año.

Docente: Prof. Sergio Baigorria.

Orientación:

El alumno se compromete a:

1. Expresarse respetuosamente con el docente como así también con sus compañeros y con los equipos directivos y personal en general procurando un clima de aula positivo.
2. Ingresar puntualmente a clase tanto al comenzar la clase como al regreso de los recreos.
3. No consumir bebidas, mate o alimentos en horas de clase.
4. Participar activamente en clases, tener buena conducta, que implique entre otras actitudes: no interrumpir al docente o compañeros que están exponiendo, acatar las consignas de trabajo que propone el docente, responsabilizarse por el cumplimiento de las tareas solicitadas por el docente, no charlar o molestar a otros o utilizar elementos que puedan distraer la atención propia y de sus compañeros.
5. Integrarse activamente y con una participación responsable en los proyectos propuestos por el docente.
6. Trabajar en equipo (cuando esta modalidad sea requerida por el docente) de manera colaborativa y responsable, aceptar las diferencias entre los integrantes, ser tolerantes y ayudarse mutuamente para lograr buenos resultados.
7. Comprometerse a estudiar a conciencia diariamente para las clases, para las evaluaciones escritas y orales, y ser responsable con el cumplimiento de las actividades para el aprendizaje.
8. Traer todos los días de clase el cuaderno, no carpeta, y el cuadernillo de la materia, con notas individualizadas junto con el resto de las calificaciones obtenidas, como para la determinación del promedio de cada cuatrimestre, como también es obligatoria su presentación al momento de rendir en las instancias de recuperación. Es indispensable traer los elementos para el aprendizaje.
9. Aceptar, incorporar y cumplir con el material de estudio y actividades que el docente agregue durante el cursado del presente ciclo lectivo, siempre que estén contemplados en la Planificación Anual de Matemática, los cuales serán debidamente notificados con anticipación a las familias y publicados en la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.
10. El estudiante deberá prever que el cuaderno contenga organizados en sus primeras páginas los siguientes contenidos: a- Carátula que indique nombre del estudiante, curso, materia y nombre del docente. b- Evaluaciones corregidas. c- Contenidos desarrollados.
11. En caso de ausencia, aunque sea justificada, pedir y completar la tarea, y hacer lectura del tema visto. La inasistencia a clase no justifica la falta de estudio e incumplimiento en las tareas.
12. Entregar los trabajos (guías, producciones, actividades) en tiempo y forma, colocando apellido y nombre curso, materia y tema desarrollado, en caso de tareas manuscritas, la presentación debe ser prolija, escrituras con tinta de un solo color, con letra clara, sin tachaduras ni borrones, con carátula y en un folio. También dar cumplimiento a lo indicado en este ítem, cuando las consignas de entrega sean por medio digitales. En el caso de tareas realizadas en el cuaderno, deben estar firmadas y fechadas por el docente.
13. No usar dispositivos electrónicos, celulares, auriculares, parlantes, etc., salvo que el profesor lo autorice y requiera para actividades estrictamente pedagógicas.
14. Asistencia a clase con al menos un 75% de asistencia, para los estudiantes que no alcancen este mínimo de asistencias implicará una reducción en la calificación actitudinal (excepto en los casos motivados en temas de salud o razones de fuerza mayor debidamente justificadas).
15. Mantener el aula ordenada y limpia, de no ser así los estudiantes no podrán retirarse hasta tanto dejen el curso en condiciones.
16. Mostrar buena predisposición para colaborar en la organización de los actos escolares cuando sea solicitada su cooperación para este fin.
17. Respetar los tiempos de consulta al docente y que las mismas sean apropiadamente formuladas en los horarios de clase (teniendo en cuenta que el docente no puede repetir temas completos).
18. Presentar las autorizaciones firmadas por los adultos responsables en tiempo y forma en los casos de salidas didácticas o actividades escolares extra-áulicas.

El docente se compromete a:

1. Ser puntual y procurar no faltar a clase.
2. Respetar al estudiante y a su familia.
3. Reconocer al estudiante como un sujeto de derecho que requiere atención y dedicación para alcanzar el desarrollo de sus capacidades a través del proceso de enseñanza y aprendizaje de calidad.
4. Asegurarse que, al término de la clase, el aula quede ordenada y limpia.
5. Generar un ambiente propicio para el aprendizaje incentivando a la participación de cada alumno, a despertar el interés y curiosidad por el conocimiento.
6. Asegurar un trato respetuoso hacia sus estudiantes.
7. Preparar las clases con actividades que promueven el desarrollo de distintas habilidades.
8. Notificar por escrito al menos con una semana de anticipación a la fecha de la evaluación, y posteriormente las calificaciones obtenidas en las evaluaciones.
9. Responsabilizarse por las evaluaciones realizadas por los estudiantes hasta tanto sean devueltas a los interesados.
10. Elaborar consignas claras y explicitar los criterios de evaluación en las pruebas.
11. Ponderar el trabajo del alumno teniendo en cuenta su desempeño y predisposición.
12. Utilizar variedad de recursos didácticos.
13. Proponer proyectos escolares que impliquen la participación de los estudiantes e incentivarlos a intervenir en la organización de los actos escolares.
14. Formular proyectos de articulación entre años y/o niveles de manera de facilitar los aprendizajes.
15. Notificar a los padres sobre el desempeño escolar de sus hijo/a consignando la información en la plataforma en tiempo y forma.
16. Notificar con anticipación a las familias sobre el agregado de material de estudio y actividades al cuadernillo durante el cursado del presente ciclo lectivo, siempre que ya estén contemplados en la Planificación Anual de Matemática, mediante la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.

Los adultos responsables se comprometen a:

1. Revisar con frecuencia el cuaderno de actividades de la materia.
2. Firmar las autorizaciones requeridas por el docente para la asistencia de su hijo/a en la participación de actividades extra áulicas o salidas.
3. Mantenerse atentos a los comunicados del docente y al seguimiento de desempeño académico de su hijo/a. a través de la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.
4. Avisar a preceptores por inasistencias y justificarlas mediante certificados.
5. Asegurarse de que su hijo/a complete las actividades y se informe de lo solicitado cuando no pueda asistir a clase.
6. Dirigirse con respeto al docente, como así también al resto del personal, transmitiendo sus inquietudes por los medios y momentos apropiados.
7. Incentivar a su hijo/a para que estudie y cumpla con sus obligaciones necesarias para el aprendizaje.
8. Asegurarse de que su hijo/a vaya a clase habiendo estudiado los contenidos dados por el docente.
9. Asegurarse y facilitar a que su hijo/a cumpla con los materiales, útiles, cuaderno, uniforme, cuadernillo, fotocopias, etc. cuando sean requeridos y demás elementos de importancia para su bienestar escolar.

.....
Firma
alumno

.....
Aclaración

.....
Firma
adulto responsable

.....
Aclaración

.....
Firma
docente

Sergio Baigorria
Aclaración

PROGRAMA DE EXAMEN Y ESTUDIO 2026

Curso: 5° año Secundario Orientado.

Orientaciones: Economía y Administración – Ciencias Naturales.

ÁREA: Matemática

DOCENTE: Prof. Sergio A. Baigorria P.

EJE TEMÁTICO 1: Aritmética y Trigonometría I

ARITMÉTICA: Orden de las operaciones. Operaciones combinadas.

TRIGONOMETRÍA: Funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente. Funciones trigonométricas inversas. Teorema de Pitágoras. Ángulos complementarios en un triángulo rectángulo. Resolución de triángulos rectángulos. Problemas.

EJE TEMÁTICO 2: Trigonometría II

GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: Sistemas de medición de ángulos. Circunferencias trigonométricas. Valor de las funciones trigonométricas de ángulos particulares: 0° , 30° , 45° , 60° , 90° . Gráficas de funciones trigonométricas.

TRIGONOMETRÍA: Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos. Problemas.

RELACIONES ENTRE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: Relaciones entre las funciones. Cosecante, secante y cotangente.

EJE TEMÁTICO 3: Funciones trascendentes y álgebra

FUNCIÓN EXPONENCIAL: definición. Ecuaciones exponenciales.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA: Logaritmo: concepto. Logaritmos decimales y logaritmos naturales. Propiedades de los logaritmos. Ecuaciones logarítmicas.

Resolución de problemas.

GRÁFICAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES: Gráficos de funciones exponenciales. Crecimiento y decrecimiento exponencial. Variaciones de la función exponencial. Función exponencial natural $y=e^x$.

Gráficos de funciones logarítmicas. Crecimiento y decrecimiento de la función logarítmica. Variaciones de la función logarítmica. Función exponencial y logarítmica de igual base. Función exponencial y logarítmica con base e .

BIBLIOGRAFÍA

- “Una puerta abierta a la Matemática” - Ed. Comunicarte.
- “Matemática” - Ed. Santillana. - Perspectivas.
- “Nueva carpeta de Matemática IV” – R. Schaposchnik y varios - Ed. Aique.



Repaso

Pasos para resolver operaciones combinadas

1º) Separa en términos.

Busca los signos + y - fuera de los lugares “encerrados” (puestos en rojo):

(Paréntesis)^{exponente}

$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}}$

[Corchetes]^{exponente}

$\sqrt[\text{índice}]{\text{Radicado}}$

{Llaves}^{exponente}

Función^{exponente} argumento

Recuerda: si falta el signo al principio del primer término entonces es + (suma). Y si falta el signo dentro del término entonces es • (multiplicación). Por ejemplo: $2(-3) = +2 \cdot (-3) = -6$.

2º) Resuelve todo lo que está “encerrado”:

En este paso, hay que resolver todo lo que está “encerrado” (en rojo) de forma independiente como cálculos auxiliares. Una vez resueltos, reemplaza esas operaciones en rojo con su resultado.

Nota importante: cuando una potencia afecta a una función, se pone el exponente arriba del nombre de la función. Por ejemplo, para expresar que la función “seno de π está elevado al cuadrado” **X** no se escribe $(\text{sen } \pi)^2$. En su lugar, se dice “seno cuadrado de π ” **✓** y se escribe $\text{sen}^2 \pi$. Como el exponente ² está “encerrando” a la función $\text{sen } \pi$, habrá que calcular primero la función y después elevar su resultado al cuadrado.

3º) Resuelve funciones, por ejemplo: seno, coseno, tangente, logaritmo, etc.

4º) Resuelve potencias y raíces.

Regla de signos de potenciación: base negativa y exponente impar, da negativo; sino da positivo:

$$[-]^{\text{impar}} = -$$

Si el exponente de una potencia es negativo, invierte la base:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Regla de signos de radicación: para este tipo de operaciones combinadas, el resultado tendrá el mismo signo del radicado. PERO 😬 la regla de signos de la radicación no es tan simple... por ejemplo:

	Índice par	Índice impar
Radicando positivo	$\sqrt{+9} = +3$ pues $(+3)^2 = +9$ y también $(-3)^2 = +9$. En operaciones combinadas, tomaremos como resultado +3.	$\sqrt[3]{+8} = +2$ pues $(+2)^3 = +8$
Radicando negativo	$\sqrt{-9} = \text{no tiene solución en } \mathbb{R}$ pues ningún número real elevado al cuadrado da negativo.	$\sqrt[3]{-8} = -2$ pues $(-2)^3 = -8$

5°) Resuelve multiplicaciones y divisiones.

Regla de signos de multiplicación y división: si la cantidad de negativos es impar, da negativo. (Se pueden incluir los signos que separan en términos.)

En caso de haber divisiones, tienes 2 opciones:

- Resolver de izquierda a derecha 😬 sí o sí. **Cuidado con la división** pues se resuelve y se simplifica distinto a la multiplicación con el riesgo de que te confunda ya que **no es conmutativa ni asociativa**. ⚠️ Es **MUY** peligrosa.
- O, mucho mejor y fácil, conviertes la división en **multiplicación** 😊: puedes hacerlo **invirtiendo el divisor y resolviéndola como multiplicación**:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Se **resuelve** multiplicando “derecho” (como muestran las flechas verdes).

Se **simplifica** “cualquiera de arriba (numerador) con cualquiera de abajo (denominador)” dentro del mismo término.

| **Cuidado:** No se pueden simplificar fracciones que estén en términos distintos.

6°) Suprime paréntesis:

Regla para suprimir paréntesis (), corchetes [] y llaves { }:

- Si adelante del paréntesis hay un signo **-**, **cambia** los signos + y - de adentro y suprime los paréntesis.
- Si hay un signo **+** adelante, solo suprime los paréntesis.

7°) Resuelve suma y resta.

Regla de signos: si suma, “tengo”; si resta, “debo”.

⚠️ ¡Cuidado! $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ no da $\frac{2}{5}$ sino $\frac{5}{6}$. No se suman ni restan fracciones “derecho”.

| **Advertencia:** Solo se pueden simplificar fracciones que se multiplican o dividen **en el mismo término**, así que no simplifiques entre fracciones que están en términos distintos sumando o restando.

Primero debes **calcular el m.c.m.**: se copian aparte los denominadores y se van dividiendo en números primos (2; 3; 5; 7; 11; etc.), nunca en números compuestos (4; 6; 8; 9; 10; etc.).

Denominadores →

2	3	2	Dividir en números primos (2; 3; 5; 7; 11; etc.)
1	3	3	
1	6	6	

← **m.c.m.**

Coloca el m.c.m. en el denominador:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\quad}{6}$$

Segundo, para calcular el numerador debes ir **dividiendo el m.c.m. en los denominadores (de abajo)**, **multiplicando en los numeradores (de arriba)** y colocando el resultado en el numerador (arriba del m.c.m.):

Por ejemplo: $6 : 2 = 3$, y $3 \cdot 1 = 3$; coloca el 3 en el numerador (arriba) sobre el m.c.m.:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$$

Copia en orden a los signos que separan términos poniéndolos en el numerador (arriba) sobre el m.c.m.:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+}{6}$$

Continúa sumando la otra fracción como hiciste antes: $6 : 3 = 2$, y $2 \cdot 1 = 2$; coloca el 2 en el numerador (arriba) sobre el m.c.m.:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6}$$

Resuelve el numerador:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Una vez terminada la suma o resta con fracciones, **intenta simplificar la fracción del resultado**, (en el ejemplo, no se pueden simplificar 5 con 6).



Resumiendo:

- 1º) Separar en términos.
- 2º) Resolver lo “encerrado” aparte.
- 3º) Funciones.
- 4º) Potencias y raíces.
- 5º) Multiplicaciones y divisiones.
- 6º) Suprimir paréntesis.
- 7º) Sumas y restas.



Ejercicios para resolver:

Son obligatorias todas las operaciones combinadas de los puntos **13**, **19**, **28** y **32**. Todos los cálculos y sus cálculos auxiliares deben estar en la misma hoja y en el cuadernillo. **NADA EN HOJA “APARTE”**.

Después, **AL TERMINAR, NO ANTES**, resuélvelos usando calculadora científica para verificar tus resultados.   Para eso, no olvides agregar paréntesis, en la calculadora científica clásica, para todas las operaciones “encerradas”.

1

Calcula las siguientes sumas:

- | | | |
|-------------------|--------------------|------------------|
| a) $(+3) + (+7)$ | f) $(-3) + (+12)$ | k) $(-5) + (+5)$ |
| b) $(+9) + (+12)$ | g) $(-18) + (+6)$ | l) $(+7) + 0$ |
| c) $(-5) + (-9)$ | h) $(+7) + (-19)$ | m) $(+9) + (-9)$ |
| d) $(-10) + (-8)$ | i) $(+23) + (-15)$ | n) $0 + (-3)$ |
| e) $(+6) + (+15)$ | j) $(-32) + (+16)$ | o) $(-4) + 0$ |

2

Calcula las siguientes sumas:

- a) $(+3) + (+9) + (+12)$
 b) $(+15) + (+8) + (+10) + (+1)$
 c) $(+20) + (+7) + (+9) + (+5) + (+12)$
 d) $(-8) + (-5) + (-9)$
 e) $(-11) + (-2) + (-15) + (-20)$
 f) $(-14) + (-4) + (-21) + (-1) + (-13)$

3

Calcula las siguientes sumas:

- a) $(-9) + (+12) + (+7) + (-20) + (-1)$
 b) $(+10) + (-4) + (+17) + (-11) + (-12)$
 c) $(+6) + (-1) + (-20) + (-18) + (-9) + (-8)$
 d) $(-17) + (-23) + (+28) + (-8) + (+32) + (-15)$
 e) $(-6) + (+3) + (+8) + (-11) + (-32) + (-2) + (+20)$
 f) $(+35) + (-18) + (-25) + (+7) + (-9)$

4

Calcula las siguientes sumas:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| a) $-7 + 12 + 19 - 9 + 6$ | d) $-1 - 2 - 9 + 15 - 3$ |
| b) $42 - 6 - 12 - 9 + 2$ | e) $9 + 7 - 24 - 30 + 5 - 8$ |
| c) $-4 - 18 + 20 - 1 + 3$ | f) $-10 - 15 + 32 + 45 - 60$ |

5

Calcula las diferencias:

- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $(+23) - (+15)$ | c) $(-9) - (-24)$ | e) $(+9) - (-45)$ |
| b) $(+11) - (+30)$ | d) $(-29) - (-17)$ | f) $(-18) - (-15)$ |

6

Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(+7) - (-1) + (-9) - (+5)$
 b) $(-11) + (-6) - (-4) - (-1)$
 c) $(-10) - (-3) + (-2) - (-8) - (+15)$
 d) $(-5) + (-11) - (-14) - (-4) + (+20)$
 e) $(+12) - (-9) - (+8) + (-6) - (+7)$
 f) $(-100) + (-25) - (-55) + (-15) - (-5)$

7

Realiza las siguientes operaciones:

- a) $\{ (+15) - [(+4) - (-6) + (+2)] \} - (-3)$
 b) $[(-7) + (-5) - (-1)] - [(-3) + (-1) - (+4)]$
 c) $(-13) - \{ (-2) + [(+9) - (-3)] - (-5) \} + (-7)$
 d) $(-14) + (-5) + [(-9) - (-4)] - (+12)$
 e) $- \{ (-5) + [(-1) - (-9)] + [(-1) - (+2)] \} + (-7)$
 f) $- [(-8) + (-3)] + [(-9) - (-3) - (-1)] - (+20)$

8

Calcula los productos:

- | | | | |
|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| a) $(+3) (+9)$ | d) $(-9) (+7)$ | g) $(+9) (-9)$ | j) $(-4) (+12)$ |
| b) $(-12) (-5)$ | e) $(+8) (-6)$ | h) $(+6) (-8)$ | k) $(+9) (-5)$ |
| c) $(-3) (+11)$ | f) $(-7) (-5)$ | i) $(-7) (-10)$ | l) $(-6) (-7)$ |

9

Calcula los productos:

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| a) $(-3) (+5) (+2)$ | f) $(-8) (+9) (-4)$ |
| b) $(+7) (-2) (-3) (-1)$ | g) $(-4) (-5) (-6) (-8)$ |
| c) $(+25) (-2) (+6) (-4)$ | h) $(-30) (+4) (-5)$ |
| d) $(-2) (-7) (+10) (-4)$ | i) $(-8) (-10) (+2) (-3)$ |
| e) $(-1) (+3) (-2) (+5) (-4)$ | |

10

Aplica convenientemente la propiedad conmutativa y la asociativa para simplificar la operación:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) $(-25) (+2) (-7) (-5) (+4) (-8)$ | c) $(-125) (-2) (+2) (+8) (-6)$ |
| b) $(-9) (-5) (+3) (+20) (-10)$ | d) $(-500) (+37) (-2) (-10)$ |

11

Calcula los cocientes:

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| a) $(-32) : (-8)$ | d) $(-35) : (+7)$ | g) $(-24) : (+12)$ |
| b) $(+25) : (+5)$ | e) $(-12) : (+4)$ | h) $(-56) : (-7)$ |
| c) $(-36) : (-9)$ | f) $(+30) : (-6)$ | i) $(+33) : (+11)$ |

12

Realiza las operaciones:

- a) $(-7) \cdot (-12) : (-4)$
 b) $(-5) \cdot (+6) \cdot (-10) : (-15)$
 c) $(-20) : (-4) \cdot (-9) : (-5)$

- d) $(-72) : (-2) : (+9) \cdot (-7)$
 e) $(-100) : (-50) \cdot (-6) \cdot (+3)$
 f) $(+40) : (+8) \cdot (-12) : (-10)$

13

Realiza las operaciones:

- a) $(-9 - 7) : (-8) + (-2) \cdot (-3)$
 b) $(-4) \cdot (-9) : (-3) : (+4) + (-8) : (+2)$
 c) $[(+12) \cdot (-3) - (-4) \cdot (+5)] : (-3 - 1)$
 d) $[(-6) \cdot (-5) + (-12) : (+4) - (2 - 1)] \cdot (-3)$
 e) $(-20) : (-5) + (-6) \cdot (-2) - 8 : (-2)$
 f) $[20 - (-15) : (-3)] \cdot [(-3) \cdot (-6) - (-4) \cdot (-2)]$
 g) $42 - [32 : (-8) + 9] - (-9) \cdot (-3)$
 h) $(-4) [-7 + (-3) \cdot (-4)] : [(-30) : (-2) + (-5)]$
 i) $[12 - (-5) \cdot 2] \cdot (-7) - 4 \cdot (-5) : (-2)$
 j) $\{ 35 - 7 \cdot (-4) - 16 : (-8) \cdot (-3) \} \cdot [-12 : (-3)]$

14

Calcula las siguientes potencias:

- | | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| a) $(+3)^2$ | d) $(-5)^3$ | g) $(-2)^2$ | j) $(-2)^5$ | m) $(-8)^2$ |
| b) $(+3)^3$ | e) $(-10)^4$ | h) $(-2)^3$ | k) $(-2)^6$ | n) $(-4)^3$ |
| c) $(-4)^2$ | f) $(-3)^5$ | i) $(-2)^4$ | l) $(+4)^3$ | o) $(+8)^2$ |

15

Resuelve aplicando las propiedades convenientes:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $(-3)^2 \cdot (-3) \cdot (-3)^0 =$ | e) $[(-3)^8 : (-3)^6] \cdot (-3)^2 =$ |
| b) $(-2) \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^2 =$ | f) $[(-10)^3]^2 =$ |
| c) $(-5)^7 : (-5)^4 =$ | g) $\{ [(+2)^5]^3 \}^4 =$ |
| d) $(+4)^9 : (+4)^7 =$ | h) $\{ [(-7)^3]^8 \}^0 =$ |

16

Aplica la propiedad distributiva cuando sea posible:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| a) $[(-2) \cdot 3 \cdot (-5)]^2 =$ | d) $(6 : 3 - 1)^3 =$ |
| b) $[(-5) + 4]^2 =$ | e) $[(9 : (-3))]^4 =$ |
| c) $[(-12) : (+3)]^2 =$ | f) $[2 \cdot (-3) + (-2)]^3 =$ |

17

Calcula las siguientes raíces:

- | | | |
|----------------------|--------------------|-------------------|
| a) $\sqrt[3]{+1000}$ | d) $\sqrt{+16}$ | g) $\sqrt{64}$ |
| b) $\sqrt{+25}$ | e) $\sqrt[3]{-32}$ | h) $\sqrt[3]{64}$ |
| c) $\sqrt[3]{-125}$ | f) $\sqrt[4]{+81}$ | i) $\sqrt[6]{64}$ |

18

Calcula aplicando la propiedad distributiva:

- | | |
|---|----------------------------------|
| a) $\sqrt[3]{(-8) \cdot 125 \cdot 1000}$ | d) $\sqrt{16 \cdot 10000}$ |
| b) $\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 49}$ | e) $\sqrt{81 \cdot 9 \cdot 16}$ |
| c) $\sqrt[3]{(-64) \cdot (-27) \cdot (-125)}$ | f) $\sqrt{100 \cdot 4 \cdot 64}$ |

19

Operaciones combinadas

- a) $[(-4) + (+7)]^2$
 b) $(-3)^2 + (+2)^3$
 c) $(-3)^2 \cdot (-2) \cdot \sqrt[3]{-27}$
 d) $\sqrt[5]{-32} \cdot (-3 + 7) : (-2)^2$
 e) $(-7 + 5)^4 : 2^3 - \sqrt{25} \cdot (-2)$
 f) $(-3)^3 : \sqrt{9} - 12 : (-2)^2 + \sqrt{4^3}$
 g) $\sqrt{34} - (-5)^2 - (-2)^3 : (-4)$
 h) $[(-7) - (-1)^2]^2 : (-2)^3 - (-16) : 2$
 i) $\sqrt{4 \cdot (-5)^2} : (-3 + 1) + (-6)^2 : 3^2$
 j) $\sqrt[3]{3 \cdot (-10) + (-2)^2 - 1} - 24 : (-2)^3$

20

Calcula las siguientes sumas:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{5} + \frac{1}{2} & \text{c) } -\frac{4}{5} + \frac{1}{3} & \text{e) } \frac{8}{9} + \frac{3}{4} & \text{g) } \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \\ \text{b) } 3 + \frac{4}{7} & \text{d) } \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{3}\right) & \text{f) } \frac{1}{6} + \frac{2}{5} & \text{h) } \frac{4}{7} + 5 \end{array}$$

21

Calcula las siguientes sumas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2} & \text{f) } \frac{4}{15} + \frac{3}{10} + \frac{5}{6} \\ \text{b) } \frac{7}{10} + \frac{3}{20} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} & \text{g) } \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{10} + \frac{7}{15} \\ \text{c) } \frac{2}{9} + \frac{5}{18} + \frac{1}{6} & \text{h) } \frac{4}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{7}{8} \\ \text{d) } \frac{1}{12} + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} & \text{i) } \frac{8}{9} + \frac{7}{6} + \frac{2}{3} + \frac{2}{27} \\ \text{e) } \frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} & \end{array}$$

22

Calcula las diferencias siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{3}{5} - \frac{1}{4} & \text{c) } \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & \text{e) } 4 - \frac{7}{2} & \text{g) } \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \\ \text{b) } \frac{2}{7} - \frac{1}{2} & \text{d) } \frac{2}{5} - \frac{2}{9} & \text{f) } \frac{5}{3} - 2 & \text{h) } \frac{3}{8} - \frac{7}{12} \end{array}$$

23

Realiza las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} & \text{d) } -\frac{2}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{14} \\ \text{b) } \frac{2}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{10} & \text{e) } 2 - \frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \\ \text{c) } \frac{5}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{9} & \text{f) } \frac{1}{3} + \frac{5}{8} - 1 - \frac{5}{6} \end{array}$$

24

Calcula los siguientes productos:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} & \text{d) } -\frac{21}{5} \cdot \frac{2}{7} & \text{g) } \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} & \text{j) } \left(-\frac{9}{25}\right) \left(-\frac{10}{6}\right) \\ \text{b) } \frac{4}{15} \cdot \frac{25}{8} & \text{e) } -3 \cdot \frac{4}{9} & \text{h) } -\frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} & \text{k) } \left(-\frac{12}{14}\right) \left(-\frac{7}{6}\right) \\ \text{c) } \frac{3}{4} \left(-\frac{5}{6}\right) & \text{f) } \frac{7}{12} \cdot 4 & \text{i) } \frac{24}{35} \cdot \frac{14}{32} & \text{l) } \left(-\frac{2}{9}\right) \left(-\frac{6}{8}\right) \end{array}$$

25

Calcula los siguientes cocientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3}{4} : \frac{7}{8} & \text{d) } \left(-\frac{12}{15}\right) : \frac{6}{10} & \text{g) } \left(-\frac{4}{5}\right) : \frac{6}{25} \\ \text{b) } \frac{6}{15} : \frac{4}{25} & \text{e) } \frac{7}{8} : \left(-\frac{14}{20}\right) & \text{h) } \left(-\frac{9}{11}\right) : \left(-\frac{3}{22}\right) \\ \text{c) } \frac{1}{2} : \frac{3}{4} & \text{f) } \frac{5}{12} : \frac{15}{6} & \text{i) } \left(-\frac{4}{9}\right) : \left(-\frac{10}{15}\right) \end{array}$$

