



Cuadernillo de Matemática Aplicada

6° año Economía
2026

ALUMNO/A:

CURSO: 6° Economía

DOCENTE: Sergio Baigorria



CONTRATO PEDAGÓGICO

Espacio curricular: Matemática Aplicada.

Curso: 6° año.

Docente: Prof. Sergio Baigorria.

Orientación: Economía.

El alumno se compromete a:

1. Expresarse respetuosamente con el docente como así también con sus compañeros y con los equipos directivos y personal en general procurando un clima de aula positivo.
2. Ingresar puntualmente a clase tanto al comenzar la clase como al regreso de los recreos.
3. No consumir bebidas, mate o alimentos en horas de clase.
4. Participar activamente en clases, tener buena conducta, que implique entre otras actitudes: no interrumpir al docente o compañeros que están exponiendo, acatar las consignas de trabajo que propone el docente, responsabilizarse por el cumplimiento de las tareas solicitadas por el docente, no charlar o molestar a otros o utilizar elementos que puedan distraer la atención propia y de sus compañeros.
5. Integrarse activamente y con una participación responsable en los proyectos propuestos por el docente.
6. Trabajar en equipo (cuando esta modalidad sea requerida por el docente) de manera colaborativa y responsable, aceptar las diferencias entre los integrantes, ser tolerantes y ayudarse mutuamente para lograr buenos resultados.
7. Comprometerse a estudiar a conciencia diariamente para las clases, para las evaluaciones escritas y orales, y ser responsable con el cumplimiento de las actividades para el aprendizaje.
8. Traer todos los días de clase el cuaderno, no carpeta, y el cuadernillo de la materia, con notas individualizadas junto con el resto de las calificaciones obtenidas, como para la determinación del promedio de cada cuatrimestre, como también es obligatoria su presentación al momento de rendir en las instancias de recuperación. Es indispensable traer los elementos para el aprendizaje.
9. Aceptar, incorporar y cumplir con el material de estudio y actividades que el docente agregue durante el cursado del presente ciclo lectivo, siempre que estén contemplados en la Planificación Anual de Matemática, los cuales serán debidamente notificados con anticipación a las familias y publicados en la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.
10. El estudiante deberá prever que el cuaderno contenga organizados en sus primeras páginas los siguientes contenidos: a- Carátula que indique nombre del estudiante, curso, materia y nombre del docente. b- Evaluaciones corregidas. c- Contenidos desarrollados.
11. En caso de ausencia, aunque sea justificada, pedir y completar la tarea, y hacer lectura del tema visto. La inasistencia a clase no justifica la falta de estudio e incumplimiento en las tareas.
12. Entregar los trabajos (guías, producciones, actividades) en tiempo y forma, colocando apellido y nombre curso, materia y tema desarrollado, en caso de tareas manuscritas, la presentación debe ser prolija, escrituras con tinta de un solo color, con letra clara, sin tachaduras ni borrones, con carátula y en un folio. También dar cumplimiento a lo indicado en este ítem, cuando las consignas de entrega sean por medio digitales. En el caso de tareas realizadas en el cuaderno, deben estar firmadas y fechadas por el docente.
13. No usar dispositivos electrónicos, celulares, auriculares, parlantes, etc., salvo que el profesor lo autorice y requiera para actividades estrictamente pedagógicas.
14. Asistencia a clase con al menos un 75% de asistencia, para los estudiantes que no alcancen este mínimo de asistencias implicará una reducción en la calificación actitudinal (excepto en los casos motivados en temas de salud o razones de fuerza mayor debidamente justificadas).
15. Mantener el aula ordenada y limpia, de no ser así los estudiantes no podrán retirarse hasta tanto dejen el curso en condiciones.
16. Mostrar buena predisposición para colaborar en la organización de los actos escolares cuando sea solicitada su cooperación para este fin.
17. Respetar los tiempos de consulta al docente y que las mismas sean apropiadamente formuladas en los horarios de clase (teniendo en cuenta que el docente no puede repetir temas completos).
18. Presentar las autorizaciones firmadas por los adultos responsables en tiempo y forma en los casos de salidas didácticas o actividades escolares extra-áulicas.