26

Calcula los siguientes productos. Simplifica antes de efectuar las operaciones.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{12}{35} \cdot \frac{21}{30} \cdot \frac{25}{18} \\ \text{b) } \frac{24}{45} \cdot \frac{36}{32} \cdot \frac{33}{81} \cdot \frac{15}{55} \\ \text{c) } \left(-\frac{16}{49}\right) \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{35}{72} \cdot \left(-\frac{27}{25}\right) \\ \text{d) } \left(-\frac{20}{45}\right) \cdot \left(-\frac{9}{40}\right) \cdot \left(-\frac{26}{27}\right) \cdot \left(-\frac{90}{39}\right) \\ \text{e) } \left(-\frac{22}{39}\right) \cdot \frac{56}{66} \cdot \left(-\frac{52}{63}\right) \cdot \left(-\frac{48}{40}\right) \\ \text{f) } \frac{17}{25} \cdot \left(-\frac{42}{81}\right) \cdot \left(-\frac{100}{108}\right) \cdot \left(\frac{72}{51}\right) \end{array}$$

27

Calcula:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{4}{3} : \frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{8}{15} : \frac{4}{25}\right) & \text{c) } \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} : \left(-\frac{4}{3}\right) \\ \text{b) } \left(\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{10}\right) : \left(\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{9}\right) & \text{d) } \left(-\frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) \end{array}$$

28

Efectúa las operaciones indicadas:



a) $\left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right] : \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} =$

b) $\left[\left(\frac{5}{4} - 2 \right) + \frac{1}{8} : 3 \right] : \left(-\frac{3}{4} + 1 + \frac{7}{6} \right) =$

c) $\frac{\frac{6}{5} : 3 + \frac{1}{2}}{\frac{4}{3} : \frac{5}{6} - \frac{1}{4}} + 3 =$

d) $-\frac{2}{7} - \frac{\left(\frac{4}{7} - 2 \right) : 5}{\frac{1}{10} \left(\frac{4}{3} - 3 \right)} =$

e) $\frac{\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) : \frac{2}{3}}{-3 + \frac{1}{4}} : \left(-\frac{1}{5} \right) =$

f) $\frac{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{5}{4} \right) : \left(-\frac{1}{12} \right)}{\frac{3}{2} - 1}$

29

Calcula las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{1}{2} \right)^3 =$

c) $\left(\frac{2}{3} \right)^3 =$

e) $\left(\frac{1}{2} \right)^6 =$

b) $\left(-\frac{1}{2} \right)^4 =$

d) $\left(\frac{9}{5} \right)^2 =$

f) $\left(-\frac{1}{10} \right)^5 =$

30

Calcula las siguientes potencias:

a) $\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} =$

c) $5^{-2} =$

e) $\left(-\frac{1}{10} \right)^{-4} =$

b) $\left(-\frac{1}{2} \right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{3}{4} \right)^{-1} =$

f) $(-3)^{-4} =$

31

Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{512}{729}} =$

b) $\sqrt{\frac{1}{25}} =$

d) $\sqrt[5]{-100\ 000} =$

f) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$

32

Efectúa las operaciones:



a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) : \frac{5}{6} =$

b) $\sqrt{1 - \frac{8}{9}} \cdot (-3)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 : \frac{3}{2} =$

c) $\left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot \frac{5}{9} + \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} - \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{-27} : \frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3} \right)^{-1} =$

e) $\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} =$

f) $-\frac{1}{5} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{5} \right) \left(1 + \frac{1}{5} \right)} =$

Resultados:**[1]**

- (a) +10
- (b) +21
- (c) -14
- (d) -18
- (e) +21
- (f) +9
- (g) -12
- (h) -12
- (i) +8
- (j) -16
- (k) 0
- (l) +7
- (m) 0
- (n) -3
- (o) -4

[2]

- (a) +24
- (b) +34
- (c) +53
- (d) -22
- (e) -48
- (f) -53

[3]

- (a) -11
- (b) 0
- (c) -50
- (d) 0
- (e) -41
- (f) -8

[4]

- (a) +21
- (b) +17
- (c) 0
- (d) 0
- (e) -41
- (f) -8

[5]

- (a) +8
- (b) -19
- (c) +15
- (d) -12
- (e) +54
- (f) -3

[6]

- (a) -6
- (b) -12
- (c) -16
- (d) +22
- (e) 0
- (f) -80

[7]

- (a) +6
- (b) -3
- (c) -35
- (d) -36
- (e) -7
- (f) -14

[8]

- (a) +27
- (b) +60
- (c) -33
- (d) -63
- (e) -48
- (f) +35
- (g) -81
- (h) -48
- (i) +70
- (j) -48
- (k) -45
- (l) +42

[9]

- (a) -30
- (b) -42
- (c) +1.200
- (d) -560
- (e) -120
- (f) +288
- (g) +960
- (h) +600
- (i) -480

[10]

- (a) +56.000
- (b) -27.000
- (c) -24.000
- (d) -370.000

[11]

- (a) +4
- (b) +5
- (c) +4
- (d) -5
- (e) -3
- (f) -5
- (g) -2
- (h) +8
- (i) +3

[12]

- (a) -21
- (b) -20
- (c) +9
- (d) -28
- (e) -36
- (f) +6

[13] ★

- (a) +8
- (b) -7
- (c) +4
- (d) -78
- (e) +20
- (f) +150
- (g) +10
- (h) -2
- (i) -164
- (j) +228

**[14]**

- (a) +9
- (b) +27
- (c) +16
- (d) -512
- (e) +10.000
- (f) -243
- (g) +4
- (h) -8
- (i) +16
- (j) -32
- (k) +64
- (l) +64
- (m) +64
- (n) -64
- (o) +64

[15]

- (a) -27
- (b) -128
- (c) -125
- (d) +16
- (e) +81
- (f) +1.000.000
- (g) $(+2)^{60} = 1,15 \cdot 10^{18}$
- (h) +1

[16]

- (a) +900
- (b) No se puede:
 $[(-5) + 4]^2 =$
 $= [-1]^2 = +1$
- (c) +16
- (d) No se puede:
 $(6 \div 3 - 1)^3 =$
 $= (+1)^3 = +1$
- (e) +81
- (f) No se puede:
 $[2(-3) +$
 $(-2)]^3 ==$
 $[-8]^2 = -512$

Nota: Aplicar propiedades no altera el resultado, pero puede hacer el ejercicio más simple o complicado.

[17]

- (a) +10
- (b) ± 5
- (c) -5
- (d) ± 2
- (e) -2
- (f) ± 3
- (g) ± 8
- (h) +4
- (i) ± 2

[18]

- (a) -100
- (b) +210
- (c) -60
- (d) +20
- (e) +108
- (f) +160

[19] ★

- (a) +9
- (b) +17
- (c) +54
- (d) -2
- (e) +12
- (f) -4
- (g) +1
- (h) 0
- (i) -1
- (j) 0



[20]

(a) $+\frac{11}{10}$

(b) $+\frac{25}{7}$

(c) $-\frac{7}{15}$

(d) $-\frac{4}{21}$

(e) $+\frac{59}{36}$

(f) $+\frac{17}{30}$

(g) $+\frac{17}{15}$

(h) $+\frac{39}{7}$

[21]

(a) $+\frac{5}{3}$

(b) $+2$

(c) $+\frac{2}{3}$

(d) $+\frac{7}{12}$

(e) $+\frac{23}{24}$

(f) $+\frac{7}{5}$

(g) $+\frac{4}{3}$

(h) $+\frac{137}{72}$

(i) $+\frac{151}{54}$

[22]

(a) $+\frac{7}{20}$

(b) $-\frac{3}{14}$

(c) $+\frac{1}{12}$

(d) $+\frac{8}{45}$

(e) $+\frac{1}{2}$

(f) $-\frac{1}{3}$

(g) $-\frac{5}{24}$

(h) $-\frac{5}{24}$

[23]

(a) $+\frac{11}{12}$

(b) $-\frac{21}{20}$

(c) $+\frac{47}{18}$

(d) $+\frac{1}{7}$

(e) $+1$

(f) $-\frac{7}{8}$

[24]

(a) $+\frac{4}{7}$

(b) $+\frac{5}{6}$

(c) $-\frac{5}{8}$

(d) $-\frac{6}{5}$

(e) $-\frac{4}{3}$

(f) $+\frac{7}{3}$

(g) $+1$

(h) -1

(i) $+\frac{3}{10}$

(j) $+\frac{3}{5}$

(k) $+1$

(l) $+\frac{1}{6}$

[25]

(a) $+\frac{6}{7}$

(b) $+\frac{5}{2}$

(c) $+\frac{2}{3}$

(d) $-\frac{4}{3}$

(e) $-\frac{5}{4}$

(f) $+\frac{1}{6}$

(g) $-\frac{10}{3}$

(h) $+6$

(i) $+\frac{2}{3}$

[26]

(a) $+\frac{1}{3}$

(b) $+\frac{1}{15}$

(c) $+\frac{2}{15}$

(d) $+\frac{2}{9}$

(e) $-\frac{64}{135}$

(f) $+\frac{112}{243}$

[27]

(a) $+\frac{200}{9}$

(b) $+\frac{3}{4}$

(c) $+\frac{3}{16}$

(d) $+1$

[28]

(a) $+\frac{2}{5}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $+\frac{11}{3}$

(d) -2

(e) $-\frac{5}{11}$

(f) $+1$

[29]

(a) $-\frac{1}{8}$

(b) $+\frac{1}{16}$

(c) $+\frac{8}{27}$

(d) $+\frac{81}{25}$

(e) $+\frac{1}{64}$

(f) $-\frac{1}{100.000}$

[30]

(a) $+\frac{9}{4}$

(b) -8

(c) $+\frac{1}{25}$

(d) $+\frac{64}{27}$

(e) $+10.000$

(f) $+\frac{1}{81}$

[31]

(a) $-\frac{2}{3}$

(b) $\pm\frac{1}{5}$

(c) $\pm\frac{1}{5}$

(d) -10

(e) $+\frac{8}{9}$

(f) $\pm\frac{2}{3}$

[32]

(a) $+\frac{2}{5}$

(b) $+\frac{19}{6}$

(c) $+\frac{5}{6}$

(d) $+\frac{19}{8}$

(e) $-\frac{11}{4}$

(f) $+1$



Repaso

Trigonometría: Resolución de triángulos rectángulos

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Suma de ángulos interiores de un triángulo. Ángulos complementarios. Teorema de Pitágoras. Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Ecuaciones. Resolución de triángulos rectángulos. Funciones trigonométricas y sus inversas. Resolución de triángulos rectángulos: caso "ángulo – lado" y caso "lado – lado".
Criterios de evaluación		
<ul style="list-style-type: none">• Aplica los conceptos vistos.• Usa una técnica coherente de trabajo.• Defiende los resultados producidos.• Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios.		

Resolución de triángulos rectángulos

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto.

Sus elementos más importantes son sus lados y sus ángulos interiores.

Resolver un triángulo significa que debes calcular las medidas desconocidas de sus elementos (incógnitas) a partir de las medidas conocidas (datos).

Hay distintos casos que pueden presentarse para resolver. Comenzaremos con el caso más simple en el que debes resolver un triángulo rectángulo a partir de tener como datos a un lado y un ángulo agudo (además del ángulo recto, recuerda que el triángulo es rectángulo por tener ese ángulo recto).

Necesitarás manejar los siguientes conceptos:

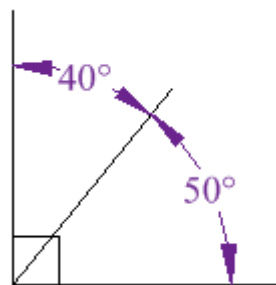
- Suma de ángulos complementarios en un triángulo rectángulo.
- Teorema de Pitágoras.
- Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Ángulos complementarios

Dos ángulos son **complementarios** si suman 90 grados.

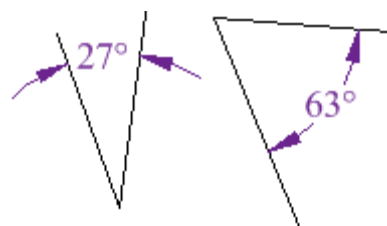
Estos dos ángulos (40° y 50°) son **ángulos complementarios**, porque **suman 90°** .

Fíjate en que juntos hacen un ángulo recto.



Pero los ángulos no tienen por qué estar juntos.

Estos dos son **complementarios** porque $27^\circ + 63^\circ = 90^\circ$





Si los dos ángulos suman 90° , decimos que "**se complementan**". **Complementario** viene del latín *completum* que significa "completo"... porque antiguamente un ángulo recto se consideraba un ángulo *completo*.

Ángulos complementarios en un triángulo rectángulo

La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo da 180° :

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$$

En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos es **recto** y mide 90° :

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 90^\circ = 180^\circ$$

Si paso los 90° al segundo miembro, o sea, al lado derecho del signo =, queda:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ - 90^\circ$$

Resuelvo $180^\circ - 90^\circ$. Ya tengo una fórmula para sus ángulos agudos:

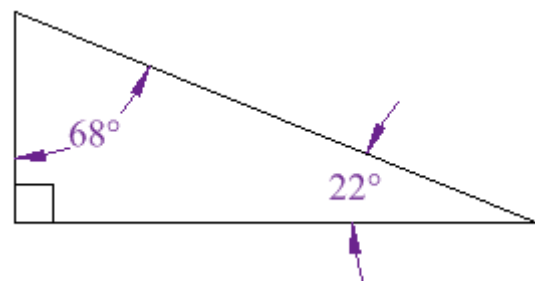
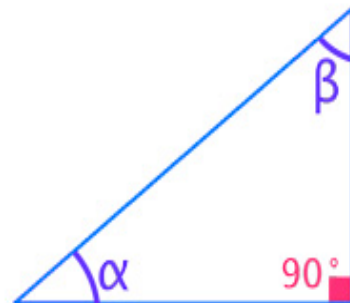
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$$

Suma de ángulos complementarios

Importante: los 90° de esta fórmula no son los del ángulo recto, sino los 90° que faltan sumando los ángulos agudos complementarios para llegar a 180° .

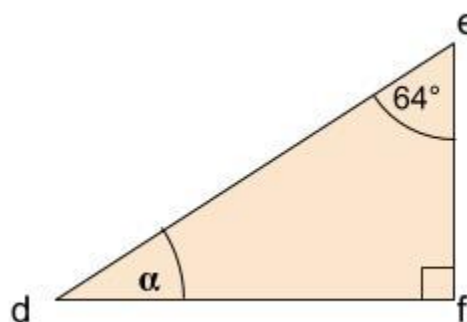
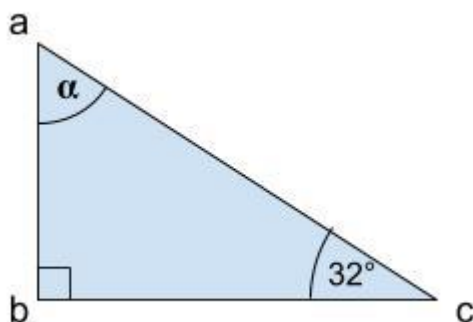
Por lo tanto, **en un triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos siempre son complementarios**.

En la figura de la derecha, por ejemplo, la suma de sus ángulos interiores es $68^\circ + 22^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ como en todo triángulo. Pero, por ser un **triángulo rectángulo**, la suma de sus ángulos agudos es: $68^\circ + 22^\circ = 90^\circ$ por lo que sus ángulos agudos son **complementarios**.

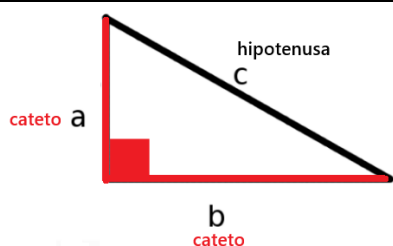


Ejercicio:

Calcula el ángulo α (alfa) en ambos triángulos:



Teorema de Pitágoras



Para el estudio de los triángulos rectángulos, se les dan nombres generales a sus lados:

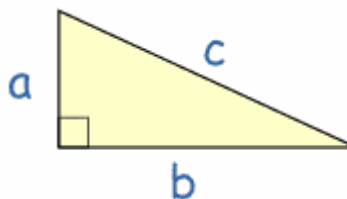
Los dos lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. El lado opuesto al ángulo recto (que está frente al ángulo de 90°) se llama **hipotenusa** y siempre es el lado más largo.

El filósofo griego Pitágoras de Samos, alrededor del siglo VI a.C. (aprox. 530~500 a.C.), descubrió un hecho asombroso sobre los triángulos rectángulos:

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Teorema de Pitágoras

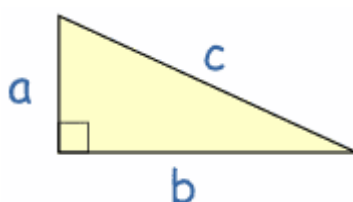


¿Por qué es útil esto?

Si sabemos las longitudes de **dos lados** de un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras nos ayuda a encontrar la longitud del **tercer lado**. (¡Pero recuerda que sólo funciona en triángulos rectángulos!)

¿Cómo lo uso?

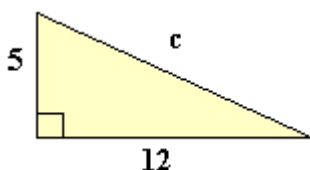
Escríbelo como una ecuación:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ahora puedes usar álgebra para encontrar el valor que falta, como en estos dos ejemplos:

Ejemplo 1:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Reemplaza con los datos:

$$(5m)^2 + (12m)^2 = c^2$$

Puedes resolver el primer miembro:

$$25 m^2 + 144 m^2 = c^2$$

$$169 m^2 = c^2$$

Pasa el cuadrado al primer miembro como raíz:

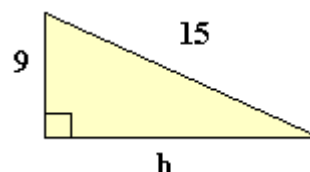
$$\sqrt{169 m^2} = c$$

Distribuye la raíz:

$$\sqrt{169} \sqrt{m^2} = c$$

$$13 m = c$$

Ejemplo 2:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Reemplaza con los datos:

$$(9m)^2 + b^2 = (15m)^2$$

Puedes resolver:

$$81 m^2 + b^2 = 225 m^2$$

Pasa el primer término restando al otro miembro:

$$b^2 = 225 m^2 - 81 m^2$$

Puedes resolver el segundo miembro:

$$b^2 = 144 m^2$$

Pasa el cuadrado al segundo miembro como raíz:

$$b = \sqrt{144 m^2}$$

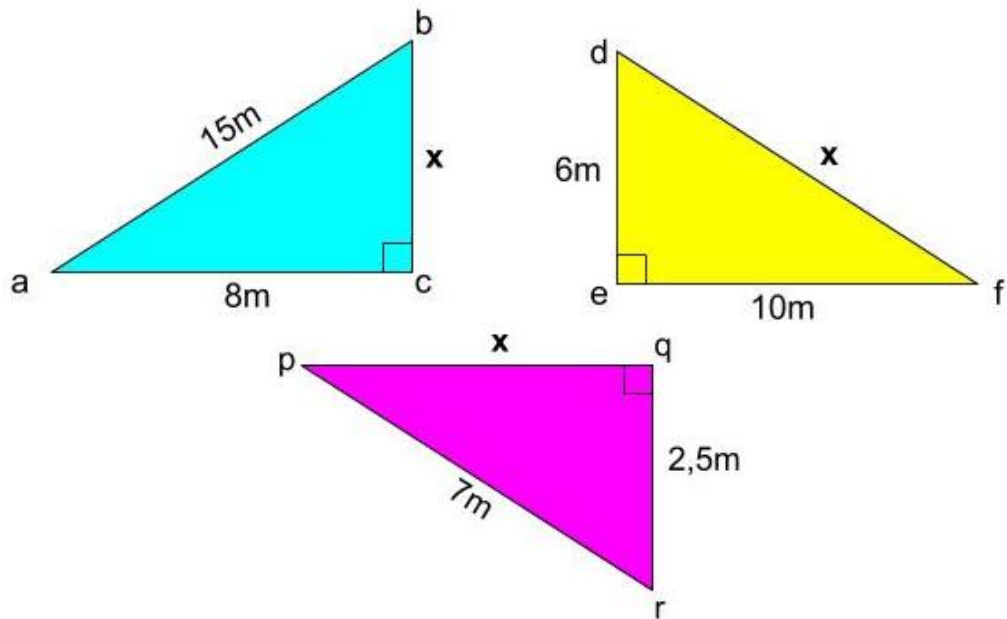
Distribuye la raíz:

$$b = \sqrt{144} \sqrt{m^2}$$

$$b = 12 m$$

Ejercicios

Usando el teorema de Pitágoras, calcula el lado x de cada triángulo rectángulo:



Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente

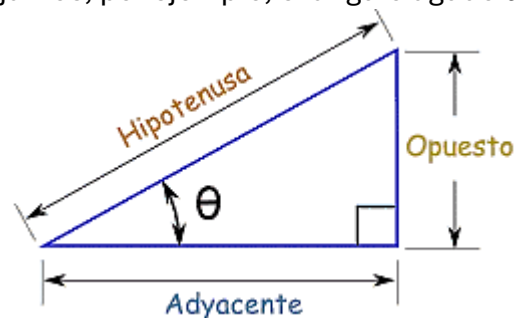
Nombres para los catetos

Antes de concentrarnos en las funciones, nos ayudará dar nombres a los catetos según su posición respecto a un ángulo agudo de referencia en un triángulo rectángulo.

Recuerda que:

- Los dos lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.
- El lado opuesto al ángulo recto (que está frente al ángulo de 90°) se llama **hipotenusa**.

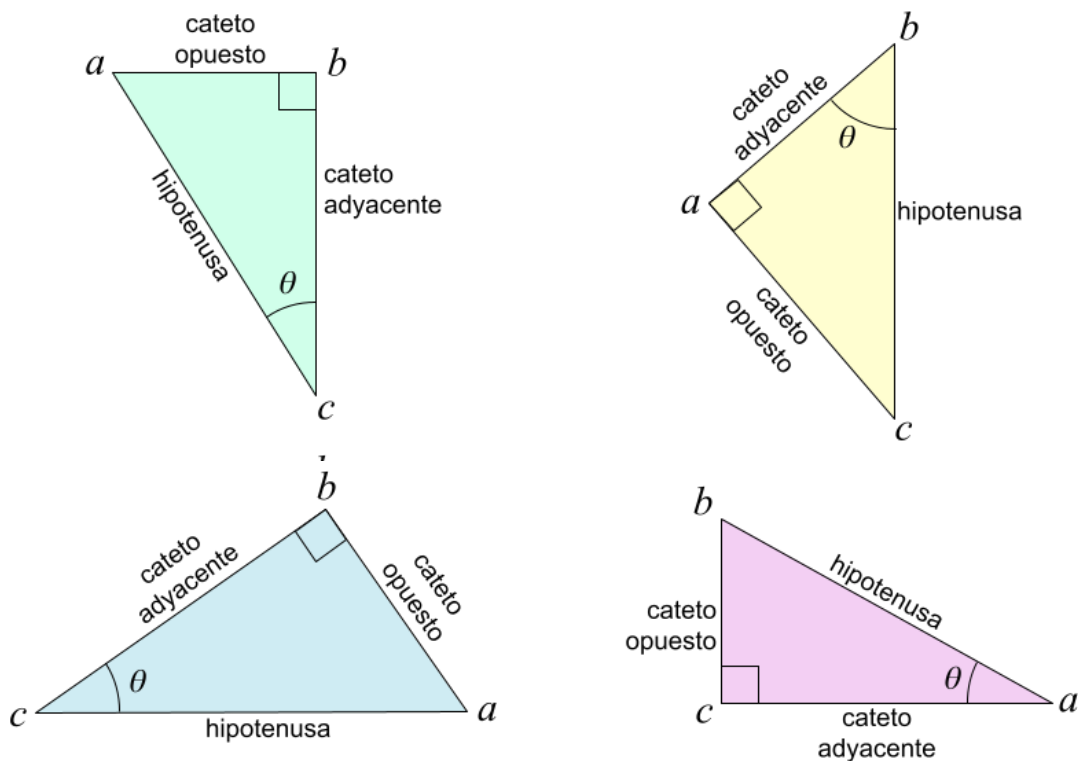
Para nuestro estudio, necesitamos tomar un ángulo agudo como referencia pero **nunca será referencia el ángulo recto**. Elijamos, por ejemplo, el ángulo agudo θ :



Según el ángulo agudo de referencia que elijamos, los catetos se llamarán:

- **Cateto opuesto** es el cateto en frente al ángulo agudo de referencia θ .
- **Cateto adyacente** es el cateto al lado del ángulo de referencia θ .

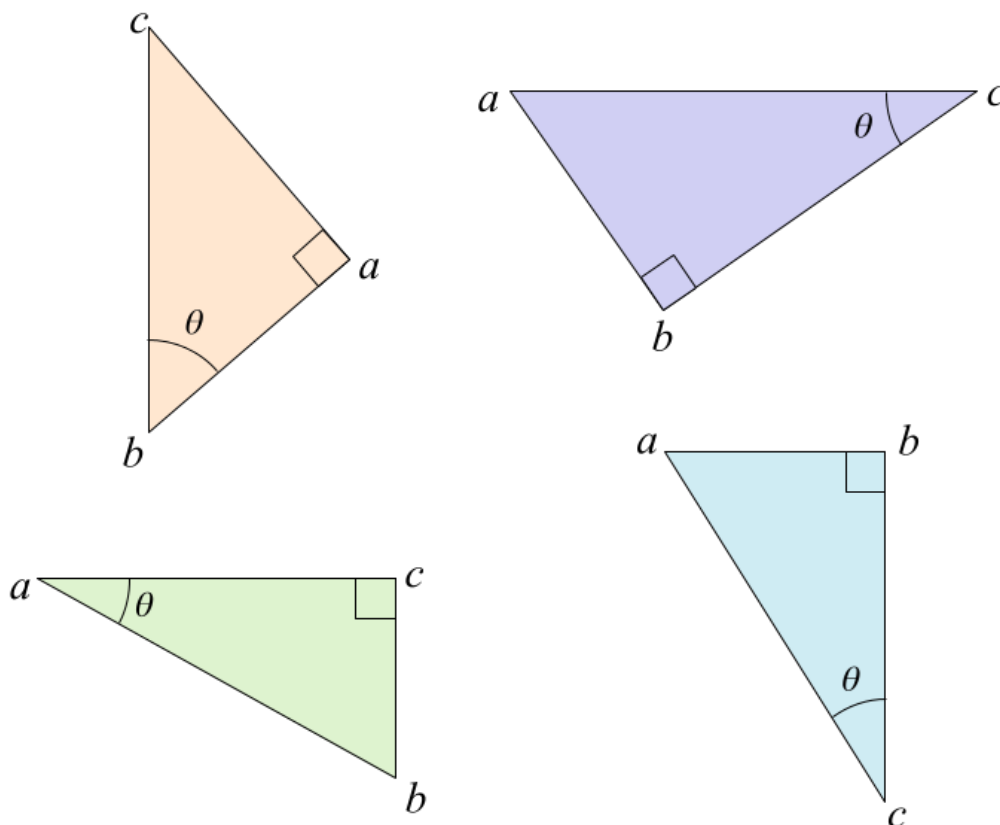
Ejemplos:



Es importantísimo que no confundas los nombres.

Ejercicios

Escribe, junto a los lados que correspondan, los nombres de cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa:



Seno, coseno y tangente

Las tres funciones más importantes en trigonometría son el seno, el coseno y la tangente. Cada una es una división entre un par de lados del triángulo rectángulo.

Para el ángulo θ :

$$\text{Función seno: } \sin \theta = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Función coseno: } \cos \theta = \frac{\text{c. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Función tangente: } \tan \theta = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}}$$

Nota: el seno se suele escribir *sin* (por la palabra inglesa "sine") o *sen*. Aquí utilizaremos *sen* pero puedes encontrarte la otra notación en libros o sitios web.

SOHCAHTOA

😬 SOHCAH...¿qué? ¡Sólo es una manera de recordar qué lados se dividen! Así:

SOH: **S**eno del ángulo = **O**puesto / **H**ipotenusa

CAH: **C**oseno del ángulo = **A**dyacente / **H**ipotenusa

TOA: **T**angente del ángulo = **O**puesto / **A**dyacente

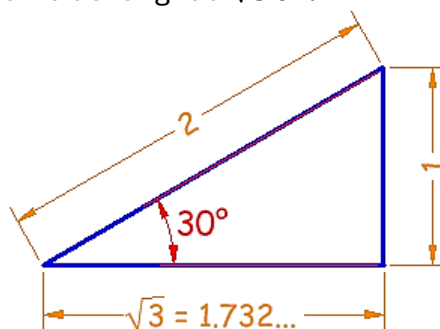
Memoriza "SOHCAHTOA" porque ¡te puede ayudar en una evaluación o examen!