El docente se compromete a:

1. Ser puntual y procurar no faltar a clase.
2. Respetar al estudiante y a su familia.
3. Reconocer al estudiante como un sujeto de derecho que requiere atención y dedicación para alcanzar el desarrollo de sus capacidades a través del proceso de enseñanza y aprendizaje de calidad.
4. Asegurarse que, al término de la clase, el aula quede ordenada y limpia.
5. Generar un ambiente propicio para el aprendizaje incentivando a la participación de cada alumno, a despertar el interés y curiosidad por el conocimiento.
6. Asegurar un trato respetuoso hacia sus estudiantes.
7. Preparar las clases con actividades que promueven el desarrollo de distintas habilidades.
8. Notificar por escrito al menos con una semana de anticipación a la fecha de la evaluación, y posteriormente las calificaciones obtenidas en las evaluaciones.
9. Responsabilizarse por las evaluaciones realizadas por los estudiantes hasta tanto sean devueltas a los interesados.
10. Elaborar consignas claras y explicitar los criterios de evaluación en las pruebas.
11. Ponderar el trabajo del alumno teniendo en cuenta su desempeño y predisposición.
12. Utilizar variedad de recursos didácticos.
13. Proponer proyectos escolares que impliquen la participación de los estudiantes e incentivarlos a intervenir en la organización de los actos escolares.
14. Formular proyectos de articulación entre años y/o niveles de manera de facilitar los aprendizajes.
15. Notificar a los padres sobre el desempeño escolar de sus hijo/a consignando la información en la plataforma en tiempo y forma.
16. Notificar con anticipación a las familias sobre el agregado de material de estudio y actividades al cuadernillo durante el cursado del presente ciclo lectivo, siempre que ya estén contemplados en la Planificación Anual de Matemática, mediante la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.

Los adultos responsables se comprometen a:

1. Revisar con frecuencia el cuaderno de actividades de la materia.
2. Firmar las autorizaciones requeridas por el docente para la asistencia de su hijo/a en la participación de actividades extra áulicas o salidas.
3. Mantenerse atentos a los comunicados del docente y al seguimiento de desempeño académico de su hijo/a. a través de la plataforma institucional y/o cuaderno de comunicaciones.
4. Avisar a preceptores por inasistencias y justificarlas mediante certificados.
5. Asegurarse de que su hijo/a complete las actividades y se informe de lo solicitado cuando no pueda asistir a clase.
6. Dirigirse con respeto al docente, como así también al resto del personal, transmitiendo sus inquietudes por los medios y momentos apropiados.
7. Incentivar a su hijo/a para que estudie y cumpla con sus obligaciones necesarias para el aprendizaje.
8. Asegurarse de que su hijo/a vaya a clase habiendo estudiado los contenidos dados por el docente.
9. Asegurarse y facilitar a que su hijo/a cumpla con los materiales, útiles, cuaderno, uniforme, cuadernillo, fotocopias, etc. cuando sean requeridos y demás elementos de importancia para su bienestar escolar.

.....
Firma
alumno

.....
Aclaración

.....
Firma
adulto responsable

.....
Aclaración

.....
Firma
docente

Prof. Sergio Baigorria
Aclaración

PROGRAMA DE EXAMEN Y ESTUDIO 2026

Curso: 6° año Secundario Orientado.

Orientaciones: Economía y Administración.

ÁREA: Matemática Aplicada

DOCENTE: Prof. Sergio A. Baigorria P.

UNIDAD N°1: Operaciones con números reales e intervalos

Conjuntos numéricos. Operaciones con números reales.

Intervalos de números reales. Clasificación de los intervalos. Representación en la recta numérica y representación coloquial de los mismos.

UNIDAD N°2: Conjuntos

Conjunto: noción de conjunto. Operaciones. Diagrama de Venn.

UNIDAD N°3: Límite y continuidad

Límite: aproximación intuitiva al concepto. Límites laterales. Límite de una función en un punto. Propiedades de los límites. Extensiones del concepto de límite: límite en el infinito, límite infinito en un punto y límite infinito en el infinito. Límites indeterminados: del tipo cero sobre cero e infinito sobre infinito.