Importante: no es correcto poner solos *sen*, ni *cos*, ni *tan* sin poner su ángulo agudo de referencia. Siempre debes poner **sen del ángulo**, **cos del ángulo** o **tan del ángulo**.

Ejemplo

¿Cuáles son el seno, coseno y tangente de 30° ?

Este triángulo rectángulo de 30° tiene una hipotenusa de longitud 2 cm , un cateto opuesto de longitud 1 cm y un cateto adyacente de longitud $\sqrt{3} \text{ cm}$:



$$\sin 30^\circ = \frac{1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

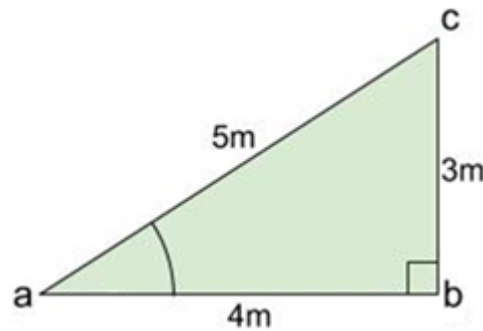
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{1,732}{2} = 0,866$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1 \text{ cm}}{\sqrt{3} \text{ cm}} = \frac{1}{1,732} = 0,577$$

Observa que se simplifican las unidades de longitud [cm] y el resultado de la división da un **valor adimensional**, o sea, un **número puro sin unidades físicas asociadas** (como centímetros, grados, metros, kilogramos, segundos, etc.).

Ejercicio:

Calcular $\text{sen } \hat{a}$, $\text{cos } \hat{a}$ y $\text{tan } \hat{a}$ para el siguiente triángulo rectángulo. Redondea a 3 decimales.



Otras funciones trigonométricas menos comunes

Para completar el cuadro, hay otras 3 funciones trigonométricas, pero no se usan tanto. Son iguales a 1 dividido en una de las tres funciones básicas (sen , cos o tan), así:

$$\text{Función cosecante:} \quad \text{cosec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{c. opuesto}} = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\text{Función secante:} \quad \text{sec } \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{c. adyacente}} = \frac{1}{\text{cos } \theta}$$

$$\text{Función cotangente:} \quad \text{cotan } \theta = \frac{\text{c. adyacente}}{\text{c. opuesto}} = \frac{1}{\text{tan } \theta}$$

Repaso

Resolución de triángulos rectángulos

Qué significa resolver un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo es calcular las magnitudes de todos sus elementos incógnitas a partir de dos elementos conocidos (además del ángulo recto de dicho triángulo rectángulo que ya sabemos que mide 90°). Las incógnitas pueden ser los catetos, la hipotenusa o los ángulos internos del triángulo rectángulo exceptuando el ángulo recto que nunca será incógnita.

Los casos que estudiaremos son dos:

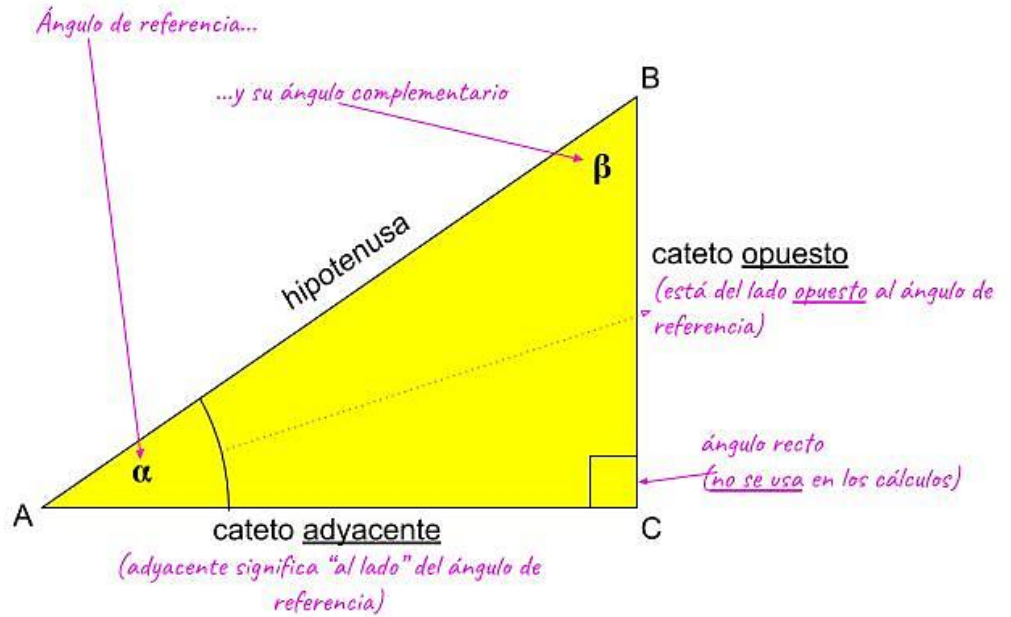
- **Caso LA** (lado~ángulo): cuando los datos sean un lado y un ángulo agudo.
- **Caso LL** (lado~lado): cuando los datos sean dos lados.

En ambos casos, el ángulo recto está presente.

Nota: No se puede resolver un triángulo teniendo como datos solo ángulos. Siempre se necesita como mínimo uno de los lados como dato.

Cómo resolver un triángulo rectángulo: caso LA (lado~ángulo)

Comenzaremos estudiando el caso más simple que es resolver un triángulo rectángulo teniendo un lado (ya sea alguno de los catetos o la hipotenusa) y uno de los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Para resolverlo, usaremos las siguientes expresiones:



Suma de ángulos complementarios: $\alpha + \beta = 90^\circ$

Teorema de Pitágoras: $c. opuesto^2 + c. adyacente^2 = hipotenusa^2$

Razones trigonométricas

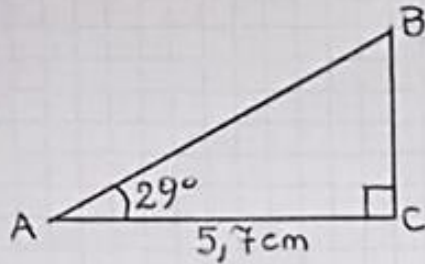
$$\sin \alpha = \frac{c.opuesto}{hipotenusa}$$

$$\cos \alpha = \frac{c.adyacente}{hipotenusa}$$

$$\tan \alpha = \frac{c.opuesto}{c.adyacente}$$

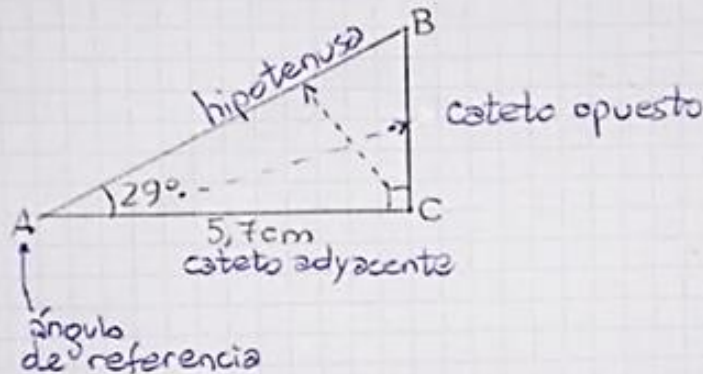
Resolver un triángulo rectángulo significa calcular todas sus incógnitas; no se trata de usar todas las expresiones anteriores. Ejemplo:

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



1er paso: Identificar ángulo de referencia (aquí siempre se toma como referencia al ángulo cuya medida conozco), cateto opuesto (frente al ángulo de referencia), cateto adyacente (lado junto al ángulo de referencia) y la hipotenusa (lado más largo frente al ángulo recto).

Para este ejemplo:



Observamos:

DATOS:

$$\hat{A} = 29^\circ$$

$$\overline{CA} = 5,7\text{cm}$$

$$\hat{C} = 90^\circ$$

INCÓGNITAS:

$$\hat{B}; \overline{AB}; \overline{BC}.$$

2do paso: Completar en las cinco expresiones ya vistas con los nombres de las incógnitas y con los valores de los datos.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$29^\circ + \hat{B} = 90^\circ$$

ángulo de referencia

$$\text{cop}^2 + \text{cad}^2 = \text{hip}^2$$

$$\overline{BC}^2 + (5,7\text{cm})^2 = \overline{AB}^2$$

cateto opuesto cateto adyacente hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cop}}{\text{hip}}$$

$$\text{sen } 29^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cad}}{\text{hip}}$$

$$\text{cos } 29^\circ = \frac{5,7\text{cm}}{\overline{AB}}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cop}}{\text{cad}}$$

$$\text{tan } 29^\circ = \frac{\overline{BC}}{5,7\text{cm}}$$

O sea, si sabes cuánto vale entonces escribe su valor, pero si no sabes cuánto vale, colócale un nombre (que no sean x).

(A veces, los alumnos tienden a llamarle "x" a todas las incógnitas y solo crean confusión porque necesitamos identificar a cada incógnita por separado.)

3er paso: Despejar las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan solo una incógnita. Analicemos cuáles de las cinco ecuaciones anteriores son útiles y cuáles no.

▶ $29^\circ + \hat{B} = 90^\circ$

Tiene una sola incógnita, entonces esta ecuación sirve. Despejémosla:

$$\begin{aligned} 29^\circ + \hat{B} &= 90^\circ \\ \hat{B} &= 90^\circ - 29^\circ \\ \hat{B} &= 61^\circ \\ &\text{¡Listo! 😊} \end{aligned}$$

¡IMPORTANTE!
La idea al despejar una incógnita es que nos quede **solo** en un miembro (o lado del signo =), **positiva** y en el **numerador** (o sea, al nivel del renglón, nunca "abajo" o dividiendo).

▶ $\overline{BC}^2 + (5,7\text{cm})^2 = \overline{AB}^2$ 😞

Tiene más de una incógnita, entonces esta ecuación (en este momento) no nos sirve. (Luego, más tarde, podría servir).

▶ $\text{sen } 29^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ← Tiene más de una incógnita; no sirve (al menos por ahora). 😞

▶ $\text{cos } 29^\circ = \frac{5,7\text{cm}}{\overline{AB}}$ ← Tiene una sola incógnita. Sirve. Despejemos:

$\text{cos } 29^\circ = \frac{5,7\text{cm}}{\overline{AB}}$ xx

¡IMPORTANTE!
La incógnita no puede quedarnos allí abajo. **LO PRIMERO ES INTENTAR SACARLA DE ALLÍ DEBAJO.**

$\cos 29^\circ = \frac{5,7\text{cm}}{\overline{AB}}$ ← Esta incógnita está dividiendo (porque está ABAJO como DIVISOR) así que pasa multiplicando.

$\cos 29^\circ \cdot \overline{AB} = 5,7\text{cm}$.

Ahora sí, podemos despejarla. Movamos el $\cos 29^\circ$ al otro miembro dividiendo. Pasan juntos.

$\overline{AB} = \frac{5,7\text{cm}}{\cos 29^\circ}$ Ya quedó despejada.

¿Cómo hago este cálculo en calculadora?
Primero, hay que indicar a la calculadora que usamos grados sexagesimales para los ángulos. Mira la pantalla de la calculadora. Debería tener escrito alguna de estas:

D o DEG

Si no las tiene, toca la tecla **Mode** varias veces hasta que la pantalla diga:

Deg	Rad	Gra
1	2	3

y toca **1**. En inglés, DEG es "degree" o "grado".
RAD es "radian", otra unidad de amplitud.
GRA es "gradián", no es "grado". ¡Cuidado!

Ahora sí: $5,7 \div \cos 29 =$
 $\overline{AB} \approx 6,517118187 \text{ cm}$.

Redondeamos en clase a 3 cifras decimales.

$\overline{AB} \approx 6,517 \text{ cm}$; Lista otra más! 😊

▶ Ya la última:

$\tan 29^\circ = \frac{\overline{BC}}{5,7\text{cm}}$ ← sí sirve porque tiene una incógnita. Por suerte, está positiva y en el numerador. Solo falta dejarla sola.

El 5,7cm la está dividiendo así que lo pasamos multiplicando:

$$\tan 29^\circ \cdot 5,7 \text{ cm} = \overline{BC}$$

En calculadora:

$$\tan 29 \times 5.7 =$$

Si tu calculadora escribe paréntesis, debes cerrarlo en el ángulo:

$$\tan(29) \times 5.7 =$$

$$3,159561593 \text{ cm} \approx \overline{BC}$$

Redondeamos:

$$3,16 \text{ cm} \approx \overline{BC} \quad \text{¡Terminamos!} \quad \text{😊}$$

Rtas: $\hat{B} = 61^\circ$

Hipotenusa: $\overline{AB} \approx 6,517 \text{ cm}$.

Cateto opuesto: $\overline{BC} \approx 3,16 \text{ cm}$.

Cuando tengas más práctica, sabrás, antes de escribir ninguna ecuación, que expresiones usarás y cuáles no.

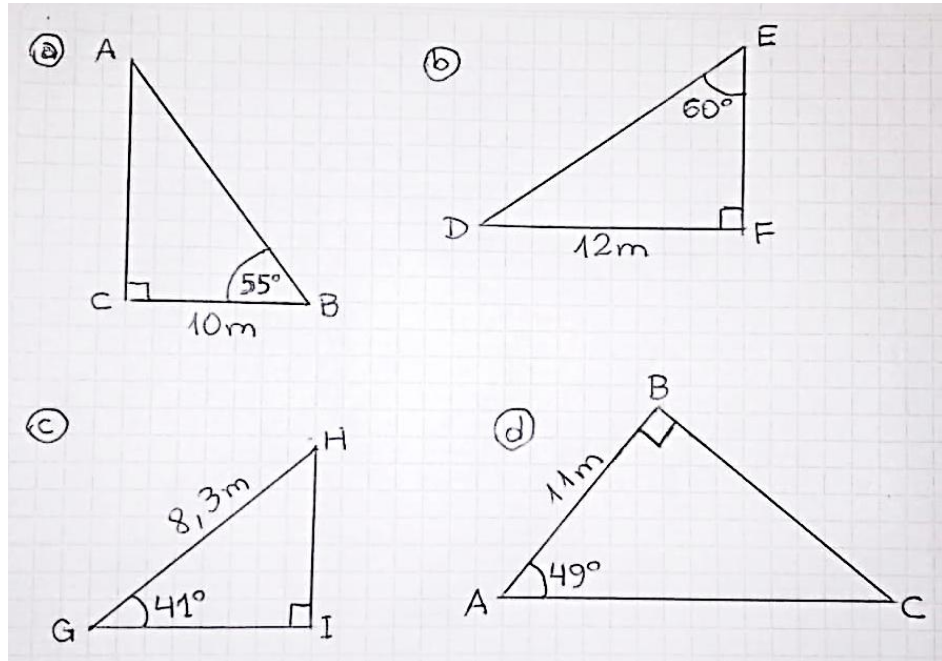
Conclusión:

Resolviendo un triángulo rectángulo en el caso *lado-ángulo*:

- Primero identificamos al **ángulo de referencia** (de él depende qué cateto es opuesto y cuál es adyacente), su **ángulo complementario** (o sea el otro ángulo agudo), el **cateto opuesto**, el **cateto adyacente** y la **hipotenusa** (es **muy importante que no los confundas**), y observamos cuáles de ellos son **datos** y cuáles son **incógnitas**.
- Luego, escribimos las cinco expresiones: **suma de ángulos complementarios**, **teorema de Pitágoras** y **seno, coseno y tangente de un ángulo**. En ellas, completamos con valores de los datos y nombres de las incógnitas.
- Despejamos las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan **una sola incógnita**. Y algo importante: **si la incógnita está dividiendo ("abajo")**, **lo primero será sacarla de ahí abajo** pasándola al otro miembro multiplicando.

Ejercicios:

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Sigue los pasos del ejemplo. Claro que, al tener datos e incógnitas distintos, los desarrollos variarán. Ahora, dejo aquí los resultados para que controles:

- | | |
|---|---|
| <p>a) Ángulo complementario: $\hat{A} = 35^\circ$
 Hipotenusa: $\overline{AB} = 17,434 \text{ m}$
 Cateto opuesto: $\overline{CA} = 14,281 \text{ m}$</p> | <p>c) Ángulo de referencia: $\hat{H} = 49^\circ$
 Cateto opuesto: $\overline{HI} = 5,445 \text{ m}$
 Cateto adyacente: $\overline{IG} = 6,264 \text{ m}$</p> |
| <p>b) Ángulo complementario: $\hat{D} = 30^\circ$
 Hipotenusa: $\overline{DE} = 13,856 \text{ m}$
 Cateto adyacente: $\overline{EF} = 6,928 \text{ m}$</p> | <p>d) Ángulo de referencia: $\hat{C} = 41^\circ$
 Hipotenusa: $\overline{AB} = 16,767 \text{ m}$
 Cateto opuesto: $\overline{BC} = 12,654 \text{ m}$</p> |

Funciones trigonométricas inversas

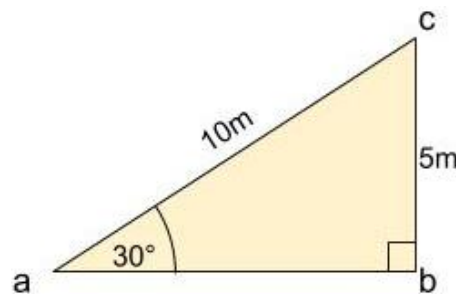
Cuando estudiamos las definiciones de las razones trigonométricas, vimos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{catetoadyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{catetoadyacente}}$$

Analicemos el siguiente ejemplo:

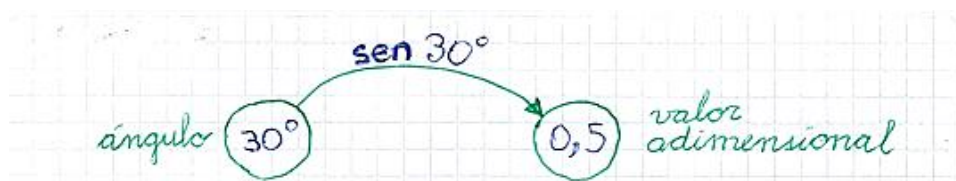


Si calculo, digamos, el seno de 30° para este triángulo rectángulo:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{5 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Observa que simplifiqué las unidades de longitud [m] por lo que el resultado del seno de 30° es el valor 0,5 que es una **magnitud adimensional**: no tiene unidades de magnitud, ni de longitud, como por ejemplo *metros* [m], ni unidades de amplitud, como por ejemplo *grados sexagesimales* [$^\circ$ "].

En un gráfico:



O sea que si a un ángulo le aplico una función trigonométrica obtendré una magnitud adimensional.

Importantísimo recordar: Todas las razones trigonométricas como *seno*, *coseno* y *tangente*, siempre dan como resultado un valor adimensional.

Supongamos que debo resolver la siguiente ecuación:

$$\text{sen } x = 0,5$$



¿Cómo despejo x ? Pues necesito pasar la función *seno* hacia el otro miembro, hacia el otro lado del signo =, y deberá pasar como la **inversa** del seno.

La inversa del seno se llama **"arco seno"**. En el gráfico, **en rojo**:



El "arco seno de 0,5" se interpreta como "¿cuál es el arco (ángulo) cuyo seno da 0,5?" Ya sabemos, por el ejemplo anterior, que x vale 30° , pero ¿cómo despejamos y cómo lo obtengo con la calculadora?

Función \swarrow argumento
 $\text{sen } x = 0,5$

No hay multiplicación.
 (no hay nada entremedio)

$x = \text{arc sen } 0,5$

El "seno" acompaña a x . Despejemos x . Hay que pasar el "seno" solo, sin la x , al otro miembro.

El "seno" pasa como su inversa: el "arco seno".

En la calculadora, si en pantalla dice **D** o **DEG**:

$\text{SHIFT} \left[\overset{\text{sin}^{-1}}{\text{sin}} \right] 0.5 = \boxed{0.30}$

Para que tome lo que está por arriba del botón.

Para convertir la parte decimal del resultado (ángulo) en minutos y segundos.

$x = 30^\circ$

Las funciones trigonométricas inversas dan un ángulo como resultado

Las “funciones” trigonométricas inversas son las inversas del seno, del coseno y de la tangente:

Nombre	Notación
arco seno	arc sen
arco coseno	arc cos
arco tangente	arc tan

Cuidado con el coseno y su inversa: no es “arco seno” que es la inversa del seno, es arco **co**seno.

Como trabajaremos con calculadora científica en los ejercicios de resolución de triángulos rectángulos, siempre obtendremos como resultado un solo ángulo entre 0° y 90° .

Ejercicio

Despeja la incógnita (muestra cómo pasas la función trigonométrica hacia el otro miembro) y obténla usando calculadora científica:

$$\text{sen } a = 0,505\ 071\ 685$$

$$\text{cos } b = 0,814\ 959\ 255$$

$$\text{tan } c = 1,792\ 553\ 005$$

Los resultados serán:

$$a = 30^\circ\ 20'\ 10''$$

$$b = 35^\circ\ 25'$$

$$c = 60^\circ\ 50'\ 40''$$

Cómo resolver un triángulo rectángulo: caso LL (*lado-lado*)

El caso que estudiamos antes era el **caso lado-ángulo** en el que teníamos como datos a un lado y un ángulo. Ahora, estudiaremos el nuevo **caso lado-lado** donde los datos son dos lados.

Los pasos para resolver un triángulo rectángulo son:

- 1) Elegir el ángulo de referencia α (no puede ser el ángulo recto) y determinar cuáles son el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa.
- 2) Detectar cuáles son los datos y cuáles son las incógnitas.
- 3) Completar con datos y nombres de incógnitas en las expresiones:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$c.\text{opuesto}^2 + c.\text{adyacente}^2 = \text{hipotenusa}^2$$



$$\text{sen } \alpha = \frac{c.\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

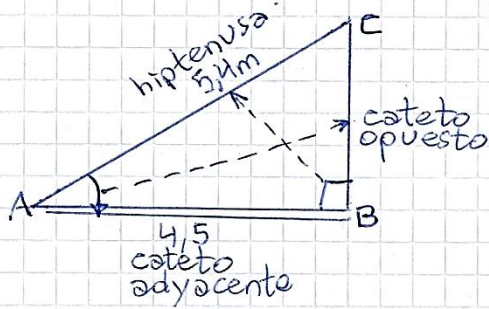
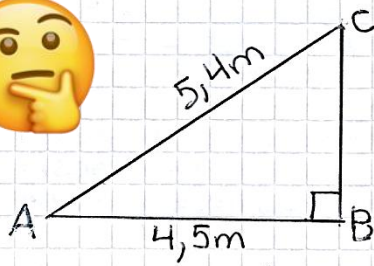
$$\text{cos } \alpha = \frac{c.\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{c.\text{opuesto}}{c.\text{adyacente}}$$

- 4) Despeja las incógnitas en aquellas ecuaciones con una sola incógnita. (Puedes reemplazar en cualquier momento a una incógnita si ya la calculaste.)

Ahora, veamos un ejemplo:

Resuelve el siguiente triángulo rectángulo:



Lo primero que hacemos es tomar uno de los ángulos agudos, A o C, como ángulo de referencia para poder distinguir los catetos opuesto y adyacente. Yo elegire el ángulo A como referencia, por capricho. Recuerda que nunca se puede tomar al ángulo recto como referencia.

Ahora, voy a completar, en las cinco expresiones que estudiamos en la guía anterior, con los datos y las incógnitas. Recuerda que me servirán aquellas ecuaciones que tengan una sola incógnita.

► $\alpha + \beta = 90^\circ$
 $\hat{A} + \hat{C} = 90^\circ$
 Tiene dos incógnitas. Ahora mismo, no me sirve!



► $cop^2 + cad^2 = hip^2$
 $BC^2 + (4,5m)^2 = (5,4m)^2$

Esta ecuación me sirve pues tengo una sola incógnita. Lo despejo:

$$BC^2 = (5,4m)^2 - (4,5m)^2$$

$$BC = \sqrt{(5,4m)^2 - (4,5m)^2}$$

En la calculadora: $\sqrt{} (5.4 ^2 - 4.5 ^2) =$

En la pantalla se verá así: $\sqrt{(5.4^2 - 4.5^2)}$ El radicando lleva paréntesis en calculadora.

Errores comunes en calculadora:

$\sqrt{(5.4)^2 - (4.5)^2} =$ Error en los paréntesis, permite separar en términos y resolver la raíz antes de la resta.

$\sqrt{5.4^2 - 4.5^2} =$ Mismo problema de antes.

$BC \approx 2,985 \text{ m}$ cateto opuesto



$$\triangleright \sin \alpha = \frac{\text{cop}}{\text{hip}}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{5,4\text{m}}$$

No me sirve ya pues tiene más de una incógnita.

$$\triangleright \cos \alpha = \frac{\text{cad}}{\text{hip}}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{4,5\text{m}}{5,4\text{m}}$$

Me sirve pues tiene solo una incógnita. Despejo:

$$\hat{A} = \arcsen \frac{4,5\text{m}}{5,4\text{m}}$$

Al simplificar, me queda un valor adimensional (sin: "metros" ni "grados").



En la calculadora, es obligatorio poner paréntesis (porque en matemática se resuelven primero las funciones y después las divisiones.) El paréntesis obliga a la calculadora a hacer la división primera porque está "encerrada" y le aplicará el arco seno al resultado de la división.

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{COS}^{-1}} (4.5 \div 5.4) = \boxed{0.977}$$

$$\boxed{\hat{A} \approx 33^{\circ} 33' 26,32''}$$

$$\triangleright \tan \alpha = \frac{\text{cop}}{\text{cad}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{4,5\text{m}}$$

Tiene dos incógnitas.

Observa que ya usé las cinco expresiones pero aún me falta calcular el ángulo C. La forma más fácil de calcularlo es colocando el valor que obtuve para A en:

$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$

$$33^{\circ} 33' 26,32'' + \hat{C} = 90^{\circ}$$

$$\hat{C} = 90^{\circ} - 33^{\circ} 33' 26,32''$$

En calculadora: $90 \boxed{0.111} - 33 \boxed{0.111} 33 \boxed{0.111} 26.32 \boxed{0.111} =$



$$\boxed{\hat{C} = 56^{\circ} 26' 33,68''}$$

Como viste en el cálculo del último ángulo, puedes reemplazar a una incógnita si ya la calculaste, en cualquier momento y no necesariamente al final como hice. En el ejemplo, habiendo calculado el lado BC usando el teorema de Pitágoras, podría haber reemplazado en la ecuación del seno al lado BC con 2,985m, y habría calculado allí mismo el ángulo A.

Conclusión:

Este otro caso no presenta nada nuevo aparte de la necesidad de despejar un ángulo.

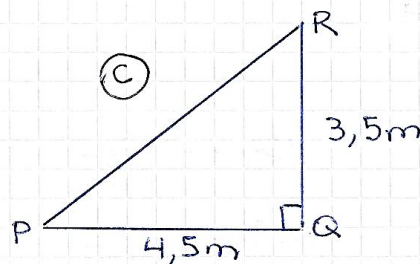
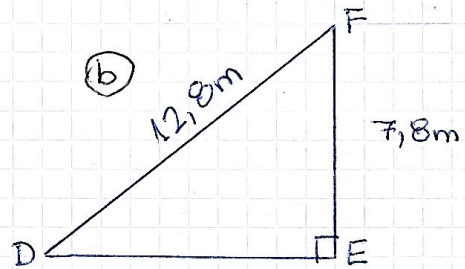
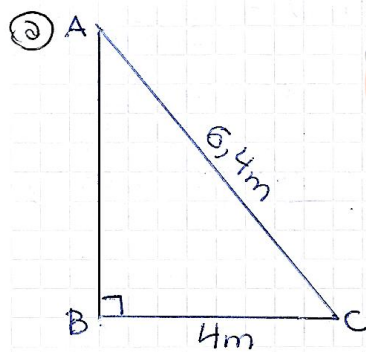
Resolviendo un triángulo rectángulo en el caso *lado-lado*, igual que en el caso anterior:



- Primero identificamos al **ángulo de referencia** que no puede ser el ángulo recto (de él depende qué cateto es opuesto y cuál es adyacente), su **ángulo complementario** (o sea el otro ángulo agudo), el **cateto opuesto**, el **cateto adyacente** y la **hipotenusa** (es **muy importante que no los confundas**)
- Detectamos cuáles de ellos son **datos** y cuáles son **incógnitas**.
- Luego, escribimos las cinco expresiones: **suma de ángulos complementarios, teorema de Pitágoras y seno, coseno y tangente de un ángulo**. En ellas, completamos con valores de los datos y nombres de las incógnitas.
- Despejamos las incógnitas de aquellas ecuaciones que tengan **una sola incógnita**. Recuerda que para calcular el ángulo que falta, reemplaza en la ecuación de la suma de ángulos complementarios con el valor que obtuviste para tu ángulo de referencia.

Ejercicios

Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



Para que controles ejercicios: estos son los resultados que debes obtener. En el caso que no obtengas estos resultados, no modifiques aleatoriamente tus desarrollos para obtener los resultados esperados. Más bien consulta a tu profesor.

a) $\overline{AB} = 4,996 \text{ m}$

$\hat{C} = 51^\circ 19' 4,13''$

$\hat{A} = 38^\circ 40' 55,87''$

b) $\overline{DE} = 10,149 \text{ m}$

$\hat{D} = 37^\circ 32' 39,57''$

$\hat{F} = 52^\circ 27' 20,43''$

c) $\overline{RP} = 5,701 \text{ m}$

$\hat{P} = 37^\circ 52' 29,94''$

$\hat{R} = 52^\circ 7', 06''$

Unidades de amplitud

Unidades de amplitud

☆ **Grados y Radianes:** Los Radianes son una forma nueva de expresar medidas angulares en función de π

La equivalencia en grados de 1π Radian es $180^\circ \Rightarrow \boxed{\pi = 180^\circ}$

Para pasar un ángulo a Radianes, sólo debemos hacer una Regla de 3 Simple.

Ejemplo pasemos 135° a radianes. $180^\circ \dots\dots\dots 1 \pi$ Radianes $\Rightarrow x = \frac{135^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \pi$
 $135^\circ \dots\dots\dots x$ Radianes

Ejercicios:

1. Convierte los ángulos:

De grados sexagesimales a radianes:

- | | |
|-----------------|------------------|
| a) $30^\circ =$ | c) $90^\circ =$ |
| b) $45^\circ =$ | d) $135^\circ =$ |

De radianes a grados sexagesimales:

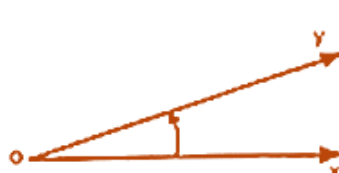
- | | |
|------------------------|------------------------|
| e) $\frac{2}{3} \pi =$ | g) $\pi =$ |
| f) $\frac{3}{2} \pi =$ | h) $\frac{4}{3} \pi =$ |

Gráficas de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas que has estudiado se referían a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Ahora vamos a generalizar estas definiciones para cualquier ángulo.

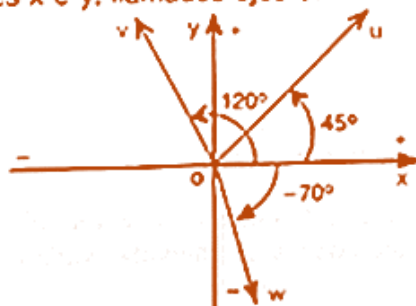
Ángulos orientados

Concepto de **ángulo orientado aplicado a las rotaciones:**



Un ángulo orientado $\overline{ox\hat{y}}$ queda determinado por un par ordenado de semirrectas del mismo origen $(\overline{ox}; \overline{oy})$
 \overline{ox} se llama lado origen de $\overline{ox\hat{y}}$
 \overline{oy} se llama lado extremo de $\overline{ox\hat{y}}$

Representamos los ángulos orientados referidos a un par de ejes perpendiculares x e y , llamados **ejes cartesianos ortogonales**.



Fijamos dos sentidos: positivo y negativo, sobre cada eje, según se indica en la figura.
 Para los ángulos orientados se elige como lado origen el semieje positivo \overline{ox} .

Establezcamos la siguiente:

CONVENCIÓN

- Si la rotación se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj (antihorario), asignamos al ángulo el signo positivo: +
- Si la rotación se realiza en el sentido de las agujas del reloj (horario), asignamos al ángulo el signo negativo: -

$$\widehat{xOy} = + 45^\circ$$

$$\widehat{xOv} = + 120^\circ$$

$$\widehat{xOw} = - 70^\circ$$



Los ejes dividen al plano en cuatro ángulos congruentes. Cada uno de ellos se llama cuadrante.

Si el lado extremo está en el primer cuadrante decimos que es un ángulo del primer cuadrante.

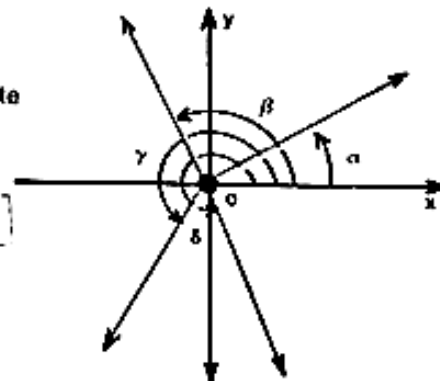
Si el lado extremo está en el segundo cuadrante, decimos que es un ángulo del segundo cuadrante, etc.

α es un ángulo del primer cuadrante

β es un ángulo del segundo cuadrante

γ es un ángulo del tercer cuadrante

δ es un ángulo del cuarto cuadrante



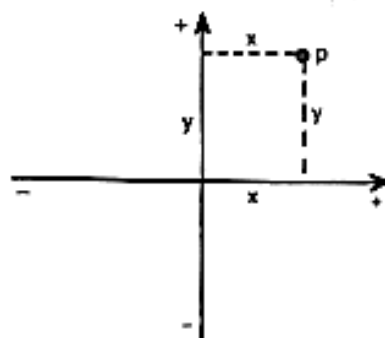
Coordenadas del punto p

Para ubicar un punto en el plano es suficiente conocer:

- la distancia al eje y: **abscisa** (se mide sobre el eje x)
- la distancia al eje x: **ordenada** (se mide sobre el eje y)

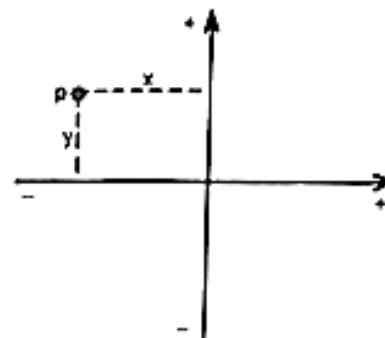
La abscisa y la ordenada son los elementos de referencia o las coordenadas cartesianas ortogonales del punto p. Los signos de las coordenadas varían según los cuadrantes.

Primer cuadrante



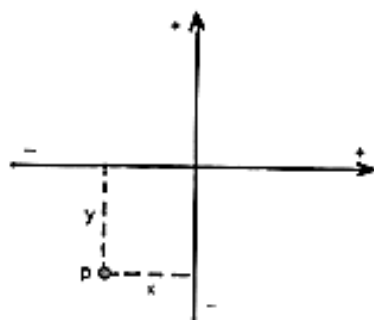
x: abscisa positiva
y: ordenada positiva

Segundo cuadrante



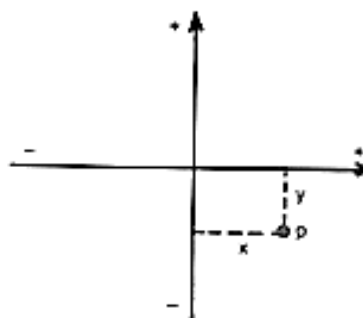
x: abscisa negativa
y: ordenada positiva

Tercer cuadrante



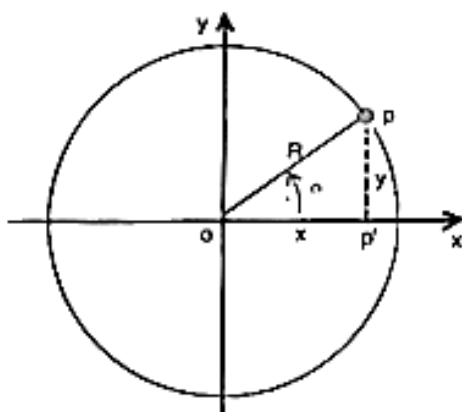
x: abscisa negativa
y: ordenada negativa

Cuarto cuadrante



x: abscisa positiva
y: ordenada negativa

Funciones goniométricas de un ángulo α



Consideramos un punto p sobre la circunferencia de centro o y radio R .

Sus coordenadas son:

x: abscisa
y: ordenada

En el triángulo rectángulo $op'p$ definimos las funciones del ángulo α .

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{y}{R} = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} \\ \text{cos } \alpha &= \frac{x}{R} = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} \\ \text{cotg } \alpha &= \frac{x}{y} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} \\ \text{sec } \alpha &= \frac{R}{x} = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}} \\ \text{cosec } \alpha &= \frac{R}{y} = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} \end{aligned}$$

Estas funciones se denominan funciones goniométricas.

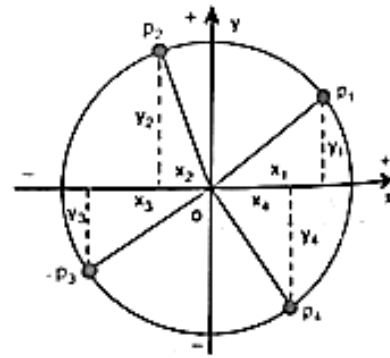
Ejemplo: la función "seno" hace corresponder a cada ángulo α un número llamado seno de α .

$$\text{función seno: } \alpha \longrightarrow \text{sen } \alpha = \frac{y}{R}$$

Observa: según el cuadrante a que pertenezca el punto p varían los signos de sus coordenadas x e y . En cambio el signo de R , radio de la circunferencia, es siempre positivo.

En consecuencia los signos de las funciones dependen de los signos de x e y . El siguiente cuadro te muestra la variación de los signos de las funciones seno y coseno en los cuatro cuadrantes, que se obtienen aplicando la regla de los signos del cociente.

	R	x	y	$\text{sen } \alpha = \frac{y}{R}$	$\text{cos } \alpha = \frac{x}{R}$
1 ^{er} cuadrante	+	+	+	+	+
2 ^{do} cuadrante	+	-	+	+	-
3 ^{er} cuadrante	+	-	-	-	-
4 ^{to} cuadrante	+	+	-	-	+



Observa: el signo del seno coincide con el signo de la ordenada.
el signo del coseno coincide con el signo de la abscisa.

El enlace de abajo lleva a una gráfica interactiva donde podrás ver cómo se obtienen las gráficas de seno, coseno y tangente moviendo el punto p alrededor de la circunferencia goniométrica:

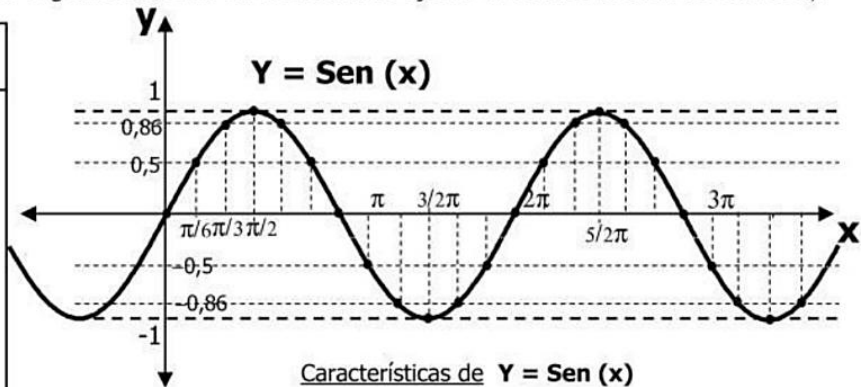


<https://www.geogebra.org/m/HdnfNmWA>

☆ Características de las Funciones Trigonométricas

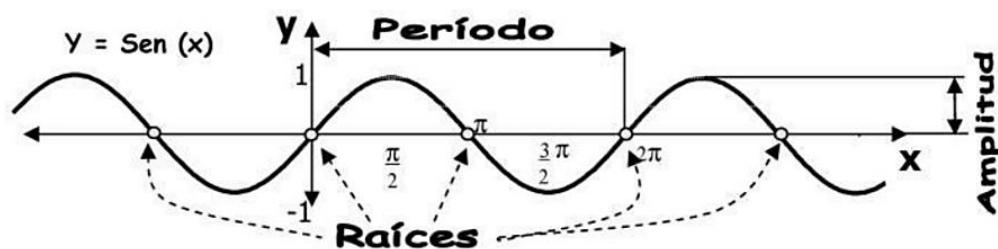
➤ **Función Seno** Veamos el gráfico del Seno en el Sistema de Ejes X-Y. Veamos la tabla de valores X;Y

X		Y
Grados	Radianes	
0°	0 π	0
30°	1/6 π	0,5
60°	1/3 π	0,866
90°	1/2 π	1
120°	2/3 π	0,866
150°	5/6 π	0,5
180°	1 π	0
210°	7/6 π	-0,5
240°	4/3 π	-0,866
270°	3/2 π	-1
300°	5/3 π	-0,866
330°	11/6 π	-0,5
360°	2 π	0



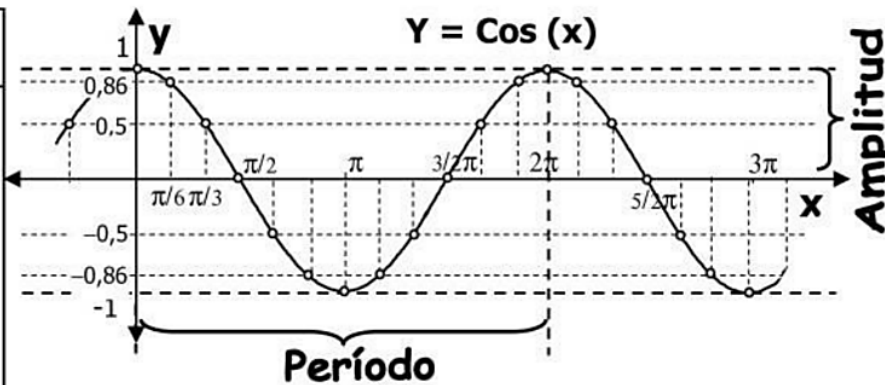
Características de $Y = \text{Sen}(x)$

- **Raíces:** Corta al **Eje x** en todos los puntos $k \cdot \pi$ (con k entero)
- **Amplitud:** Esta función **está acotada** entre **1** y **-1**. La amplitud es 1
- **Período:** El período es **2π** . O sea que la **sinusoide** "repite el ciclo" cada 360°



➤ **Función Coseno** Estudiemos ahora la función $Y = \text{Cos}(x)$

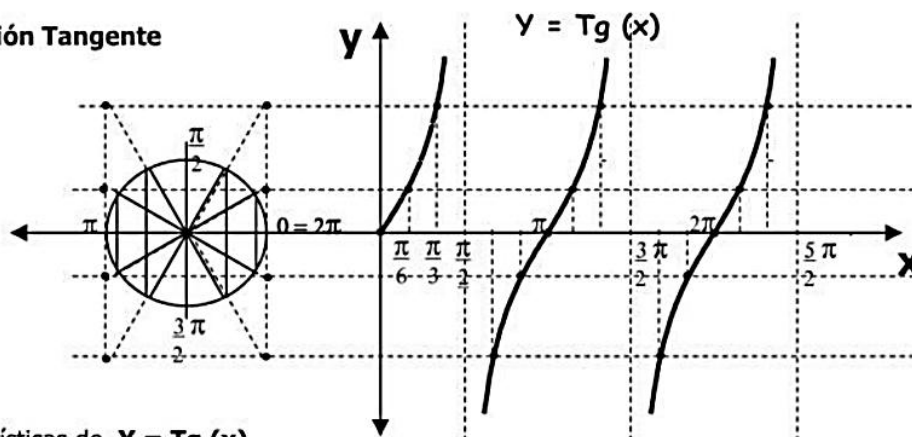
X		Y
Grados	Radianes	
0°	0 π	1
30°	1/6 π	0,866
60°	1/3 π	0,5
90°	1/2 π	0
120°	2/3 π	-0,5
150°	5/6 π	-0,866
180°	1 π	-1
210°	7/6 π	-0,866
240°	4/3 π	-0,5
270°	3/2 π	0
300°	5/3 π	0,5
330°	11/6 π	0,866
360°	2 π	1



Características de $Y = \text{Cos}(x)$

- **Raíces:** Corta al **Eje x** en todos los puntos $\pi/2+k\pi$ (k es un número Entero)
- **Amplitud:** Esta función **está acotada** entre **1** y **-1**. La amplitud es 1
- **Período:** El período es 2π ... o sea que "repite la onda" cada 360°

Función Tangente



Características de $Y = \text{Tg}(x)$

- **Raíces:** Corta al **Eje x** en todos los puntos $k \cdot \pi$ (Con k Entero).
- **Amplitud:** **no está acotada**. El Codominio es el conjunto de los reales, la amplitud es infinita.
- **Período:** El período es π .

Ojo!! El Dominio de la Función **Tangente** **NO** es "todos los Números Reales". Porque hay valores de "x" que no tienen un correspondiente sobre el Eje Y, Así que debemos excluir estos valores:

$$\text{Dom Tg } x = \left\{ x / x \in \mathfrak{R} \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

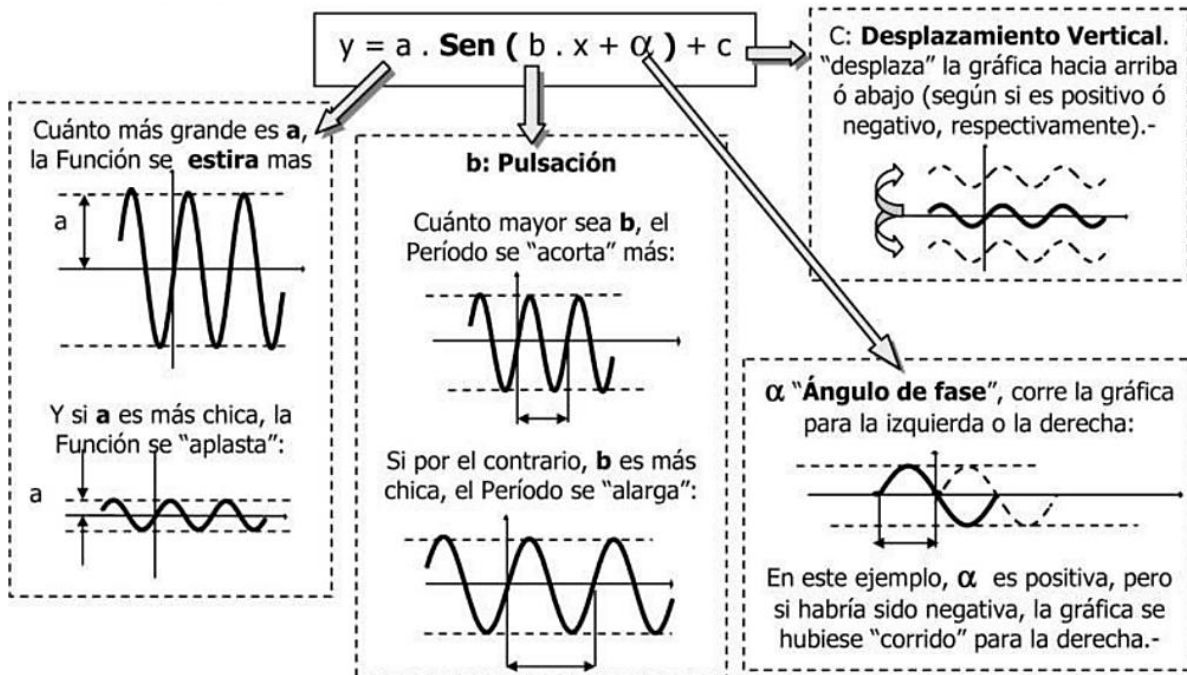
✧ **Coefficientes de las Funciones Trigonómicas:** Esto nos va a servir para poder graficar cualquier Función Trigonómica una vez conocida la **gráfica característica** de esa función. Estas **gráficas características** son las que estudiamos hasta ahora. Veamos los **modelos** para las Funciones típicas.

$$y = a \cdot \text{Sen}(b \cdot x + \alpha) + c$$

$$y = a \cdot \text{Cos}(b \cdot x + \alpha) + c$$

$$y = a \cdot \text{Tg}(b \cdot x + \alpha) + c$$

Vamos a ver qué significa cada parámetro de los **modelos** estudiando $Y = \text{Sen } x$



Pulsación: cantidad de ciclos que hay presentes en el **período** normal de la función (el período normal para el seno y el coseno es 2π y para la tangente es π)

La pulsación o frecuencia afecta al período T según la fórmula

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ para seno y coseno, según } T = \frac{\pi}{|b|} \text{ para tangente.}$$

Graficador de funciones trigonométricas con coeficientes dinámicos

La siguiente página de GeoGebra te permitirá aprender cómo afectan a la curva de las funciones trigonométricas los valores de los coeficientes **a**, **b**, α y **d**. Escanea el código QR o haz clic en el enlace:



<https://www.geogebra.org/m/yxqðqnuq>

En la página interactiva, mueve los deslizadores para observar cómo cambia la curva de cada función según lo estudiado en la página anterior.

Ejercicios

2. Para cada función, expresa amplitud, período, ángulo de fase y desplazamiento horizontal y grafícala en tu cuaderno aprovechando el cuadrículado de tus hojas:

a) $y = \text{sen}(x)$

b) $y = \text{cos}(x)$

c) $y = \text{tan}(x)$

d) $y = 2 \cdot \text{sen}(x)$

e) $y = \text{sen}(2x)$

f) $y = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

g) $y = \text{cos}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

h) $y = \text{cos}(x) + 1$

Resolución de triángulos oblicuángulos

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Suma de ángulos interiores de un triángulo. Funciones trigonométricas y sus inversas. Teorema de los tres senos. Teorema del coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos: casos de aplicación.
Criterios de evaluación		
<ul style="list-style-type: none"> • Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios. 		

Los triángulos que resolveremos ahora **no son triángulos rectángulos** sino **triángulos oblicuángulos** que son aquellos triángulos que no son rectángulos, o sea, triángulos acutángulos y triángulos oblicuángulos.

Gráficas trigonométricas y uso de la calculadora.

El siguiente enlace lleva a la gráfica interactiva donde ya vimos cómo se obtienen las gráficas de seno, coseno y tangente: <https://www.geogebra.org/m/HdnfNmWA>

Debes saber que “*arc sen*”, “*arc cos*” y “*arc tan*” **no son funciones**.

Hay infinitos ángulos (arcos) cuyo “*sen*” dan el mismo valor. Por ejemplo:

$$\text{sen } 30^\circ = 0,5 \quad \text{sen } 150^\circ = 0,5 \quad \text{sen}(-210^\circ) = 0,5 \quad \text{sen } 390^\circ = 0,5$$

por lo que *arc sen* 0,5 tiene infinitos ángulos como resultado entre los que se encuentran 30°, 150°, -210° y 390° como vimos recién.

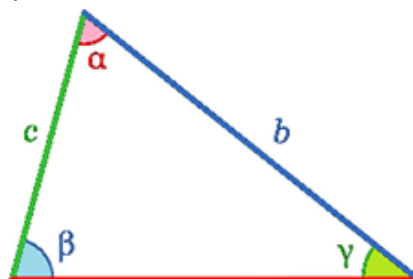
Lo mismo sucede con “*cos*” o “*tan*”.

Pero la calculadora, no da infinitos resultados:

	Devuelve como resultado ángulos de:
<i>arc sen</i>	Cuadrantes IV y I
<i>arc cos</i>	Cuadrantes II y I
<i>arc tan</i>	Cuadrantes IV y I

Teorema del seno

El **teorema del seno** o **teorema de los tres senos** es una expresión de trigonometría que muestra la relación de proporcionalidad existente entre las longitudes de lados de un triángulo con los senos de sus ángulos interiores opuestos.



$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Los nombres de las letras griegas son α alfa, β beta y γ gamma.

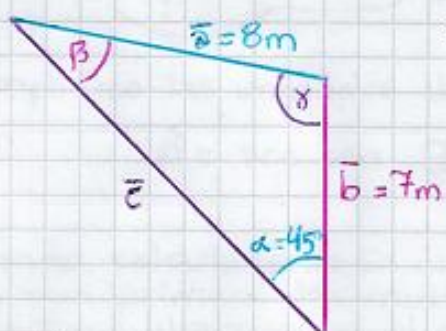
También te será muy útil la expresión de la **suma de ángulos interiores de un triángulo**:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Ahora, veamos un ejemplo:

Importante: Por practicidad, cada vez que obtengas el valor de una incógnita, **reemplázala en las expresiones que usas**. Te permitirá analizarlas y ver qué expresiones puedes usar para calcular alguna otra incógnita.

Resuelve el siguiente triángulo:



Incógnitas: lado c y ángulos $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.

He usado el mismo color para cada lado y su ángulo opuesto.

Las expresiones a usar para resolver son:

• Teorema del seno:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

y

• Suma de ángulos interiores:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$$

Reemplazo con los datos y los nombres de las incógnitas:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} = \frac{7m}{\sin \hat{\beta}} = \frac{c}{\sin \hat{\gamma}}$$

En esta expresión, me sirven el primer y el segundo miembro. El tercer miembro no me sirve pues tiene más de una incógnita.

Me queda una ecuación con una sola incógnita, el ángulo $\hat{\beta}$:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} = \frac{7m}{\sin(\hat{\beta})}$$

Recuerda: La incógnita no puede quedar allí debajo. **LO PRIMERO ES INTENTAR SACARLA DE ALLÍ DEBAJO.** 😲

Debo pasar el divisor "sen $\hat{\beta}$ " hacia el primer miembro. Pasa multiplicando:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} \cdot \sin(\hat{\beta}) = 7m$$

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} \cdot \sin(\hat{\beta}) = 7m$$



Ahora sí, puedo despejar la incógnita $\hat{\beta}$.

Paso el divisor "sen 45° " hacia el segundo miembro multiplicando:

$$8m \cdot \sin(\hat{\beta}) = 7m \cdot \sin 45^\circ$$

Paso el factor "8m" hacia el segundo miembro dividiendo:

$$\sin(\hat{\beta}) = \frac{7m \cdot \sin 45^\circ}{8m}$$

Paso la función seno hacia el segundo miembro como arco seno:

$$\hat{\beta} = \text{arc sen} \frac{7m \cdot \text{sen } 45^\circ}{8m}$$

Simplifico las unidades de longitud:

$$\hat{\beta} = \text{arc sen} \frac{7m \cdot \text{sen } 45^\circ}{8m}$$

Usando calculadora: Es obligatorio colocar paréntesis para que resuelva primero las multiplicaciones y divisiones, y después le aplique el arcoseno al resultado:

$$\text{SHIFT} \text{ sin}^{-1} (7 \times \text{sin} 45 \div 8) = 0.939$$

No te olvides de que la calculadora debe mostrar **D** o DEG en la pantalla para que el resultado sea en grados sexagesimales.

$$\hat{\beta} = 38^\circ 13' 21,39''$$

Si tu calculadora abre paréntesis cuando tocas una tecla de función:

$$\text{SHIFT} \text{ sin}^{-1} (7 \times \text{sin} (45) \div 8) = 0.939$$

Debes cerrarlo después del ángulo.

Ya tengo otro ángulo. Completando el Teorema del seno y la suma de ángulos interiores de un triángulo, queda:

$$\frac{8m}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{7m}{\text{sen } 38^\circ 13' 21,39''} = \frac{c}{\text{sen } \hat{\delta}}$$

... que no me sirve ahora porque el tercer miembro tiene más de una incógnita.