Continuidad de una función en un punto. Discontinuidad.

UNIDAD N°4: Derivada

Derivada de una función y su interpretación geométrica. Derivada de una función en un punto. La función derivada. Recta tangente y recta normal. Reglas de derivación. Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos. La noción de derivada aplicada al estudio de fenómenos físicos y químicos y los procesos biológicos.

UNIDAD N°5: Integral

Función primitiva. Integrales indefinidas. Propiedades. Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas.

BIBLIOGRAFÍA

- “Polimodal I” - Ed. Puerto de Palos.



UNIDAD 1: Operaciones con números reales e intervalos

El conjunto de los números reales \mathbb{R}

Los conjuntos numéricos

Números naturales \mathbb{N} :

Los **números naturales** fueron los primeros que utilizó el ser humano **para contar objetos**. El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos y se simboliza:

$$\mathbb{N} = 1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

Los puntos suspensivos indican que **en \mathbb{N} no hay último elemento**, pero **sí existe primer elemento que es el número 1** y además todo número natural, llamémosle x , tiene su número natural consecutivo o siguiente, $x + 1$.

Al conjunto de los **naturales con el cero incluido**, se simboliza:

$$\mathbb{N}_0 = 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

Los números naturales constituyen un **conjunto cerrado para las operaciones de suma y multiplicación** ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, **el resultado siempre será un número natural**. Por ejemplo:

$$5 + 6 = 11 \quad \leftarrow \text{Sumo números naturales y obtengo un número natural.}$$

$$8 \cdot 5 = 40 \quad \leftarrow \text{Multiplico números naturales y obtengo un número natural.}$$

No ocurre lo mismo, en cambio, con la **resta**; por ejemplo:

$$8 - 3 = 5 \quad \leftarrow \text{Obtengo un número natural, pero}$$

$$3 - 8 = -5 \quad \leftarrow \text{no es un número natural.}$$

Como consecuencia de ello, surgen los **números negativos**.

Números enteros \mathbb{Z} :

Los **números enteros** **abarcan a los números naturales, el cero y a los números negativos**.

$$\mathbb{Z} = \dots; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

Todo número natural es un número entero.

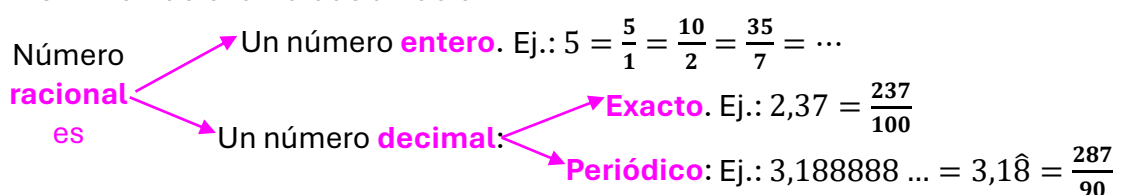
Los números enteros permiten expresar cantidades negativas como un saldo deudor en una cuenta bancaria, un año de la era antes de Cristo, el número de una planta del sótano de un edificio, la representación de profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

El conjunto de los números enteros es un **conjunto cerrado para la suma, la resta y el producto**; sin embargo, la división de dos números a/b no siempre es un número entero. Por eso surge el conjunto de los **números fraccionarios o racionales**.

Números racionales \mathbb{Q} :

Se llama **número racional** a **todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero**, o sea, como fracción.

El término «racional» alude a «ración».



Números irracionales:

Los números decimales que **tienen infinitas cifras no periódicas**, se denominan **números irracionales**: π ; $\sqrt{2}$; e ; $\sqrt{3}$; etc.

No un símbolo único para anotar a este conjunto, pero se suele escribir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que significa “los reales menos los racionales”.

Números reales \mathbb{R} :

El **conjunto formado por los números irracionales y racionales** es el conjunto de los **números reales**.

Todo número natural es un número entero.

Todo número entero es un número racional.

Todo número racional es un número real.

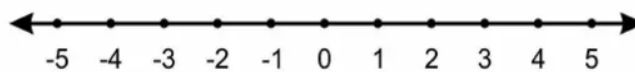
Todo número irracional es un número real.