Pero en la suma de ángulos interiores:

$$45^\circ + 38^\circ 13' 21,39'' + \hat{\delta} = 180^\circ$$

... que sí me sirve ahora porque tiene una sola incógnita. Despejo el ángulo $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta} = 180^\circ - 45^\circ - 38^\circ 13' 21,39''$$

En calculadora:

$$180^{[0^\circ]} - 45^{[0^\circ]} - 38^{[0^\circ]} 13^{[0'']} 21,39^{[0'']} =$$

$$\hat{\delta} = 96^\circ 46' 38,61''$$

Ten en cuenta que, cada vez que obtengas el valor de una incógnita, reemplaza con su valor en tus expresiones. Eso te permitirá saber de qué expresión puedo despejar alguna otra incógnita.

Reemplacemos a $\hat{\gamma}$ con su valor en el Teorema del seno:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} = \frac{7m}{\sin 38^\circ 13' 21,39''} = \frac{\bar{c}}{\sin 96^\circ 46' 38,61''}$$

Puedo tomar el primer y tercer miembro para escribir una ecuación con una sola incógnita:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} = \frac{\bar{c}}{\sin 96^\circ 46' 38,61''}$$

Paso el divisor "sen 96°46'38,61"" multiplicando hacia el primer miembro:

$$\frac{8m}{\sin 45^\circ} \cdot (\sin 96^\circ 46' 38,61'') = \bar{c}$$

Con calculadora:

$$8 \div \sin 45 \times \sin 96 \overset{0''}{\square} 46 \overset{0''}{\square} 38,61 \overset{0''}{\square} =$$

sin la unidad de longitud [m]

Cuando no tiene minutos ni segundos, no es necesario tocar la tecla $0''$

Si tu calculadora pone paréntesis cuando tocas una tecla de función entonces debes cerrar el paréntesis detrás de su ángulo.

$$\boxed{11,235 \text{ m} \approx \bar{c}}$$



No olvides colocar la unidad de longitud. (No es lo mismo 11,235m que 11,235km)

¡Listo!

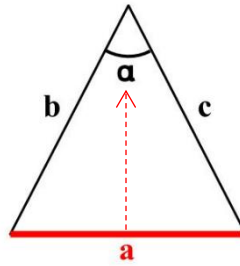
$$\begin{aligned} \bar{c} &= 11,235m \\ \hat{\beta} &= 38^\circ 13' 21,39'' \\ \hat{\gamma} &= 96^\circ 46' 38,61'' \end{aligned}$$



Teorema del coseno

El **teorema del coseno** es una generalización del teorema de Pitágoras.

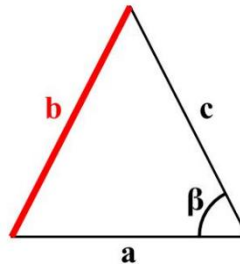
He puesto en color rojo al lado que aparece solo en el primer miembro:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

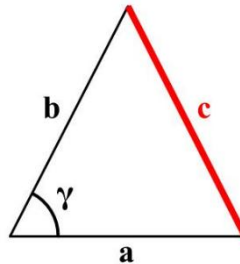
La expresión es muy parecida al **teorema de Pitágoras**, excepto por el último término. Ese último término incluye al coseno del ángulo opuesto al lado (señalado con la flecha) que aparece solo en el primer miembro.

También puede escribirse de forma parecida para los otros lados:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

Y también:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

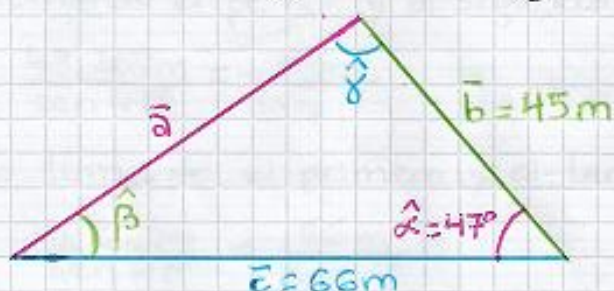
Para aplicar el teorema del coseno se necesita conocer:

- la longitud de dos lados y el ángulo entre ellos (como verás en el ejemplo a continuación) o sino se necesita:
- la longitud de los tres lados.

Claro que con el teorema del coseno no será suficiente para resolver un triángulo oblicuángulo. También necesitarás el teorema de los tres senos y la suma de ángulos interiores de un triángulo.

Veamos un ejemplo:

Resuelve el siguiente triángulo:



Las incógnitas son el lado \bar{a} y los ángulos $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.
← He dibujado del mismo color a cada lado y su ángulo opuesto.

Las expresiones para usar son:

Suma de ángulos interiores: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$

Teorema de los tres senos: $\frac{\bar{a}}{\sin \hat{\alpha}} = \frac{\bar{b}}{\sin \hat{\beta}} = \frac{\bar{c}}{\sin \hat{\gamma}}$

y el teorema del coseno: $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2 \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \cos \hat{\alpha}$

Reemplazamos con los datos y los nombres de las incógnitas en las expresiones:

▶ $47^\circ + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 180^\circ$ ← No me sirve ahora, tiene más de una incógnita.

▶ $\frac{\bar{a}}{\sin 47^\circ} = \frac{45\text{m}}{\sin \hat{\beta}} = \frac{66\text{m}}{\sin \hat{\gamma}}$ ← En esta expresión, los tres miembros tienen una incógnita. O sea que tomando dos miembros cualquiera, siempre me quedará una ecuación con dos incógnitas.

▶ $\bar{a}^2 = (45\text{m})^2 + (66\text{m})^2 - 2 \cdot 45\text{m} \cdot 66\text{m} \cdot \cos 47^\circ$

↑
Esta ecuación sí me sirve porque tengo una sola incógnita. Despejo el lado \bar{a} pasando la potencia cuadrada como raíz cuadrada:

$$\bar{a} = \sqrt{(45\text{m})^2 + (66\text{m})^2 - 2 \cdot 45\text{m} \cdot 66\text{m} \cdot \cos 47^\circ}$$

En calculadora: es obligatorio colocarle paréntesis al radicando para que lo resuelva antes que a la raíz cuadrada:

$$\sqrt{(45 \times \text{m})^2 + 66 \times \text{m}^2 - 2 \times 45 \times 66 \times \cos 47} =$$

$$\bar{a} \approx 48,269\text{m}$$

Ahora que conozco la longitud del lado \bar{a} , la reemplazaré en el teorema de los tres senos:

$$\frac{48,269\text{m}}{\sin 47^\circ} = \frac{45\text{m}}{\sin \hat{\beta}} = \frac{66\text{m}}{\sin \hat{\gamma}}$$

Puedo armar una ecuación con una sola incógnita de dos formas:
Tomando el primero y el segundo miembro:

$$\frac{48,269m}{\text{sen } 47^\circ} = \frac{45m}{\text{sen } \hat{\beta}}$$

o tomando el primero y el tercer miembro:

$$\frac{48,269m}{\text{sen } 47^\circ} = \frac{66m}{\text{sen } 8^\circ}$$

Puedes elegir cualquiera. Yo elijo:



$$\frac{48,269m}{\text{sen } 47^\circ} = \frac{45m}{\text{sen } (\hat{\beta})} \leftarrow \text{LO PRIMERO ES INTENTAR SACAR LA INCOGNITA DE ABAJO.}$$

Paso el divisor "sen $\hat{\beta}$ " al primer miembro multiplicando:

$$\frac{48,269m}{\text{sen } 47^\circ} \cdot \text{sen } \hat{\beta} = \frac{45m}{\text{sen } \hat{\beta}} \cdot \text{sen } \hat{\beta}$$

$$\frac{48,269m}{\text{sen } 47^\circ} \cdot \text{sen } \hat{\beta} = 45m \quad \text{Ya está. Ahora lo puedo despejar.}$$

Paso el divisor "sen 47° " al segundo miembro multiplicando:

$$48,269m \cdot \text{sen } \hat{\beta} = 45m \cdot \text{sen } 47^\circ$$

Paso el factor "48,269m" al segundo miembro dividiendo:

$$\text{sen } \hat{\beta} = \frac{45m \cdot \text{sen } 47^\circ}{48,269m}$$

Paso la función seno como arco seno al segundo miembro:

$$\hat{\beta} = \text{arc sen } \frac{45m \cdot \text{sen } 47^\circ}{48,269m}$$

En calculadora:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{sin}^{-1}} (45 \times \text{sen } 47 \div 48,269) = \boxed{01}$$

Si tu calculadora pone paréntesis a las funciones, cierra el paréntesis detrás del ángulo.

$$\boxed{\hat{\beta} = 42^\circ 35' 31,85''}$$

solo falta calcular el ángulo $\hat{\gamma}$.
Es más fácil despejarlo de aquí:

$$47^\circ + 42^\circ 35' 31,85'' + \hat{\gamma} = 180^\circ$$

Si lo despejas desde el teorema de los tres senos o desde el teorema del coseno, será mucho más difícil pero debes obtener el mismo resultado.

$$\hat{\gamma} = 180^\circ - 47^\circ - 42^\circ 35' 31,85''$$

$$180 - 47 - 42 \overset{0'19''}{=} 35 \overset{0'11''}{=} 31,85 \overset{0'19''}{=} = \overset{0'11''}{=}$$

$$\hat{\gamma} = 90^\circ 24' 28,15'' \text{ 😊}$$

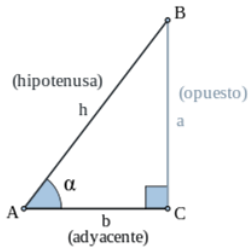
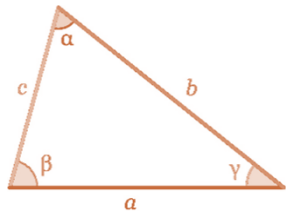
¡Listo!

$$\begin{aligned} \bar{a} &\approx 48,269 \text{ m} \\ \hat{\alpha} &= 42^\circ 35' 31,85'' \\ \hat{\gamma} &= 90^\circ 24' 28,15'' \end{aligned}$$



Conclusión:

En esta tabla comparativa, puedes ver con qué expresiones se resuelven los dos tipos de triángulos con los que hemos trabajado.

Resolución de triángulos	
Triángulos rectángulos: tienen un ángulo recto.	Triángulos oblicuángulos: no tienen ningún ángulo recto.
<p>Los pasos para resolver un triángulo <u>rectángulo</u> son:</p> <p>1) Elegir el ángulo de referencia α (no puede ser el ángulo recto) y determinar cuáles son el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa.</p>	<p>Los pasos para resolver un triángulo <u>oblicuángulo</u> son:</p>
<p>2) Detectar cuáles son los datos y cuáles son las incógnitas.</p>	<p>1) Detectar cuáles son los datos y cuáles son las incógnitas.</p>
<p>3) Completar con datos y nombres de incógnitas en las expresiones:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Suma de ángulos complementarios: $\alpha + \beta = 90^\circ$</p> <p>Teorema de Pitágoras: $cop^2 + cad^2 = hip^2$</p> <p>Seno de un ángulo: $\text{sen } \alpha = \frac{cop}{hip}$</p> <p>Coseno de un ángulo: $\text{cos } \alpha = \frac{cad}{hip}$</p> <p>Tangente de un ángulo: $\text{tan } \alpha = \frac{cop}{cad}$</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p>Suma de ángulos interiores: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$</p> <p>Teorema de los tres senos: $\frac{\bar{a}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\bar{b}}{\text{sen } \beta} = \frac{\bar{c}}{\text{sen } \gamma}$</p> <p>Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \text{cos } \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{cos } \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \text{cos } \gamma$</p>
<p>4) Despeja las incógnitas en aquellas ecuaciones con una sola incógnita. Cuando calcules una incógnita, puedes reemplazarla en las expresiones con su valor, así podrás ver de dónde puedes despejar otras incógnitas.</p>	<p>3) Despeja las incógnitas en aquellas ecuaciones con una sola incógnita. Cuando calcules una incógnita, puedes reemplazarla en las expresiones con su valor, así podrás ver de dónde puedes despejar otras incógnitas.</p>

Actividades

Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos.

El ejercicio d) es particularmente complejo para desarrollar. No te preocupes. ¡Puedes hacerlo!

Coloca los datos y los nombres de las incógnitas en el teorema del coseno y despeja un ángulo cualquiera. Observa que la incógnita será el ángulo dentro del coseno.

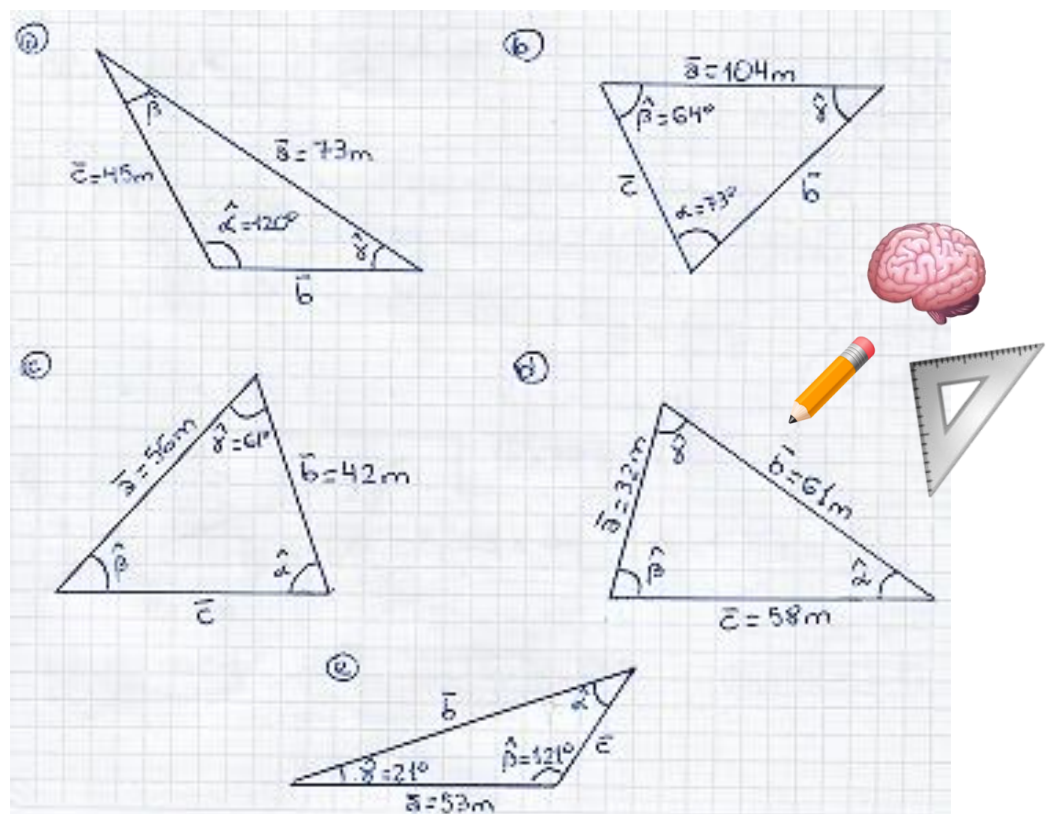
Consejo: puedes despejar de dos formas al ángulo en el teorema del coseno:

- Empieza pasando el último término, que es negativo porque resta, hacia el primer miembro para que quede el término positivo, o sea sumando. (**Recuerda que la incógnita despejada debe quedar sola, positiva y en el nivel del renglón.**)
- O sino, puedes dejar el término negativo donde está y despejar: Solo ten en cuenta que, cuando quede solo el término del coseno y tengas que pasar los factores hacia el primer miembro dividiendo, no te olvides que hay un factor negativo, el “-2”, que pasará dividiendo negativo.

Al final, pasarás el *coseno* como *arco coseno* para terminar de despejar al ángulo.

En el uso de calculadora, no te olvides de controlar los paréntesis.

Después, para despejar los otros dos ángulos, puedes continuar usando el teorema de los tres senos (que suele ser más simple para trabajar que el teorema del coseno) y, para terminar, usa la suma de ángulos interiores.



Te dejo los resultados para que controles:

a) $\bar{b} = 39,227\text{m}$

$\hat{\beta} = 27^\circ 44' 25,5''$

$\hat{\gamma} = 32^\circ 15' 57,75''$

b) $\bar{b} = 97,746\text{m}$

$\bar{c} = 74,169\text{m}$

$\hat{\gamma} = 43^\circ$

c) $\bar{c} = 51,181\text{m}$

$\hat{\alpha} = 73^\circ 7' 56,48''$

$\hat{\beta} = 45^\circ 52' 3,52''$

d) $\hat{\alpha} = 31^\circ 4' 4,02''$

$\hat{\beta} = 79^\circ 38' 54,39''$

$\hat{\gamma} = 69^\circ 17' 1,58''$

e) $\bar{b} = 73,790\text{m}$

$\bar{c} = 30,851\text{m}$

$\hat{\alpha} = 38^\circ$

Trigonometría:

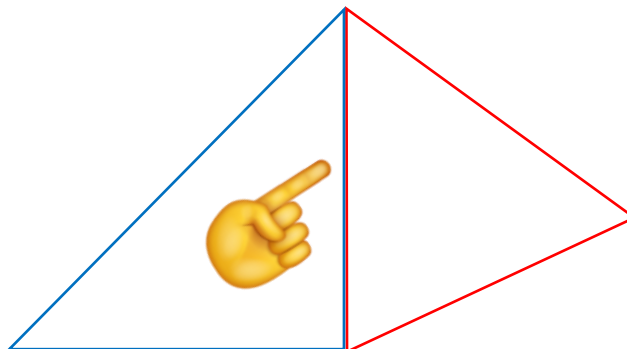
Ejercicios de aplicación

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Suma de ángulos interiores de un triángulo. Ángulos complementarios. Teorema de Pitágoras. Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Ecuaciones. Resolución de triángulos rectángulos: caso “ángulo – lado” y “lado - lado”. Funciones trigonométricas inversas. Teorema de los tres senos. Teorema del coseno. Resolución de triángulos oblicuángulos: casos de aplicación.
Criterios de evaluación		
<ul style="list-style-type: none"> • Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios. 		

Vamos a hacer algunos ejercicios de aplicación. Junto con los enunciados de los problemas, les he escrito consejos para resolverlos. Al final, están las respuestas para que controles tus resultados.

Ten en cuenta que:

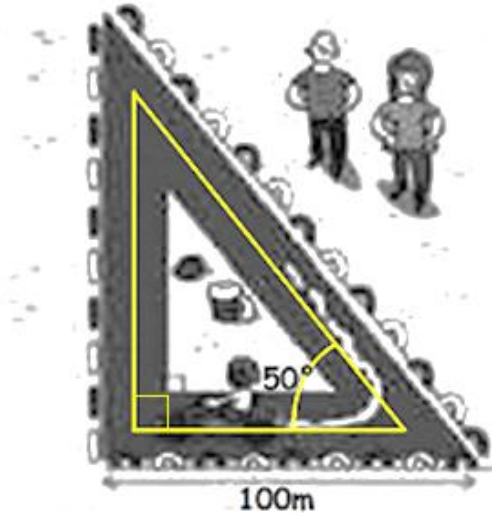
- **Necesitas siempre tres datos** para resolver cualquier triángulo (al menos uno debe ser un lado).
- ¡**Todas las incógnitas no pueden llamarse x!**
- Siempre **escribe los desarrollos completos**: empieza escribiendo la ecuación, luego el despeje y al final el resultado. Tus resultados no pueden aparecer “mágicamente”.
- En todos tus cálculos, **siempre usa números redondeados a 3 cifras detrás de la coma** (no truncados, en milésimos).
- **No debes calcular todos los lados y los ángulos** de los problemas. Solo necesitas obtener algunas incógnitas para responder las preguntas.
- Cuando el problema tiene más de un triángulo, estos comparten elementos. Si usas un triángulo y calculas **un elemento que tengan en común ambos triángulos, puedes usarlo cuando trabajes con el otro triángulo**. Por ejemplo, en el dibujo de abajo, si calculas el lado derecho del triángulo azul (triángulo izquierdo), lo puedes usar en tus cálculos en el triángulo rojo (triángulo derecho) pues comparten ese lado.



Ejercicios

1)

- Calcula la longitud del circuito de karts de la figura.
- ¿Cuál es el menor número de vueltas que hay que dar al circuito para recorrer más de un kilómetro?



Consejo:

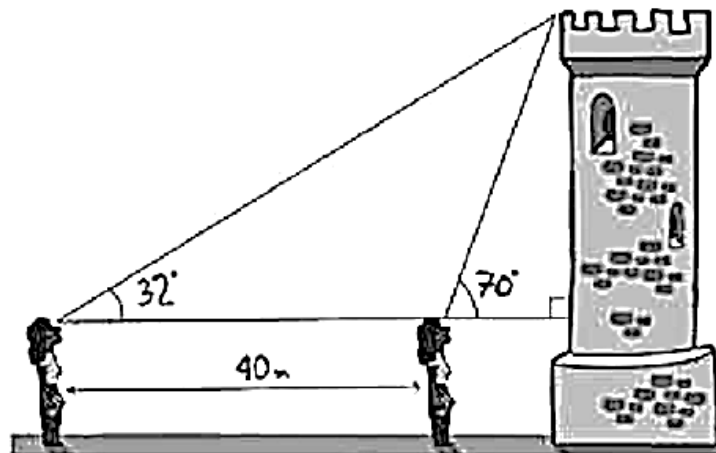


Observa que la pista tiene forma de triángulo rectángulo, lo he dibujado en amarillo. ¿Cómo sabré la longitud del circuito? Pues calculo su perímetro sumando sus lados. Ten cuidado con las unidades de longitud: obtendrás el largo de una vuelta en metros [m] y te piden cuántas vueltas lleva recorrer 1km. Así que convierte $1\text{km} = 1000\text{m}$. Ten presente que no necesitas calcular el otro ángulo agudo porque no necesitas saber cuánto mide.

2)

Desde el lugar donde se encuentra Carla, puede observar una torre con un ángulo de elevación de 32° . Si Carla avanza 40 metros en dirección a la torre, la observa con un ángulo de 70° .

- Calcula la altura de la torre si la estatura de Carla es de 1,65 metros.
- ¿A qué distancia de la torre estaba Carla inicialmente?



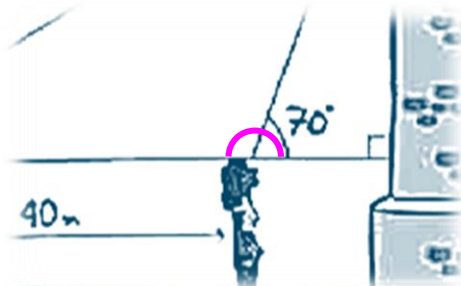
Consejos:



Este problema requiere mucho ingenio, así que no te desanimes!

Observa que hay dos triángulos: el triángulo que se forma entre la niña de la derecha y la torre es un triángulo rectángulo, mientras que el triángulo que se forma entre las dos niñas es un triángulo oblicuángulo.

Recuerda que para resolver un triángulo necesitas 3 datos. El triángulo rectángulo tiene 2 datos que son el ángulo de 70° y el ángulo recto de la torre. El triángulo oblicuángulo también tiene 2 datos que son el lado de 70m y el ángulo de 32° . O sea que nos falta un dato en ambos triángulos... pero este problema se destraba si observas estos ángulos:



Son dos ángulos suplementarios ya que entre ambos suman 180° . La ecuación para usar es:

$$\hat{a} + 70^\circ = 180^\circ$$

Despeja el ángulo \hat{a} y ya tendrás un nuevo dato para resolver el triángulo oblicuángulo

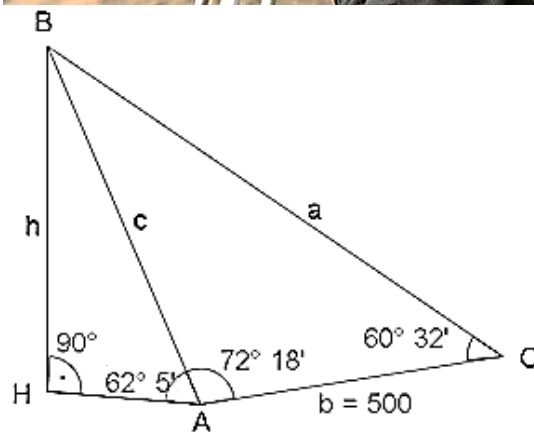
Te queda a ti pensar qué calcular del triángulo oblicuángulo para tener un nuevo dato en el triángulo rectángulo y poder resolver todo el problema. Ten presente que los dos triángulos comparten un elemento... Recuerda que en estos problemas se pide calcular incógnitas específicas. No calcules todas las medidas.



3)

En esta imagen, vemos a un ingeniero agrimensor obteniendo información sobre un terreno. Está usando un **teodolito**, un instrumento de precisión para medir los ángulos de la superficie de un terreno o respecto de algún punto.

Los problemas que veremos a continuación tienen relación con la práctica de la Ingeniería Agrimensora y su uso en la Ingeniería Civil. Observa que los datos que se presentan son distancias de lados y amplitudes de ángulos siempre en la parte inferior de los dibujos, o sea, son medidas obtenidas sobre el terreno y ángulos medidos con teodolitos.



Cálculo de la altura h de un punto de pie inaccesible:

Se fija en el plano horizontal dos puntos **A** y **C**, y se mide la distancia que los separa: $b = 500$ m. Se miden con el teodolito los ángulos **A** y **C**: $A = 72^\circ 18'$ y $C = 60^\circ 32'$.

También se mide el ángulo **HAB** = $62^\circ 5'$.

¿A qué altura h está el punto **B** respecto del punto **H**?

Consejo:

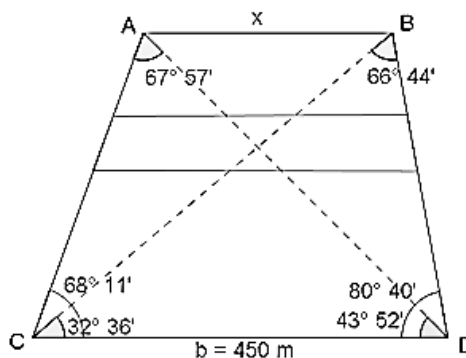


Observa que hay dos triángulos: el de la izquierda es un triángulo rectángulo, y el de la derecha es un triángulo oblicuángulo. El único de ellos que tiene 3 datos es el triángulo oblicuángulo y deberás empezar a resolver por allí. No debes calcular todas las medidas que le faltan así que ¿qué es lo único que necesitar calcular del triángulo oblicuángulo? Su resultado lo podrás usar en el triángulo rectángulo.

4)

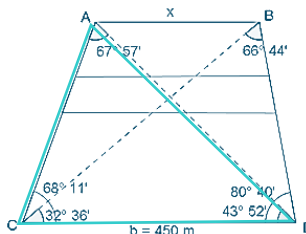
Cálculo de la distancia x entre dos puntos inaccesibles:

Se fijan, en el plano horizontal, dos puntos **C** y **D**, y se mide la distancia que los separa: $b = 450$ m. Se miden con el teodolito los ángulos **C** y **D**. $C = 68^\circ 11'$ y $D = 80^\circ 40'$. También se miden los ángulos $BCD = 32^\circ 36'$ y $ADC = 43^\circ 52'$. ¿Qué distancia x hay entre los puntos **A** y **B**?

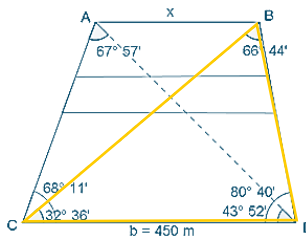


Consejo:

Aquí hay ocho triángulos posibles para trabajar, pero no todos te convienen pues trabajarás mucho y no todos tienen los 3 datos que necesitas para resolverlos... Te aconsejo que intentes resolverlo usando tu ingenio, pero si se complica, debajo te dejo los pasos. Comienza usando el triángulo **ACD** y calcula el lado **AC**, el de la izquierda:

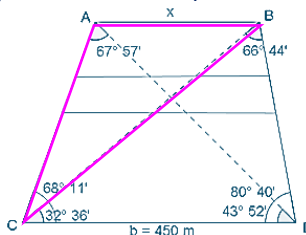


Continúa usando el triángulo **BCD** para calcular el lado **BC**.



Ahora, calcula el ángulo **ACB**.

Para terminar, usa el triángulo **ABC** para calcular x que es el lado **AB**:



Respuestas

Te dejo los resultados para que controles. Te doy los valores aproximados así que pueden variar en la parte decimal.

- 1) La longitud del circuito es de casi 375m. Necesitarás al menos 3 vueltas para recorrer más de 1km.
- 2) La torre mide aproximadamente 34m. Carla estaba inicialmente a un poco menos de 52m de la torre.
- 3) La altura h es de casi 525m.
- 4) La distancia x entre los puntos A y B es de casi 267m.



Funciones y ecuaciones exponenciales

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Función exponencial: definición. Ecuaciones exponenciales: casos de resolución de ecuaciones.
Criterios de evaluación		
<ul style="list-style-type: none">• Aplica los conceptos vistos.• Usa una técnica coherente de trabajo.• Defiende los resultados producidos.• Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios.		

Vamos a estudiar, en esta oportunidad, las funciones exponenciales y, particularmente, las ecuaciones exponenciales. Presentaré un par de técnicas para resolver dichas ecuaciones y aprovecharemos para repasar algunas propiedades de potenciación y radicación.

Introducción

Las funciones exponenciales tienen la forma:

$$f(x) = b^x$$

Donde:

$b > 0$ (la base siempre será positiva) y

$b \neq 1$ (si la base fuera 1, el resultado siempre daría 1 para cualquier valor de x).

Al igual que cualquier expresión exponencial, b se llama **base** y x se llama **exponente**. El nombre “exponencial” hace referencia, justamente, a que la variable x está en el exponente de la potencia.

Veamos un ejemplo de función exponencial:

Crecimiento de la cantidad de bacterias:

Algunas bacterias se reproducen duplicando su cantidad cada hora. Si comienzas con 1 bacteria y se duplica en cada hora, tendrás 2^x bacterias después de x horas. Esto se puede escribir como:

$$f(x) = 2^x$$

Entonces, la cantidad de bacterias es:

Antes de empezar, $f(0) = 2^0 = 1$

Después de 1 hora $f(1) = 2^1 = 2$

Después de 2 horas $f(2) = 2^2 = 4$

En 3 horas $f(3) = 2^3 = 8$

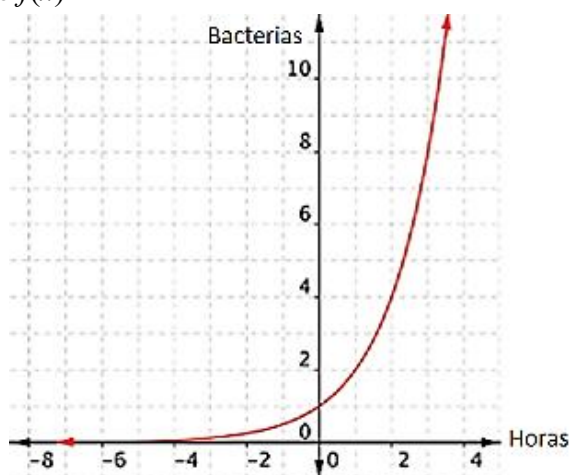
etc.

Para saber la cantidad de bacterias, basta con darle a la variable x la cantidad de horas transcurridas.

Con la definición $f(x) = b^x$ y las restricciones de $b > 0$ y $b \neq 1$, el **dominio** de la función exponencial (o sea, los valores que puede tomar x) es el conjunto de todos los números reales. El **rango** de la

función exponencial (o sea, los resultados que podemos obtener) es el conjunto de todos los números reales positivos (no darán resultados negativos ni cero).

La siguiente gráfica muestra $f(x) = 2^x$.



Función exponencial: definición

Una **función exponencial** $f(x)$ es una función de la forma:

$$f(x) = a \cdot b^{c \cdot x - d} + e$$

en la que la variable x está en el exponente, y donde:

$a \neq 0$ (si la constante a fuera cero, al multiplicar, la función $f(x)$ siempre daría resultado cero)

$b > 0$ (la base b siempre será positiva), y

$b \neq 1$ (si la base b fuera 1, la función $f(x)$ siempre daría 1 para cualquier valor de x).

Ecuaciones exponenciales:

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en que la incógnita está en el exponente.

Por ejemplo:

a) $2^x = 16$

b) $3^{x-1} = 27$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

f) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

Resolución de ecuaciones exponenciales

Estudiaremos un par de métodos para resolver ecuaciones exponenciales sin recurrir a la logaritmicación

Primer caso:

Se transforma la ecuación dada en una igualdad de la misma base.

Esta es la propiedad que te permitirá resolver todas las ecuaciones exponenciales (sin usar logaritmos). Estúdiala:

$$\text{Si } b^m = b^p \text{ entonces } m = p$$

O sea que, si tengo **igualdad de potencias con la misma base** entonces también sus **exponentes son iguales**.

Resolvamos un ejemplo, como dijimos, transformando en una igualdad de la misma base:

He puesto a la izquierda el desarrollo y a la derecha la explicación.

a) $2^x = 16$	Hago descomposición factorial de 16: $\begin{array}{r l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r l} 16 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array}} \right\} 2^4$ Obtengo que $16=2^4$. Lo reemplazo en la ecuación: $2^x = 16$ $2^x = 2^4$
$2^x = 2^4$	Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base: $\text{Si } b^m = b^p \text{ entonces } m = p$ Aplicando la propiedad: Si $2^x = 2^4$ entonces $x = 4$
$x = 4$	

Otro ejemplo:

b) $3^{x-1} = 27$	Hago descomposición factorial de 27: $\begin{array}{r l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r l} 27 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array}} \right\} 3^3$ Obtengo que $27=3^3$. Lo reemplazo en la ecuación: $3^{x-1} = 27$ $3^{x-1} = 3^3$
$3^{x-1} = 3^3$	Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base : $\text{Si } b^m = b^p \text{ entonces } m = p$ Aplicando la propiedad: Si $3^{x-1} = 3^3$ entonces $x - 1 = 3$
$x - 1 = 3$ $x = 3 + 1$ $x = 4$	Despejo x .

Más propiedades:

Puedes invertir una base mediante el **cambio de signo del exponente**. A esta propiedad la conocían así: “*si el exponente es negativo entonces invierto la base*”:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$$

Pero también se usa para invertir una base, si lo necesitara, cambiando el signo del exponente. Para manejar raíces en las ecuaciones exponenciales, estudia esta propiedad:

Potencia de raíz o raíz de potencia:

$$\left(\sqrt[r]{b}\right)^p = \sqrt[r]{b^p} = b^{\frac{p}{r}}$$

Es lo mismo calcular potencia de la raíz que calcular raíz de la potencia. Cuando están juntas, no importa el orden.

¡La raíz puede escribirse como potencia! si se escribe en el denominador del exponente.

Resolvamos otro ejemplo aplicando estas propiedades:

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{8}$

Hago descomposición factorial de 8:

$$\begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}} \right\} 2^3$$

Obtengo que $8=2^3$, así que lo reemplazo en la ecuación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \sqrt{8} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \sqrt{2^3} \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2^3}$

Tenemos un par de problemas aquí: En el primer miembro, la base es 1/2, pero en el segundo miembro, la base es 2 y necesitamos que tengan la misma base. El otro problema es que, en el segundo miembro, tengo una raíz junta con la potencia.

Empecemos solucionando uno de los problemas: para tener la misma base en ambos miembros, aplicaré la propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$ en el primer miembro:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \sqrt{2^3} \\ \left(\frac{2}{1}\right)^{-x} &= \sqrt{2^3} \end{aligned}$$

No es necesario el denominador 1:

$$(2)^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Tampoco necesita el paréntesis:

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Ahora sí, ambos miembros tienen la misma base 2.

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

Solucionemos el otro problema: para evitar la raíz en el segundo miembro, la convertiré a potencia aplicando la propiedad $(\sqrt[r]{b})^p = \sqrt[r]{b^p} = b^{\frac{p}{r}}$.

Solo hay que poner el índice de la raíz (no está escrito, pero es 2) en el denominador del exponente:

$$2^{-x} = \sqrt{2^3}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Ahora sí puedo usar la propiedad de igualdad de potencias con misma base:

$$\text{Si } b^m = b^p \text{ entonces } m = p$$

Aplicando la propiedad:

$$\text{Si } 2^{-x} = 2^{\frac{3}{2}} \text{ entonces } -x = \frac{3}{2}$$

$$-x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Despejo x pasando el negativo al segundo miembro.

Actividades

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1) $5^x = 625$

2) $3^{x-1} = 81$

3) $3^{x+3} = \frac{1}{27}$

4) $2^{x^2-3} = \frac{1}{4}$

5) $6^{2x-2} = 1$ Recuerda que $6^0 = 1$

6) $4^{\frac{x-2}{x+3}} = 4^{\frac{x}{x+2}}$

Segundo caso:

Las ecuaciones necesitan que apliquemos propiedades.

Necesitas repasar la propiedad **producto de potencias con igual base** $b^m \cdot b^p = b^{m+p}$ solo que ahora usaremos su **recíproca** (al revés):

$$b^{m+p} = b^m \cdot b^p$$

Ejemplos:

d) $3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ | En el primer miembro, aplicamos la propiedad $b^{m+p} = b^m \cdot b^p$ a ambos términos:

	$3^{x-1} + 3^{x+1} = 90$ $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3^1 = 90$ <p>No es necesario el exponente 1.</p>
$3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$	<p>Saco factor común 3^x:</p> $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 90$ $3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$
$3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$	<p>Resuelvo dentro del paréntesis:</p> $3^x \cdot (3^{-1} + 3) = 90$ <p style="text-align: right;"><i>Cálculos auxiliares:</i> $3^{-1} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3}$</p> <p>Recuerda que, en la suma de fracciones, primero obtienes el m.c.m. que es 3, luego divides en los denominadores (de abajo) y multiplicas en los numeradores (de arriba).</p> <p>El resultado ya no necesita paréntesis:</p> $3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$
$3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$	<p>Paso 10/3 al segundo miembro: el 3 pasa multiplicando y el 10 pasa dividiendo.</p> $3^x \cdot \frac{10}{3} = 90$ $3^x = 90 \cdot \frac{3}{10}$
$3^x = 90 \cdot \frac{3}{10}$	<p>Simplifico y resuelvo:</p> $3^x = 90 \cdot \frac{3}{10}$ $3^x = 9 \cdot 3$ $3^x = 27$
$3^x = 27$	<p>Ya habiendo aplicado propiedades, podemos realizar los pasos que ya aprendimos cuando estudiamos el primer caso: Descompongo factorialmente 27 y lo reemplazo con 3^3:</p> $3^x = 27$ $3^x = 3^3$
$3^x = 3^3$	<p>Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base:</p> <p style="text-align: center;">Si $b^m = b^p$ entonces $m = p$</p> <p>Aplicando la propiedad:</p> <p style="text-align: center;">Si $3^x = 3^3$ entonces $x = 3$</p>
$x = 3$	

Otra propiedad necesaria es **potencia de potencia**:

$$(b^m)^p = b^{m \cdot p}$$

e) $3 \cdot 4^{x+1} = 96$

Primero, paso el 3 dividiendo al segundo miembro:

$$3 \cdot 4^{x+1} = 96$$

$$4^{x+1} = \frac{96}{3}$$

Y resuelvo:

$$4^{x+1} = 32$$

$4^{x+1} = 32$	<p>Aplicamos la propiedad:</p> $4^{x+1} = 32$ $4^x \cdot 4^1 = 32$ <p>No es necesario el exponente 1:</p> $4^x \cdot 4 = 32$
$4^x \cdot 4 = 32$	<p>Paso el 4 dividiendo:</p> $4^x \cdot 4 = 32$ $4^x = \frac{32}{4}$ <p>Resuelvo:</p> $4^x = 8$
$4^x = 8$	<p>Para tener bases iguales, descompongo factorialmente al 4 y al 8, y los reemplazo:</p> $4^x = 8$ $(2^2)^x = 2^3$
$(2^2)^x = 2^3$	<p>En el primer miembro, aplico la propiedad potencia de potencia $(b^m)^p = b^{m \cdot p}$:</p> $(2^2)^x = 2^3$ $2^{2x} = 2^3$
$2^{2x} = 2^3$	<p>Uso la propiedad de igualdad de potencias con misma base:</p> <p>Si $b^m = b^p$ entonces $m = p$</p> <p>Aplicando la propiedad:</p> <p>Si $2^{2x} = 2^3$ entonces $2x = 3$</p>
$2x = 3$	<p>Despejo x:</p> $2x = 3$ $x = \frac{3}{2}$
$x = \frac{3}{2}$	

Actividades

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

7) $4^{x+1} + 4^{x-1} = 17$

9) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

8) $3^{x-5} = 27^{1-x}$

10) $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+2} = 89$

Te dejo todos los resultados para que controles:

1) $x=4$

4) $x=-1$ y

6) $x=-4/3$

9) $x=2$

2) $x=5$

también $x=+1$

7) $x=1$

10) $x=2$

3) $x=-6$

5) $x=1$

8) $x=2$



Ejercicios de repaso:

Te dejo ecuaciones para resolver con sus respectivas soluciones.

Ecuaciones	Soluciones
1) $2^{2x+1} = 4$	$x = \frac{1}{2}$
2) $3^{4x-7} = \frac{3^{2x}}{3}$	$x = 3$
3) $256 = 4^{x-5}$	$x = 9$
4) $8^{x+2} = 16^{x+1}$	$x = 2$
5) $5^{2x} = 25^{3x+2}$	$x = -1$
6) $2^{3x+1} = 1$	$x = -\frac{1}{3}$
7) $(2^{x+1})^2 = 64$	$x = 2$
8) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$	$x = -\frac{1}{2}$
9) $7^{x-1} = 49^{3x-2}$	$x = \frac{3}{5}$
10) $5^{12-x} = \frac{1}{125}$	$x = 15$
11) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$	$x = \pm 2$
12) $e^{x^2-2} = \frac{1}{e}$	$x = \pm 1$
13) $5^x = \sqrt{5}$	$x = \frac{1}{2}$
14) $2^{5x} = \sqrt{2}$	$x = \frac{1}{10}$
15) $2^{x-1}\sqrt{3^{x-3}} = \sqrt{27}$	$x = -\frac{3}{4}$
16) $\sqrt{8^x} = 64$	$x = 4$
17) $\sqrt{3^{x^2+1}} = 27$	$x = \pm\sqrt{5}$

18) $2^{X+1} + 2^{X-1} = 20$	$x = 3$
19) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 14$	$x = 2$
20) $3^{x+1} + 3^{x+2} - 3^{x+3} = -5$	$x = -1$
21) $3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x-2} = 14$	$x = 3$
22) $2 \cdot 3^{x+3} + 4 \cdot 3^{x+4} = 14$	$x = -3$
23) $3^{2x} - 3^{x+1} = 54$	$x = 2$
24) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$	$x = 3$
25) $4^x - 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 24$	$x = 3$
26) $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$	$x = 3$

Más ejercicios de repaso

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

Primer caso: *Se transforma la ecuación dada en una igualdad de la misma base.*

- 1) $3^x = 81$
- 2) $2^{x-1} = 16$
- 3) $7^{3x-1} = 1$ Recuerda que $7^0 = 1$

Segundo caso: *Las ecuaciones necesitan que apliquemos propiedades.*

- 4) $2 \cdot 3^{x+1} = 18$
- 5) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 40$

Para que controles tu trabajo:

- a) $x=4$
- b) $x=5$
- c) $x=1/3$
- d) $x=1$
- e) $x=4$

Logaritmos

Capacidades generales	Capacidades específicas	Contenido/s conceptual/es
Resolución de problemas	Resolver problemas empleando diferentes métodos, teorías y conceptos. Formular, ejecutar y evaluar alternativas de solución a los diferentes problemas estudiados. Fomentar la motivación y la iniciativa personal.	Logaritmo: concepto. Logaritmos decimales y logaritmos naturales. Propiedades de los logaritmos. Ecuaciones logarítmicas.
Criterios de evaluación		
<ul style="list-style-type: none"> • Aplica los conceptos vistos. • Usa una técnica coherente de trabajo. • Defiende los resultados producidos. • Desarrolla de forma prolija y clara los ejercicios. 		

Introducción

Hemos visto, en la guía anterior, cómo resolver ecuaciones exponenciales. Para ello, aplicamos algunas propiedades y técnicas para obtener el valor de las incógnitas. Sin embargo, existe la inversa de la función exponencial llamada *función logarítmica*.

Veamos antes un par de ejemplos introductorios:

Dada la ecuación:

$$x^3 = 8$$

Observa que la incógnita está en la base de la potencia. Es fácil despejar la incógnita pasando la potencia cúbica como raíz cúbica al segundo miembro de la ecuación:

$$x = \sqrt[3]{8}$$

Resuelvo la raíz cúbica y ya tengo el valor de la incógnita:

$$x = 2$$

Observa que la potenciación pasó como su inversa: la radicación.

Ahora, dada esta otra ecuación exponencial:

$$3^x = 2187$$

No tiene sentido pasar la potenciación como radicación:

$$3 = \sqrt[x]{2187}$$

No podemos calcularla pues ahora la incógnita está en el índice de la raíz.

Ya vimos en la guía pasada cómo resolverla usando algunas técnicas como la descomposición factorial de 2187 y la propiedad $b^m = b^p \Rightarrow m = p$:

$$3^x = 2187$$

$$3^x = 3^7 \text{ aplico } b^m = b^p \Rightarrow m = p$$

$$x = 7$$

$$\begin{array}{r} 2187 \overline{) 3} \\ 729 \overline{) 3} \\ 243 \overline{) 3} \\ 81 \overline{) 3} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

Pero ahora no aplicaremos técnicas para calcular la incógnita, sino que aplicaremos la inversa de la exponenciación: la logaritmicación.

Logaritmación

Se llama **logaritmo** de un número real positivo N con base a real positiva y distinta de 1, al exponente C al que se debe elevar la base a para obtener dicho número N .

En símbolos:

$$\log_a N = C \Rightarrow a^C = N \quad \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 0 < N \end{cases}$$

Diagrama de anotaciones:

- logaritmación → $\log_a N = C$
- base → a
- argumento o número → N
- logaritmo → C
- “entonces” → \Rightarrow
- “base a positiva y distinta de 1” → $0 < a \neq 1$
- “argumento N positivo” → $0 < N$

La logaritmación me pide obtener un exponente para la potencia a^C de manera que me dé N , o sea:

$$a^C = N$$

Por ejemplo:

$$\log_2 8 =$$

Esta logaritmación me pide “¿qué exponente le pongo a 2 para que me dé 8?”

Mentalmente puedo ver que el exponente para la base 2 es 3 ya que $2^3 = 8$.

Entonces:

$$\log_2 8 = \mathbf{3} \text{ pues } 2^{\mathbf{3}} = 8$$

Otros ejemplos:

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = \mathbf{-2} \text{ pues } \left(\frac{1}{5}\right)^{\mathbf{-2}} = 5^2 = 25$$

$$\log_7 1 = \mathbf{0} \text{ pues } 7^{\mathbf{0}} = 1$$

Ejercicio 1

Calcula mentalmente los siguientes logaritmos. (Recuerda que para invertir la base de una potencia debes cambiar el signo del exponente o colocarle signo negativo si no está escrito.)

- $\log_2 16 =$
- $\log_2 \frac{1}{2} =$
- $\log_5 1 =$
- $\log_2 \frac{1}{8} =$

Logaritmos decimales y logaritmos naturales

Las bases más utilizadas en los logaritmos son 10 y e (Número de Euler, $e = 2,718281828459 \dots$) y los llamaremos:

- **Logaritmo decimal:**

Tiene base 10 y no es necesario escribir la base del logaritmo:

$$\log_{10} N = \log N$$

En la calculadora, se simboliza con la tecla [log].

• **Logaritmo natural o logaritmo neperiano:**

Tiene base e y se representa con \ln :

$$\log_e N = \ln N$$

En la calculadora, se simboliza con la tecla $[\ln]$.

También podemos obtener otros logaritmos con la calculadora.

En las calculadoras científicas más nuevas, está la tecla $[\log_{\square} \square]$, pero sino, lo haremos así:

$$\log_5 32 = \frac{\log 32}{\log 5} = \frac{1,505}{0,699} = 2,153$$

o sino:

$$\log_5 32 = \frac{\ln 32}{\ln 5} = \frac{1,505}{0,699} = 2,153$$

Te habrás dado cuenta de que se puede calcular usando $[\log]$ o $[\ln]$.

Este procedimiento se basa en una propiedad llamada **cambio de base** y nos permite usar la calculadora científica en todos los casos cuando no tenga la tecla $[\log_{\square} \square]$.

Simbólicamente:

$$\log_a N = \frac{\log N}{\log a} = \frac{\ln N}{\ln a}$$

Ejercicio 2

Calcula usando calculadora:

Aplicando logaritmos decimales:

- a) $\log 1000 =$
- b) $\log 1 =$
- c) $\log 2,02 =$

Aplicando logaritmos naturales:

- d) $\ln 7 =$
- e) $\ln 25 =$
- f) $\ln 0,25 =$

Aplicando cambio de base:

- g) $\log_4 100 =$
- h) $\log_3 10 =$
- i) $\log_{\frac{1}{2}} 7 =$
- j) $\log_5 \frac{1}{8} =$

Propiedades de los logaritmos

Logaritmo de un producto:

$$\begin{aligned} \log_b (P \cdot Q) &= \\ &= \log_b P + \log_b Q \end{aligned}$$

Logaritmo de un cociente:

$$\begin{aligned} \log_b(P:Q) &= \\ &= \log_b P - \log_b Q \end{aligned}$$

O también:

$$\log_b \left(\frac{P}{Q} \right) = \log_b P - \log_b Q$$

Logaritmo de una potencia:

$$\log_b P^m = m \cdot \log_b P$$

Logaritmo de una raíz:

$$\log_b \sqrt[n]{Q} = \frac{\log_b Q}{n}$$

O también:

$$\log_b \sqrt[n]{Q} = \frac{1}{n} \cdot \log_b Q$$



Ejercicio 3

Resuelve aplicando propiedades:

- a) $\log_2(16 \cdot 2 \cdot 128) =$
- b) $\log_2 \left(\frac{1}{32} : 64 \right) =$
- c) $\log_4 \left(\frac{1}{64} \right)^3 =$
- d) $\log_5 \sqrt[4]{125} =$
- e) $\log_6 \sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$
- f) $\log_3 27^4 =$
- g) $\log_2 \left(16 : \frac{1}{2} \right) =$

Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es aquella en la que la incógnita es la base o el argumento de una **logaritmación**. Por ejemplo:

- a) $\log_4(x + 12) = 2$
- b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$
- c) $\log_2(x - 1) + \log_2 3 = \log_2(x + 3)$
- d) $3^x = 10$ Esta no es logarítmica, pero la resolveremos usando logaritmos.

Resolución de ecuaciones logarítmicas:

1º caso: Aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_4(x + 12) = 2$	<p>Aplicamos la definición de logaritmo:</p> $\log_a N = C$ $a^C = N$ <p>Solo debo identificar base, argumento y logaritmo y convertir la logaritmación en exponenciación.</p>
$4^2 = x + 12$	¡Y ya le quitamos la logaritmación ! Ahora es muy fácil despejar x .
$16 = x + 12$	
$16 - 12 = x$	
$4 = x$	¡Listo!

Entonces: **nuestra primera arma para quitar lo “logarítmico” de una ecuación será aplicar la definición de un logaritmo.**

Ejercicio 4

(Este es el último ejercicio e incluirá a todos los casos para resolver ecuaciones logarítmicas hasta el final de la guía.)

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a. $\log_5(x - 2) = -1$
- b. $\log(x^2 - 3) = 0$
- c. $\log_{(x+1)} 3 = 1$

2º caso: Aplicando propiedades de logaritmos:

b) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$	<p>Aplico la propiedad recíproca del logaritmo de un producto:</p> $\log_b P + \log_b Q =$ $= \log_b(P \cdot Q)$
$\log_2[(x + 1) \cdot (x - 1)] = 3$	Aplico propiedad distributiva del producto .
$\log_2[x^2 - 1x + 1x - 1] = 3$	
$\log_2[x^2 - 1] = 3$	

$$\log_2[x^2 - 1] = 3$$

Aplico la **definición de logaritmo**:

$$\log_a N = C$$

$$a^C = N$$

Solo debo identificar **base**, **argumento** y **logaritmo** y convertir la logaritmicación en exponenciación.

$$2^3 = [x^2 - 1]$$

¡Y ya le quitamos la logaritmicación! Ahora es muy fácil despejar x .

$$2^3 = x^2 - 1$$

$$8 = x^2 - 1$$

$$8 + 1 = x^2$$

$$9 = x^2$$

$$\sqrt{9} = x$$

$$\pm 3 = x$$

¡Listo!

Continuación del ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

d. $\log_2 x + \log_2 3 = 4$

e. $2 \cdot \log_{\frac{1}{8}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{8}}(x - 2) = 4$

3° caso: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

c) $\log_2(x - 1) + \log_2 3 = \log_2(x + 3)$

Aplico la propiedad recíproca del **logaritmo de un producto** en el primer miembro:

$$\begin{aligned} \log_b P + \log_b Q &= \\ &= \log_b(P \cdot Q) \end{aligned}$$

$$\log_2[(x - 1) \cdot 3] = \log_2(x + 3)$$

Ahora, la **propiedad de logaritmos de bases iguales** tiene iguales argumentos:

$$\begin{aligned} \log_b M &= \log_b P \\ M &= P \end{aligned}$$

$$[(x - 1) \cdot 3] = (x + 3)$$

¡Y ya le quitamos la logaritmicación! Ahora es muy fácil despejar x .

$$(x - 1) \cdot 3 = x + 3$$

$$3x - 3 = x + 3$$

$$3x - x = 3 + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

¡Listo!

Ahora tenemos otra gran arma para resolver ecuaciones logarítmicas: la **propiedad de logaritmos de bases iguales** tiene iguales argumentos, con lo cual le quitaremos lo “logarítmico” a la ecuación:

$$\log_b M = \log_b P$$

$$M = P$$

Continuación del ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

f. $\log_{\frac{1}{8}}(x + 2) = \log_{\frac{1}{8}}(10 - x)$

g. $\log_2(x - 1) + \log_2 2 = \log_2(x + 4)$

4º caso: Para resolver ecuaciones exponenciales:

d) $3^x = 10$

Esta ecuación no es logarítmica, pero la resolveremos usando logaritmos. Aplico logaritmos en el primer y en el segundo miembro. Se puede aplicar logaritmo decimal o logaritmo natural, pero debe aplicarse el mismo en ambos miembros.

$$\log 3^x = \log 10$$

$$x \cdot \log 3 = \log 10$$

Ahora, aplico la propiedad del **logaritmo de una potencia** en el primer miembro:

$$\log_b P^m =$$

$$= m \cdot \log_b P$$

$$x = \frac{\log 10}{\log 3}$$

Paso el log 3 dividiendo al primer miembro. Y ahora puedo obtener el valor con la calculadora científica.

$$x = 2,096$$

¡Listo!

Continuación del ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

h. $0,3^x = 1,5$

i. $3 \cdot 2^x = 10$ En este ejercicio conviene pasar primero el 3 al segundo miembro.

Te dejo los resultados de las ecuaciones para que controles:

a) $x = \frac{11}{5}$

b) $x = -2$ y también $x = +2$

c) $x = 2$

d) $x = \frac{16}{3}$

e) $x = \frac{33}{16}$

f) $x = 4$

g) $x = 6$



h) $x = -0,337$

i) $x = 1,737$

Ejercicios de repaso

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. La tabla tiene sus resultados, para que controles tu trabajo:

Ecuaciones	Resultados
1) $\log_2 x = 3$	$x = 8$
2) $\log_5(2x + 1) = 2$	$x = 12$
3) $\log_3(x - 4) = 4$	$x = 85$
4) $\log_{10}(3x + 7) = 2$	$x = 31$
5) $\log_3 x + \log_3 4 = 2$	$x = \frac{1}{3}$
6) $\log_5(x + 1) - \log_5 2 = 1$	$x = 9$
7) $2 \cdot \log_2 x + \log_2 3 = 5$	$x = 4$
8) $\log_4 x + \log_4(x - 3) = 3$	$x = 7$
9) $\log_7(x + 2) = \log_7 5$	$x = 3$
10) $\log_2(3x - 1) = \log_2 7$	$x = \frac{8}{3}$
11) $\log_5(2x) = \log_5(x^2 - 3)$	$x = 3$
12) $\log_3(x^2 - 4x) = \log_3 15$	$x = 5$
13) $2^x = 10$	$x = \log_2 10 \approx 3,322$
14) $3^{2x+1} = 50$	$x = \frac{\log_3(50) - 1}{2} \approx 1,468$
15) $5^{x-2} = 7$	$x = 2 + \log_5 7 \approx 3,209$

Más ejercicios de repaso

Usa la calculadora. (No olvides poner paréntesis cuando trabajes con fracciones.)

Aplicando logaritmos decimales:

a) $\log 100 =$

b) $\log 1 =$

Aplicando logaritmos naturales:

c) $\ln 8 =$

d) $\ln \frac{3}{7} =$

Aplicando cambio de base:

e) $\log_5 20 =$

f) $\log_7 12 =$

g) $\log_{\frac{1}{5}} 8 =$

h) $\log_3 \frac{5}{2} =$

Resuelve aplicando propiedades de los logaritmos:

a) $\log_3 (27 \cdot 3 \cdot 9) =$

b) $\log_2 \left(32 : \frac{1}{8} \right) =$

c) $\log_4 \left(\frac{1}{16} \right)^5 =$

d) $\log_2 \sqrt[5]{8} =$

Más ecuaciones logarítmicas

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

1° caso: Aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log(x^3 - 7) = 0$ Recuerda que, si la base del logaritmo no está escrita, entonces su base es 10.

b) $\log_{(x+2)} 9 = 1$

2° caso: Aplicando propiedades de logaritmos:

c) $\log_3 x + \log_3 15 = 2$

3° caso: Aplicando propiedades y logaritmos de igual base:

d) $\log_{\frac{5}{4}}(x - 3) = \log_{\frac{5}{4}}(9 - x)$

4° caso: Aplicando logaritmo y propiedades para resolver ecuaciones exponenciales:

e) $0,8^x = 1,7$

Los resultados, para que controles:

a) $x = 2$

b) $x = 7$

c) $x = \frac{3}{5}$

d) $x = 6$

e) $x = -2,37797$

Últimas ecuaciones

Hallar el valor de "x"

1) $\log_4 64 = X$

2) $\log_{10} 1000 = X$

3) $\log_{10} 0,01 = X$

4) $\log_a a^2 = X$

5) $\log_3 81 = X$

6) $\log_2 \frac{1}{4} = X$

7) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = X$

8) $\log_2 \frac{1}{32} = X$

9) $\log_3 \frac{1}{27} = X$

10) $\log_{\frac{1}{32}} 2 = X$

11) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = X$

12) $\log_{\frac{1}{2}} 2 = X$

13) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = X$

14) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} = X$

15) $\log_5 \frac{1}{125} = X$

16) $\log_{125} 5 = X$

17) $\log_{16} \frac{1}{2} = X$

18) $\log_X 9 = 2$

19) $\log_X 5 = \frac{1}{2}$

20) $\log_X \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

21) $\log_X \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

22) $\log_X \frac{1}{8} = -3$

23) $\log_X 16 = -4$

24) $\log_2 X = 3$

25) $\log_3 \frac{1}{X} = -2$

26) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{X} = \frac{1}{2}$

27) $\log_{\frac{16}{9}} \frac{X}{4} = -\frac{1}{2}$

28) $\log_{\frac{125}{27}} \frac{3}{5X} = -\frac{1}{3}$

29) $\log_{27} \frac{X}{5} = \frac{1}{3}$

30) $\log_{\frac{1}{16}} \frac{2X}{3} = -\frac{1}{2}$

31) $\log_4 (x) = 0$

32) $\log_2 (x+1) = 0$

33) $4\log_2 (x-1) = 0$

34) $\log (x-1)^2 = 0$

35) $\log_2 (x^2 + 2x - 3) = 0$

36) $\log_2 (x^2 + 3x - 2) = 1$

37) $\log_2 (x+1) = -3$

38) $\log_3 (8x+9) = 4$

39) $\log_5 (13x-18) = 3$

40) $\log_3 (x-1) = -1$

41) $\log_{\frac{1}{2}} \left(6x^2 + 5x + \frac{5}{3}\right) = -2$

Resultados:

$$1) x = 3$$

$$2) x = 3$$

$$3) x = 2$$

$$4) x = 2$$

$$5) x = 4$$

$$6) x = 2$$

$$7) x = 2$$

$$8) x = 5$$

$$9) x = 3$$

$$10) x = \frac{1}{5}$$

$$11) x = 4$$

$$12) x = 1$$

$$13) x = 0$$

$$14) x = 7$$

$$15) x = 3$$

$$16) x = \frac{1}{3}$$

$$17) x = \frac{1}{4}$$

$$18) x = 3$$

$$19) x = 25$$

$$20) x = 5$$

$$21) x = \frac{1}{9}$$

$$22) x = 2$$

$$23) x = \frac{1}{2}$$

$$24) x = 8$$

$$25) x = 9$$

$$26) x = 2$$

$$27) x = 3$$

$$28) x = 1$$

$$29) x = 15$$

$$30) x = 6$$

$$31) x = 1$$

$$32) x = 0$$

$$33) x = 2$$

$$34) x = 0$$
$$y x = 2$$

$$35) x = 1$$
$$y x = -3$$

$$36) x = 1$$
$$y x = -4$$

$$37) x = -\frac{7}{8}$$

$$38) x = 9$$

$$39) x = 11$$

$$40) x = \frac{4}{3}$$

$$41) x = \frac{1}{3}$$
$$y x = -\frac{7}{6}$$

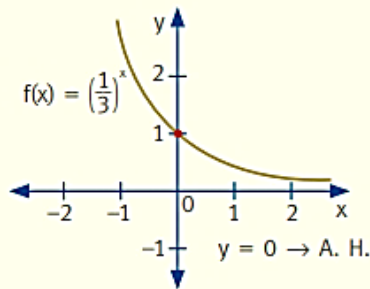
Gráficas de funciones exponencial y logarítmica

Función exponencial

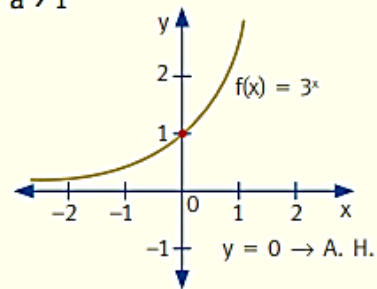
Se denomina **función exponencial** a toda función de la forma $f(x) = k \cdot a^{x-b} + c$ $\wedge a > 0 \wedge a \neq 1$.

- Funciones de la forma $f(x) = a^x$

1. $0 < a < 1$



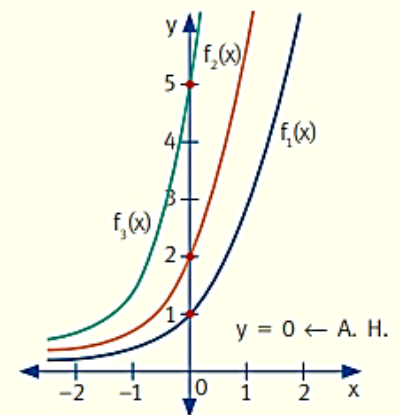
2. $a > 1$



- Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$ $\wedge k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Modifica el valor de la ordenada.

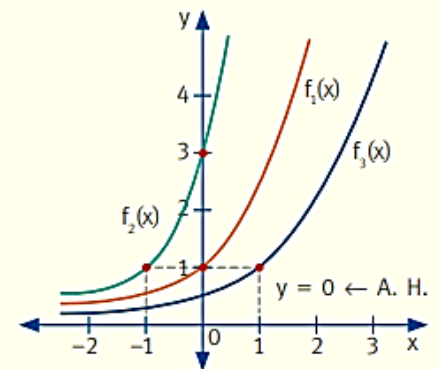
$f(x) = k \cdot a^x$	k
$f_1(x) = 3^x$	1
$f_2(x) = 2 \cdot 3^x$	2
$f_3(x) = 5 \cdot 3^x$	5



- Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^{x-b}$

Indica el corrimiento sobre el eje x.

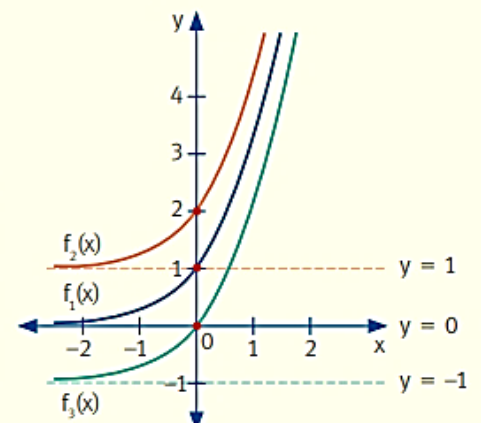
$f(x) = a^{x-b}$	b	Corrimiento
$f_1(x) = 3^x$	0	No tiene.
$f_2(x) = 3^{x+1}$	-1	1 hacia la izquierda.
$f_3(x) = 3^{x-1}$	1	1 hacia la derecha.



- Funciones de la forma $f(x) = a^x + c$ $\wedge c \in \mathbb{R}$

Indica el corrimiento sobre el eje y.

$f(x) = a^x + c$	c	Corrimiento	A. H.
$f_1(x) = 3^x$	0	No tiene.	$y = 0$
$f_2(x) = 3^x + 1$	1	Hacia arriba, 1.	$y = 1$
$f_3(x) = 3^x - 1$	-1	Hacia abajo, 1.	$y = -1$



Función logarítmica

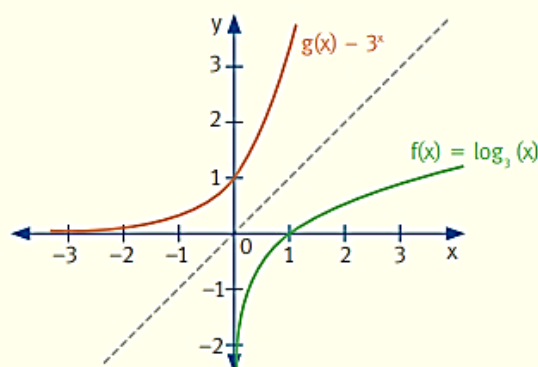
Se define **función logarítmica** de base a , a la función inversa de la función exponencial de base a .

$$f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x \wedge x > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$$

• $f(x) = y = \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = x$ $D_f = (0; +\infty) \wedge C_f = \mathbb{R}$ A. V.: $x = 0$

Intersección con el eje x : $f(x) = 0$, entonces $\log_3 x = 0 \Rightarrow 3^0 = x \Rightarrow x = 1$

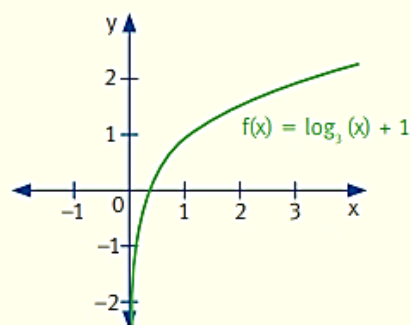
x	y = log ₃ x
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



• $f(x) = \log_3 x + 1$ $D_f = (0; +\infty) \wedge C_f = \mathbb{R}$ A. V.: $x = 0$

Intersección con el eje x , $f(x) = 0$, entonces $\log_3 x + 1 = 0 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

x	y = log ₃ x + 1
$\frac{1}{9}$	-1
$\frac{1}{3}$	0
1	1
3	2
9	3

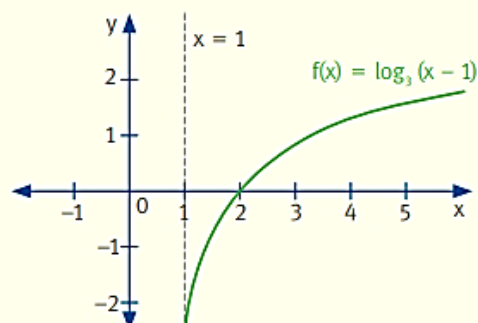


• $f(x) = y = \ln(x - 1) \Leftrightarrow e^y = x - 1$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D_f = (1; +\infty) \wedge C_f = \mathbb{R}$ A. V.: $x = 1$

Intersección con el eje x , $f(x) = 0$, entonces $\ln(x - 1) = 0 \Rightarrow e^0 = x - 1 \Rightarrow x = 2$

x	y = ln(x - 1)
2	0
$e + 1$	1
$e^2 + 1$	2
$e^3 + 1$	3



Graficador de funciones exponencial y logarítmica con coeficientes dinámicos

La siguiente página de GeoGebra te permitirá aprender cómo afectan a la curva de las funciones exponencial y logarítmica los valores de los coeficientes en las expresiones:

$$y = k \cdot a^{x-b} + c$$

y en

$$y = a \cdot \log_b(x - c) + d$$

Escanea el código QR o haz clic en el enlace:



<https://www.geogebra.org/classic/zxubf2ey>

En la página interactiva, mueve los deslizadores para observar cómo cambia la curva de cada función según lo estudiado en la página anterior.

Ejercicios

1) Dadas las siguientes funciones exponenciales, se pide:

- Representarlas gráficamente en ejes cartesianos.
- Dominio.
- Imagen o recorrido.
- Expresión de la asíntota horizontal.
- Punto de corte en el eje y .
- Indicar si es creciente o decreciente.

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = 4 \cdot 2^x$

d) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$

e) $y = 2 \cdot 3^{-x} + 1$

f) $y = 2^{x+1} - 3$

Dadas las siguientes funciones logarítmicas, se pide:

- Representarlas gráficamente en ejes cartesianos.
- Dominio.
- Imagen o recorrido.
- Expresión de la asíntota vertical.
- Punto de corte en el eje x .

a) $y = \log_3 x$

b) $y = 2 \log_3 x$

c) $y = \log_3 x + 1$

d) $y = \log_3 x - 2$

e) $y = 4 \cdot \log_3(x + 1)$

f) $y = 4 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x - 3)$

Ecuaciones exponencial y logarítmica:

Ejercicios de aplicación

Las siguientes son fórmulas para trabajar problemas de **crecimiento discreto** (una **cantidad aumenta en intervalos separados de tiempo** y no de manera continua, es decir, el cambio ocurre paso a paso, no en todo instante: "de a saltos"), aunque te permitirán resolver en problemas con **crecimiento continuo** (una **cantidad aumenta en todo momento**, no por etapas separadas, sino de manera permanente) de manera aceptable.

Las fórmulas de crecimiento discreto pueden utilizarse para aproximar situaciones de crecimiento continuo, ya que cuando los períodos son pequeños los resultados obtenidos son muy similares.

$$n = \frac{\log\left(\frac{V_f}{V_0}\right)}{\log(t)} \qquad t = \left(\frac{V_f}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$V_f = V_0 \cdot (t)^n \qquad V_0 = \frac{V_f}{(t)^n}$$

$t = 100\% + \text{Crecimiento } \%$

- > n = Cantidad de Períodos considerados
- > t = Tasa (se calcula como 1 + "crecimiento porcentual")
- > V_f = Es el Valor final
- > V₀ = Es el valor inicial
- > Crecimiento Porcentual = Es la variación porcentual que sufre la variable en cada período de tiempo (cada período considerado como "n")

Ejercicios

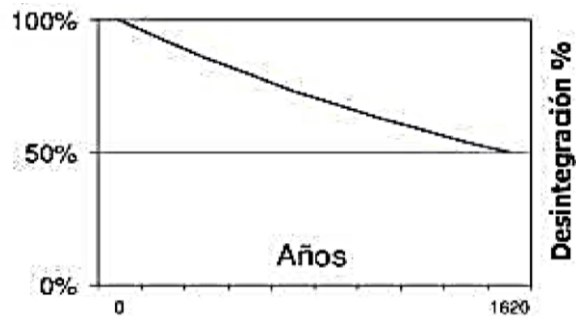
- 1) Sabiendo que la masa de carbono-14 (^{14}C) (remanente después de su desintegración), puede calcularse con la conocida fórmula:

$$M = M_0 \cdot \left(\frac{70}{79}\right)^t$$

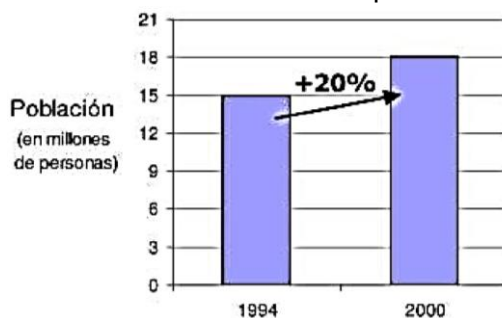
siendo " M_0 ", la masa inicial de carbono-14 y " t " el período de tiempo en miles de años. Calcular:

- a. La masa de carbono-14 de un organismo que en vida tuvo 200 gramos, si ya han pasado 10.000 años.
 - b. El tiempo aproximado de un fósil que en vida tenía 200 gramos de carbono-14 y hoy tiene 76 gramos.
- 2) La masa de árboles de un bosque es de 5000 toneladas y por efecto de deforestación, decrece un 9% anual.
- a. ¿Cuál será la masa de árboles de dicho bosque al cabo de 25 años?
 - b. ¿Al cabo de cuánto tiempo quedará la mitad de la masa actual?
 - c. ¿Cuál será la masa de árboles de este bosque dentro de 16 meses?
- 3) La población de cierto tipo de insecto crece a un ritmo de un 22% cada ocho días. ¿En cuánto tiempo dicha población será 25 veces mayor a la actual?

- 4) Sabiendo que una determinada masa de Radio-226 (^{226}Ra), tarda 1620 años en desintegrar la mitad de su masa, en forma exponencial. Hallar:
- La masa inicial de Radio-226 para que, habiendo transcurrido 126 años, hayan quedado 180 gramos.
 - El porcentaje de pérdida de masa con respecto a la inicial al cabo de 1000 años.

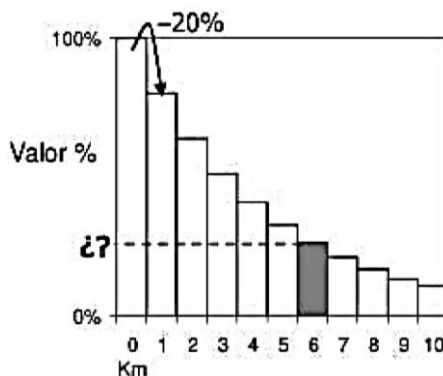


- 5) Según los censos realizados en un país, se observó que la población pasó de 15 a 18 millones de personas desde el año 1994 al año 2000. Como puede verse en el gráfico siguiente:



Suponiendo que va a mantenerse constante (en forma porcentual) el ritmo de crecimiento de esa población:

- ¿Cuál sería la población estimada de ese país para el año 2018?
 - ¿Y para el año 2021?
 - ¿A partir de qué año la población superaría los 50 millones?
- 6) Supongamos que los automóviles 0 km, se deprecian a un ritmo constante del 20% anual. Si un auto 0 km de determinada marca hoy cuesta \$20.000.
- ¿Cuál será su valor dentro de 6 años?
 - ¿Dentro de cuántos años este auto valdría menos de la mitad de lo que vale 0 km?



- 7) Imaginemos que el valor de una antigüedad aumenta un 20% cada 5 años que pasan. Si el valor actual de una antigüedad de este tipo es de \$100.
- ¿Cuál será su valor al cabo de 100 años?
 - ¿Sería correcto suponer que al cabo de 200 años va a valer el doble de lo que va a valer al cabo de 100 años?
 - Calcular entonces cuánto va a valer al cabo de 200 años y sacar conclusiones acerca de las funciones exponenciales.

- 8) Una persona piensa depositar en un banco una suma de \$50.000 y le ofrecen un interés mensual de un 0,8%, con lo cual cada mes que pasa, la cifra depositada va aumentando y se va sumando a la cifra a la cual se le van a sumar los intereses que le da el banco. Por otro lado, le ofrecen a la misma persona invertir sus ahorros en acciones de una empresa que le asegura que al cabo de cinco años, no solo recupera su inversión, sino que además le quedan \$22.000 de ganancia extra.
- ¿Qué le conviene hacer a esta persona, económicamente hablando?
 - ¿Por qué?
- 9) Una determinada revista zonal de publicación mensual tiene actualmente una tirada de 200 ejemplares. El precio promedio de una publicidad en esta revista es de \$5.
- Si su plan es aumentar un 20% esta tirada por cada mes que se publique. ¿En cuántos años llegarían a tener una tirada mensual de 1.000.000 de ejemplares?
 - Si su plan es aumentar un 40% esta tirada, pero cada dos meses. ¿Para llegar a tener una tirada mensual de 1.000.000 de ejemplares, se tarda lo mismo que con un crecimiento del 20% por mes?
 - Si se lleva a cabo el primer plan de aumentar un 20% cada mes, y si el precio promedio de la publicidad en la revista es proporcional a la tirada. ¿Cuál sería entonces el precio promedio de la publicidad en la revista al cabo de 4 años exactos?
 - Teniendo en cuenta nuevamente que el precio de publicidad en la revista es proporcional a la tirada de la misma. ¿Cuál va a ser el precio de publicidad a los 8 meses de cumplido el plan de aumentar un 20% la tirada por mes?
 - Si la empresa que imprime la revista quiere lograr tener una tirada de 1.000.000 de ejemplares en tan solo 1 año y medio ¿Qué porcentaje tiene que crecer la tirada cada mes?

RESULTADOS

- | | |
|---|--|
| <p>1)</p> <ol style="list-style-type: none"> 59,67 g 8000 años <p>2)</p> <ol style="list-style-type: none"> 473,157 t 7 años, 4 meses y 2 días <p>3) 129 días y medio</p> <p>4)</p> <ol style="list-style-type: none"> ≈ 190 g ≈ 34,7% <p>5)</p> <ol style="list-style-type: none"> 31.104.000 34.073.000 Año 2033 | <p>6)</p> <ol style="list-style-type: none"> \$ 5243 14 años <p>7)</p> <ol style="list-style-type: none"> \$ 3833 146.977 <p>8)</p> <ol style="list-style-type: none"> Depositar en el banco. Porque Gana \$8649 más <p>9)</p> <ol style="list-style-type: none"> 4 años No, tarda más \$ 31.598,74 \$21,50 60,5% |
|---|--|

A.B.P. (Aprendizaje Basado en Proyectos)
“Tenebrio molitor: biodegradación natural”
Proyecto interdisciplinario de Biología y Matemática

Dejo aquí información teórica relacionada de Matemática y Biología para trabajar con el proyecto interdisciplinario que se presentará en la Muestra Didáctica.

Crecimiento exponencial

Existen tres fórmulas para calcular la población en un tiempo t o $P(t)$: dos de estas fórmulas se usan para describir el crecimiento exponencial donde cada una tiene un origen y uso ligeramente distinto, y una tercera fórmula para el crecimiento exponencial, pero con una capacidad limitada.

1. Crecimiento continuo:

$$P(t) = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

donde:

- V_0 es la población inicial.
- e es la base del logaritmo natural (aproximadamente 2,71828).
- r es la tasa de crecimiento instantánea o continua.
- t es el tiempo en unidades continuas (puede ser cualquier valor real).

Se usa para modelar fenómenos que crecen o decaen de forma **continua y natural**, como la población biológica sin limitaciones, interés compuesto continuo o procesos físicos. Esta fórmula surge de resolver una ecuación que expresa que la tasa de crecimiento es proporcional a la población actual.

2. Crecimiento discreto o con intervalos definidos:

$$P(t) = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

donde:

- V_0 es la población inicial.
- r es la tasa de crecimiento por intervalo (como anual, mensual).
- t es un número entero que representa el número de intervalos o períodos.

Se usa para crecimientos que ocurren en períodos **discretos** y medibles, en etapas **con intervalos** claros (por ejemplo, crecimiento anual de una población con generaciones claras, o interés compuesto anual).

Relación entre las fórmulas de crecimiento discreto y de crecimiento continuo

Ambas se relacionan estrechamente; por ejemplo:

$$(1 + r)^t \approx e^{r \cdot t}$$

Cuando r es pequeño y los intervalos t son cortos, las dos fórmulas son prácticamente equivalentes para muchos usos prácticos.

3. Modelo logístico o de capacidad de carga

$$P(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - V_0}{V_0} \cdot e^{-r \cdot t}}$$

donde:

- V_0 es la población inicial,
- r es la tasa intrínseca de crecimiento,
- K es la capacidad de carga o capacidad de sostén del ambiente — es el máximo número de individuos que el entorno (el tarro con desperdicios) puede mantener estable sin que la población colapse o se reduzca.

Si el crecimiento tendrá un **estado de equilibrio** o una **capacidad de sostenimiento poblacional** (como, por ejemplo, el crecimiento poblacional de *tenebrio molitor* o gusanos de harina) en un entorno con recursos limitados, se utiliza un modelo de crecimiento poblacional con capacidad de carga o capacidad de soporte, conocido como **modelo logístico**.

El modelo funciona de la siguiente manera:

- Cuando la población es pequeña, el crecimiento es cercano al **exponencial**,
- A medida que la población se acerca a K , el crecimiento **se desacelera**,
- Finalmente, la población **se estabiliza** en K , alcanzando un equilibrio donde nacimientos y muertes se igualan.

Caso particular de nuestra granja de *tenebrios molitores*

En nuestra granja tenemos:

- Población inicial $V_0 = 50$,
- Tasa intrínseca de crecimiento: $r = 0,82\%$ diario = $0,0082$.
- Capacidad de carga: $K = 500$

Si describimos a la población con fórmula de crecimiento **continuo**, la población final V_f es:

$$V_f = 50 \cdot e^{0,0082 \cdot t}$$

con t expresado en días.

Si la describiéramos con la fórmula de crecimiento **discreto**, sería:

$$V_f = 50 \cdot (1 + 0,0082)^t$$

con t expresado en días.

Por último, si la describimos con la fórmula de crecimiento **logístico**:

$$V_f = \frac{500}{1 + \frac{500 - 50}{50} \cdot e^{-0,0082 \cdot t}}$$

con t expresado en días.


La capacidad de sostén depende de varios factores ambientales importantes: cantidad y calidad del alimento (desperdicios), espacio disponible, temperatura, humedad y toxicidad acumulada. Estudios indican que estas condiciones definen la población máxima sostenible en un contenedor o criadero, conocida como K , para evitar muerte masiva o escasez de recursos.

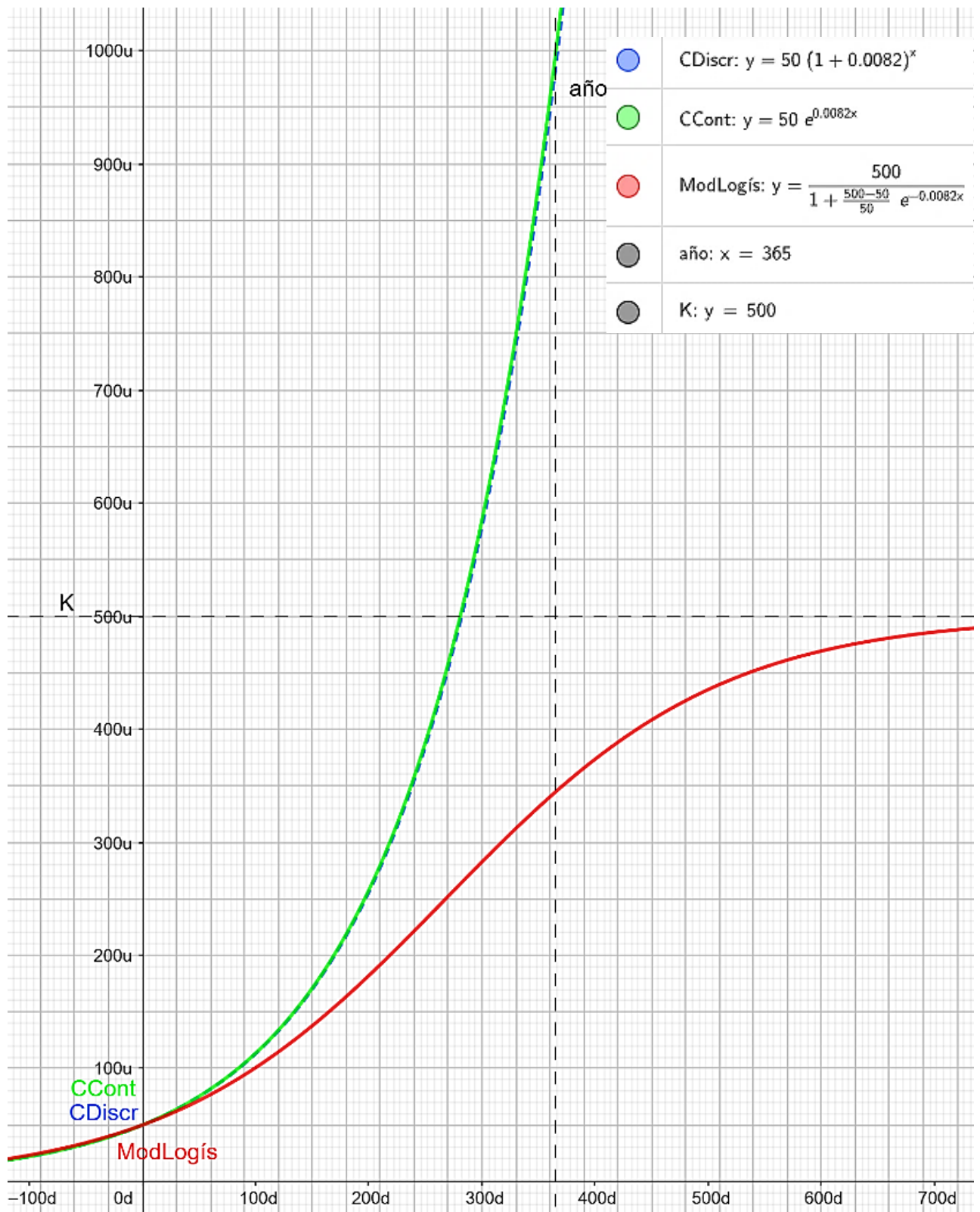
Por lo tanto, esta fórmula logística permite predecir el equilibrio poblacional en tu tarro, ajustando K según los recursos y condiciones ambientales, y r según la tasa de reproducción del *tenebrio* bajo esas condiciones.

Gráficas de crecimiento poblacional

La siguiente gráfica permite comparar las curvas de crecimiento poblacional descritas a través de las tres fórmulas vistas:

Referencias:

$P(t)$ para crecimiento continuo	
$P(t)$ para crecimiento discreto	
$P(t)$ para crecimiento logístico	



Sobre la elección de la tasa de crecimiento:

- La tasa $r = 0,0082$ (0,82% diario) usada es **plausible** si las condiciones son *bastante* subóptimas; sin embargo, la literatura experimental para *tenebrio molitor* indica que, en condiciones óptimas ($\approx 25-27$ °C, humedad relativa moderada 60–80%, dieta rica en cereal o salvado de trigo), las tasas de crecimiento diarias observadas suelen ser **mucho más altas** (por ejemplo 4–7%/día a $\sim 25-27$ °C e incluso picos mayores en condiciones calientes). Dado que tu criadero está a **20 °C y baja humedad** y con dieta de serrín/papel/banana, **es razonable esperar una tasa menor que en óptimo**, pero

la 0,82% puede estar *subestimando* o *aproximando*, dependiendo de cuánta proteína y humedad aporten esos restos.

Qué dice la bibliografía



- Estudios experimentales muestran crecimiento diario en rangos como ~4–7%/día a 25–27 °C; tasas mayores (hasta ~16%/día) se registraron a temperaturas >30 °C en algunos trabajos. A menor temperatura (≈20 °C) el desarrollo se alarga y la tasa diaria baja.
- Humedad ideal suele estar en torno a 50–80% de HR (humedad relativa); humedad **muy baja** reduce supervivencia, fecundidad y velocidad de desarrollo. Dietas ricas en cereal o salvado de trigo o suplementos proteicos aceleran y mejoran rendimientos; dietas pobres (solo serrín/papel) reducen la tasa de crecimiento r y aumentan tiempo larval.
- Densidad importa: densidades altas empeoran crecimiento individual y aumento de mortalidad; las recomendaciones prácticas de cría varían (ej. 1 larva/cm³ como referencia volumétrica en muchos protocolos).

¿Qué corregir o revisar en los cálculos?

1. **Validar r empíricamente:** para estimar el r real, **mide:** cuenta V_0 y cuenta V_f tras t días y calcula

$$r = \frac{\ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)}{t}$$

De todos modos, deben pasar más de 2 meses para que las larvas se conviertan en escarabajos que pongan huevos, y **esperar 3 meses para que observemos crecimiento poblacional** cuando aparezca la siguiente generación de larvas.

2. **Ajustar por temperatura y humedad:** tu 20 °C y baja humedad **reducen** r con respecto a condiciones óptimas. La bibliografía muestra tasas significativamente menores a 20–22 °C. Por tanto, si se tomó r basado en cría a 25 °C, hay que bajarlo; pero si el autor ya eligió 0,0082 *como* r bajo condiciones frías/secas, mantenerlo y confirmar con conteos.

3. **Dieta y proteína:** el alimento principal importa. Aserrín, papel y bananas proveen algo de carbohidratos, pero **poca proteína** comparada con salvado de trigo o residuos agrícolas ricos en proteína. Menor proteína → menor fecundidad y r . Si quieres predecir con más precisión, incluye un factor de calidad alimentaria.
4. **Capacidad de carga K :** si vamos a usar el modelo logístico, $K = 500$ es arbitrario a menos que se haya estimado por volumen de contenedor y densidad/recursos. Puedes estimar K usando reglas prácticas (p. ej. densidad recomendada ~ 1 larva/cm³ o 0,5–2 larvas/cm² según fuente) y el volumen real del recipiente — o mejor, estimar empíricamente observando cuándo el crecimiento se desacelera repetidamente.
5. **Higiene y riesgo de colapsos:** cartón + humedad variable + residuos de fruta pueden fomentar hongos, pestes o protozoos que causan mortalidad brusca. El modelo logístico supone mortalidad gradual; una contaminación puede provocar colapsos no descritos por el modelo; tenerlo en cuenta al interpretar predicciones.

Recomendaciones prácticas (para mejorar la predicción y la cría)

- **Mide:** registrar V_0 , cuenta larvas y escarabajos cada X días (p. ej. 7–14 días), registra temperatura y humedad con un *datalogger*. Usar la fórmula $r = (\ln V_f - \ln V_0)/t$ para obtener r real.
- **Mejora dieta:** al añadir salvado de trigo o fuente proteica (harina de trigo, salvado, residuos vegetales ricos en proteína) subirá r . Estudios recomiendan suplementar con fuentes ricas para aumentar fecundidad y velocidad de desarrollo.
- **Ajusta humedad:** mantener RH (humedad relativa) moderada (50–75%) mejora crecimiento; con baja humedad, provee “comodines” húmedos (pedazos de fruta) con control de mohos o una fuente de humedad localizada.
- **Evita sobrepoblación:** respetar densidad recomendada (ej. 0.5–1 larva/cm³ en muchos protocolos). Si el recipiente es pequeño (el que “entraba 3 kg de dulce de leche” \approx unos litros), calcula K a partir del volumen y la densidad y usa ese K en el modelo logístico en lugar de un número arbitrario.
- **Control de higiene:** evitar mohos y plagas; cartón puede ser útil, pero debe reemplazarse si aparece contaminación.



Datalogger

Despeje de fórmulas

1. Crecimiento continuo:

$$P(t) = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Valor final V_f :

$$V_f = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Donde:

V_f es el valor final, antes llamada función $P(t)$,

V_0 es la población inicial.

e es la base del logaritmo natural (aproximadamente 2,71828).

r es la tasa de crecimiento instantánea o continua.

t es el tiempo en unidades continuas (puede ser cualquier valor real).

Despeje del valor inicial V_0 :

Comenzamos desde

$$V_f = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Paso dividiendo $e^{r \cdot t}$;

$$\frac{V_f}{e^{r \cdot t}} = V_0$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

$$V_0 = \frac{V_f}{e^{r \cdot t}}$$

Despeje del crecimiento porcentual r :

Comenzamos desde

$$V_f = V_0 \cdot e^{r \cdot t}$$

Paso V_0 dividiendo:

$$\frac{V_f}{V_0} = e^{r \cdot t}$$

Aplico logaritmos naturales a ambos miembros (para poder sacar a n del exponente):

$$\ln \frac{V_f}{V_0} = \ln e^{r \cdot t}$$

Aplico propiedad de logaritmo de una potencia para sacar a $r \cdot t$ del exponente fuera del logaritmo:

$$\ln \frac{V_f}{V_0} = r \cdot t \cdot \ln e$$

Como $\ln e = 1$, ya no es necesario ponerlo:

$$\ln \frac{V_f}{V_0} = r \cdot t$$

Termino pasando a t dividiendo:

$$\frac{\ln \frac{V_f}{V_0}}{t} = r$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

$$r = \frac{\ln \frac{V_f}{V_0}}{t}$$

Despeje de la cantidad de períodos considerados t :

En este caso, comenzamos desde el antepenúltimo paso del despeje anterior:

$$\ln \frac{V_f}{V_0} = r \cdot t$$

Termino pasando a r dividiendo:

$$\frac{\ln \frac{V_f}{V_0}}{r} = t$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

$$t = \frac{\ln \frac{V_f}{V_0}}{r}$$

2. Crecimiento discreto o con intervalos definidos:

$$P(t) = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Valor final V_f :

$$V_f = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

donde:

V_f es el valor final, antes llamada función $P(t)$,

V_0 es el valor inicial,

r es el crecimiento porcentual [%] para un período determinado,

t es la cantidad de períodos considerados.

Despeje del valor inicial V_0 :

Comenzamos desde

$$V_f = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Paso $(1 + r)^t$ dividiendo:

$$\frac{V_f}{(1 + r)^t} = V_0$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

$$V_0 = \frac{V_f}{(1 + r)^t}$$

Despeje del crecimiento porcentual r :

Comenzamos desde

$$V_f = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Paso V_0 dividiendo:

$$\frac{V_f}{V_0} = (1 + r)^t$$

Paso el exponente n como índice de raíz n -ésima:

$$\sqrt[t]{\frac{V_f}{V_0}} = 1 + r$$

Paso 1 restando:

$$\sqrt[t]{\frac{V_f}{V_0}} - 1 = r$$

Puedo escribir a la raíz n -ésima como potencia de exponente fraccionario:

$$\left(\frac{V_f}{V_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = r$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

$$r = \left(\frac{V_f}{V_0} \right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Despeje de la cantidad de períodos considerados t :

Comenzamos desde

$$V_f = V_0 \cdot (1 + r)^t$$

Paso V_0 dividiendo:

$$\frac{V_f}{V_0} = (1 + r)^t$$

Aplico logaritmos a ambos miembros (para poder sacar a t del exponente):

$$\log \frac{V_f}{V_0} = \log(1 + r)^t$$

Aplico propiedad de logaritmo de una potencia para sacar a t del exponente fuera del logaritmo:

$$\log \frac{V_f}{V_0} = t \cdot \log(1 + r)$$

Paso a $\log(1 + r)$ dividiendo:

$$\frac{\log \frac{V_f}{V_0}}{\log(1 + r)} = t$$

Para más claridad, cambio de lugar los miembros:

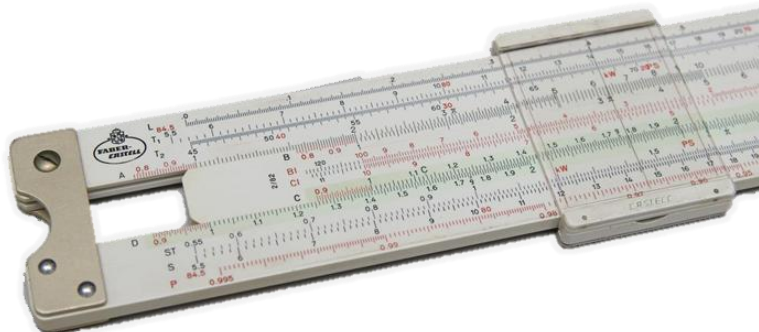
$$t = \frac{\log \frac{V_f}{V_0}}{\log(1 + r)} = \log_{1+r} \frac{V_f}{V_0}$$

Proyecto áulico

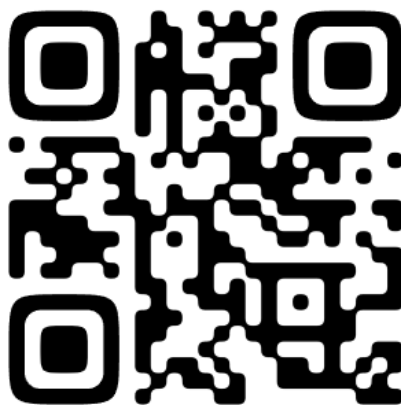
Regla de cálculo logarítmica

La **regla de cálculo** es un instrumento que servía para realizar operaciones matemáticas, como pueden ser multiplicaciones o divisiones, e incluso porcentajes, cálculos de proporcionalidad o raíces cuadradas.

Fue sustituida inevitablemente por las calculadoras, pero durante más de 400 años fue instrumento imprescindible para todo científico o ingeniero. Por poner un ejemplo, muchos de los cálculos llevados a cabo durante las misiones Apolo, que llevaron al hombre a la Luna, fueron realizados con reglas de cálculo. Hay que decir que por entonces la informática aún estaba dando sus primeros pasos.



Aquí les dejo un modelo para que se fabriquen su propia regla de cálculo. Para construirla solo necesitas pegamento, tijeras, e imprimir, a ser posible en cartulina, la plantilla que puedes descargar desde el enlace:



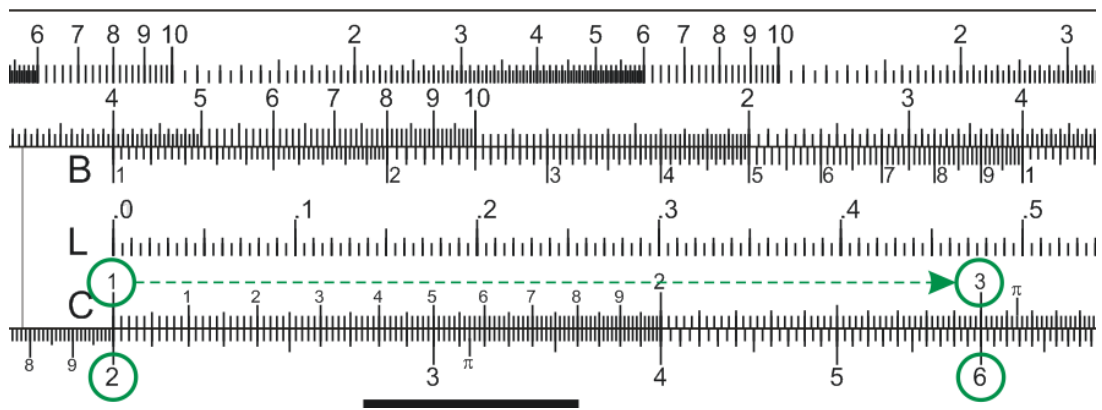
<https://divermates.es/la-regla-de-calculo/>

En esa página web se detallan las instrucciones para su armado, que es muy sencillo.

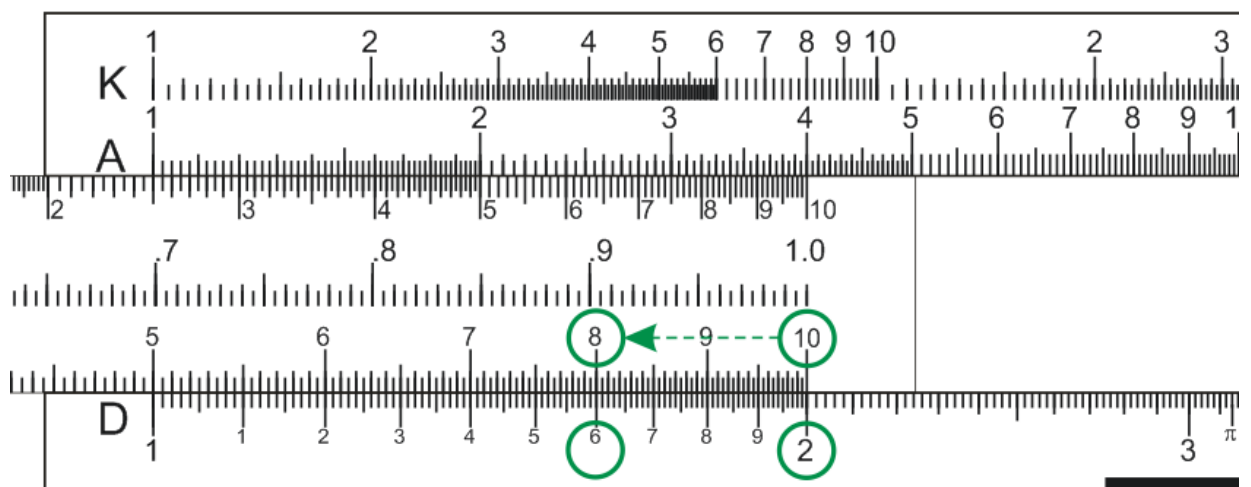
¿Cómo funciona la regla de cálculo?

Comenzamos con **multiplicaciones** (usamos las letras C y D):

- **2 × 3** Alineamos el 2 del D con el 1 del C, y nos fijamos con qué cifra del D coincide el 3 del C: **2 × 3 = 6**

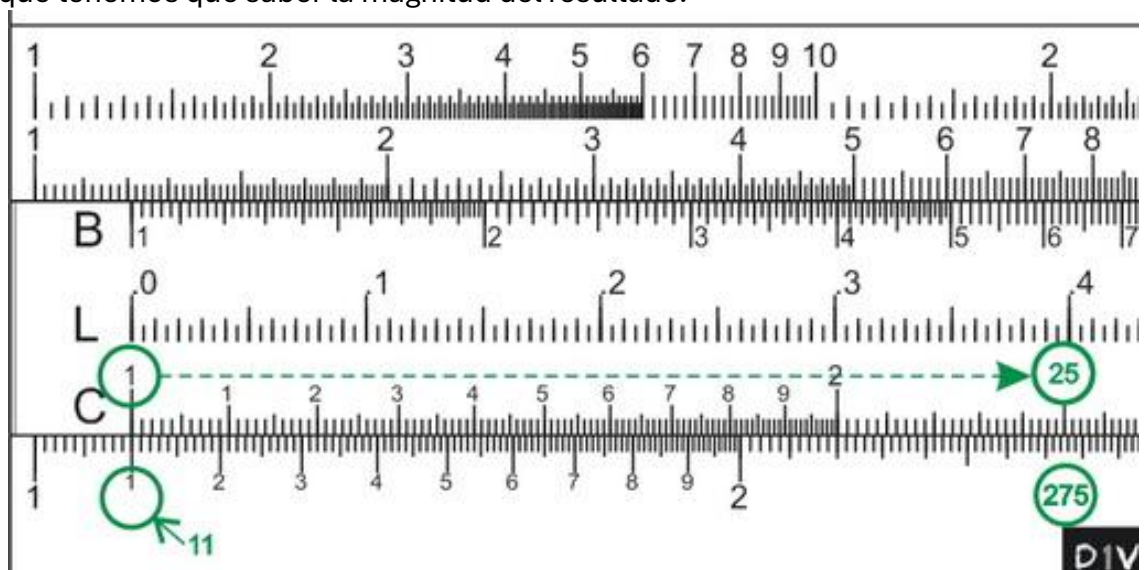


- **2 × 8** Al alinear el 2 del D con el 1 del C, el 8 del C queda fuera de la regla. Cuando nos ocurre esto, tenemos que alinear el 2 del D, no con el 1 de C, sino con el 10 del C, para fijarnos de nuevo con qué cifra del D coincide el 8 del C: **2 × 8 = 16**



Cuando tenemos distintos dígitos, o incluso decimales, hemos de saber la magnitud del resultado. La regla de cálculo nunca nos dice dónde iría la coma.

Vemos dos ejemplos, **11 × 25 = 275** y **1,1 × 2,5 = 2,75**. Ambos se realizarían de igual manera, por lo que tenemos que saber la magnitud del resultado.

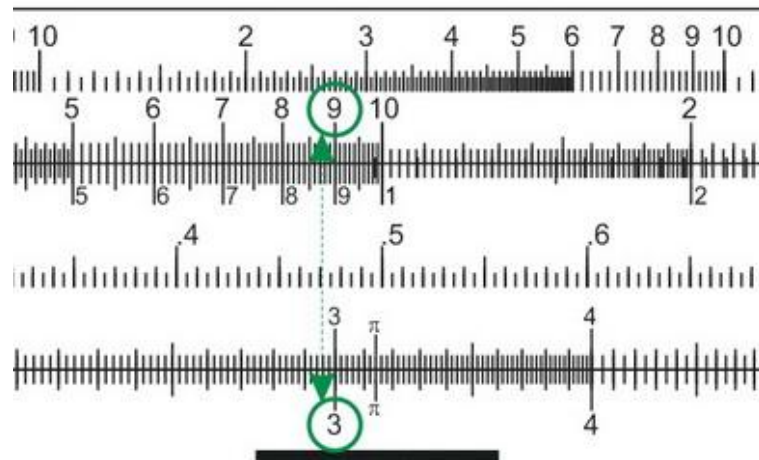


Para realizar **divisiones** se realizaría de forma inversa.

Por ejemplo, para hacer **6/3**, tendríamos que hacer coincidir el 6 del D, con el 3 del C, para luego fijarnos con qué cifra del D coincide el 1 del C: **6/3 = 2**.

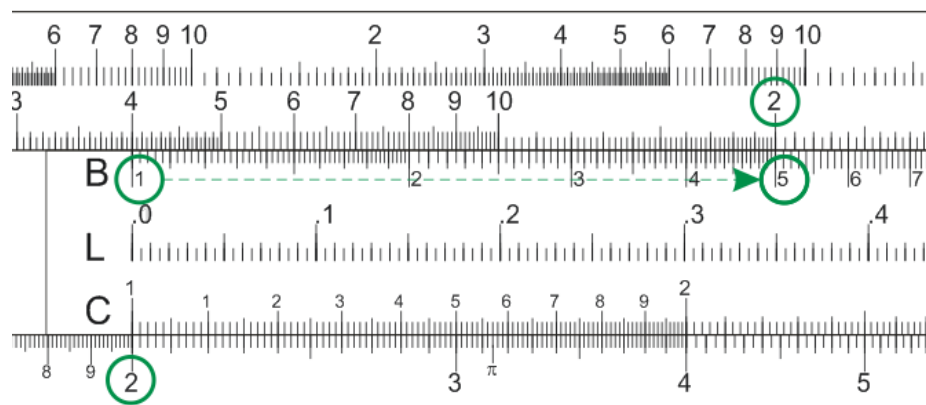
Vamos a ver cómo hacer **cuadrados** o **raíces cuadradas** (usamos las letras A y D, con la regla en posición inicial):

- La letra A nos muestra el cuadrado del número que visualicemos en la letra D: $3^2 = 9$
- Así mismo, la letra D nos muestra la raíz cuadrada del número que visualicemos en la letra A.



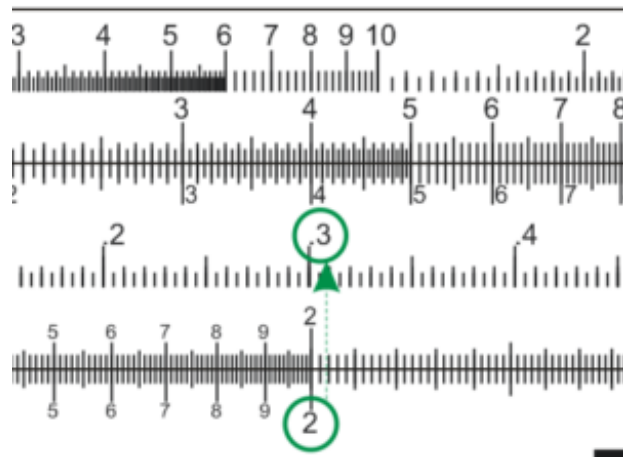
Intentamos ahora multiplicaciones dónde un **multiplicando** es **un cuadrado** (usamos las letras A, B y D):

- $2^2 \times 5$ Alineamos el 2 del D con el 1 del B, y nos fijamos con qué cifra del A coincide el 5 del B: $2^2 \times 5 = 20$



Por último, veamos cómo hacer **logaritmos en base 10** (usamos las letras L y D, con la regla en posición inicial):

- La letra L nos muestra el logaritmo en base 10 del número que visualicemos en la letra D: $\ln 2 = 0,3$



! Cuidado: La escala de esta regla con la letra L es decimal, empieza en el **0,0** y acaba en el **1,0**, pasando por **0,1; 0,2;**... (piensen que el logaritmo de 10 es 1).

Multiplicaciones:

Usamos las letras C y D.

2x3 Alineamos el 2 del D con el 1 del C, y nos fijamos con qué cifra del D coincide el 3 del C:
2x3=6

2x7 Al alinear el 2 del D con el 1 del C, el 7 del C cae fuera de la regla. Cuando nos ocurre esto, tenemos que alinear el 2 del D, no con el 1 de C, sino con el 10 del C, para fijarnos de nuevo con qué cifra del D coincide el 7 del C:
2x7=14

Cuando tenemos distintos dígitos, o incluso decimales, hemos de saber la magnitud del resultado, es decir, la regla de cálculo nunca nos dice dónde iría la coma.

Divisiones:

Para realizar divisiones se realizaría de forma inversa, por ejemplo, para hacer **6/3**, tendríamos que hacer coincidir el 6 del D, con el 3 del C, para luego fijarnos con qué cifra del D coincide el 1 del C: **6/3=2**

Cuadrados y raíces cuadradas:

Usamos las letras A y D, con la regla en posición inicial.

La letra A nos muestra el cuadrado del número que visualicemos en la letra D.

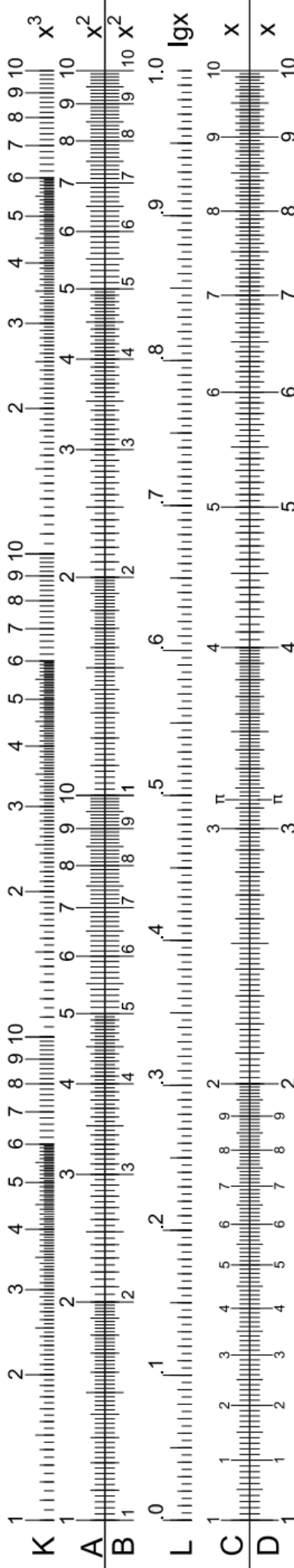
Así mismo, la letra D nos muestra la raíz cuadrada del número que visualicemos en la letra A.

Logaritmos en base 10:

Usamos las letras L y D con la regla en posición inicial.

La letra L nos muestra el logaritmo en base 10 del número que visualicemos en la letra D.

Puedes encontrar más información en divermates.es/blog



PIEZA SUPERIOR DE LA CAPA INTERMEDIA

Debes pegar esta pieza tanto a la pieza superior de la capa superior (regla K-A) como a la base

PIEZA CENTRAL DE LA CAPA INTERMEDIA

Debes pegar esta pieza solo a la parte central de la capa superior (regla B-L-C)

PIEZA INFERIOR DE LA CAPA INTERMEDIA

Debes pegar esta pieza tanto a la pieza inferior de la capa superior (regla D) como a la base