Representación gráfica de los números reales

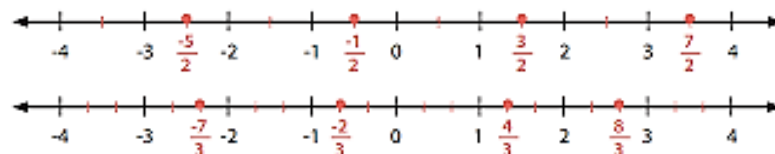
Los números reales se representan geoméricamente en la recta numérica, esto es, se indica sobre una recta un punto fijo **O** que se llama **origen** y que corresponde al número real cero.

Considerando un segmento unitario como unidad de medida, a la derecha de **O** se indican los puntos que corresponden a los números reales positivos (\mathbb{R}^+) y a la izquierda de **O** los puntos que corresponden a los números reales negativos (\mathbb{R}^-).

De esta manera, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta, un único número real.



Para representar gráficamente un número fraccionario en la recta numérica, se divide la unidad en tantas partes como lo indique el denominador de la fracción y luego se toman tantas partes de la subdivisión como lo indique el numerador.



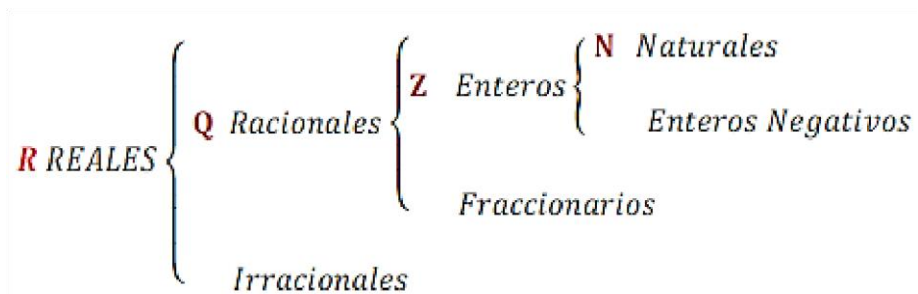
Para tener en cuenta:

*Entre dos naturales siempre hay un número **finito** de naturales entre ellos.*

*Entre dos números enteros hay un número **finito** de enteros entre ellos.*

*Entre dos números racionales hay **infinitos** racionales entre ellos.*

*Entre dos números reales hay **infinitos** reales entre ellos.*



Números complejos \mathbb{C} :

Al tratar de resolver igualdades como $x^2 + 4 = 0$, aparecen expresiones como $\sqrt{-4}$ que no es posible resolver en el conjunto de los números reales, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a -4 . Por ello surgieron los **números imaginarios** para que sea posible la radicación de números reales negativos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$$

Se denomina **unidad imaginaria** a: $i = \sqrt{-1}$ y es tal que $i^2 = -1$.

Los **números complejos** son combinaciones algebraicas de números reales con números imaginarios.

Todo número **natural**
 Todo número **entero**
 Todo número **racional**
 Todo número **irracional**
 Todo número **real**

} es un número **complejo**.

Actividades

1. Dar un ejemplo de un número:

a) Entero no natural:

b) Real no entero:

c) Fraccionario entero:

d) Racional:

2. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) 0 es un número natural.

b) 6 es un número entero.

c) $\sqrt[3]{-2}$ es un número real.

d) -5 es un número racional.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un número racional.

f) $\sqrt{-1}$ es un número real.

g) $(-3)^2$ es un número natural.

h) 1,3 es un número irracional

i) Con los elementos de \mathbb{Q} se puede medir cualquier longitud.

3. Marca con una cruz el o los conjuntos numéricos a los que pertenece cada número:

	2	$-\frac{7}{5}$	0,5	$\sqrt{3}$	0	e	$1, \hat{3}$
\mathbb{N}							
\mathbb{Z}							
\mathbb{Q}							
$\mathbb{I}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$							
\mathbb{R}							

	-1	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{4}$	$90,768\hat{1}$	π	$-\frac{9}{8}$	2,7
\mathbb{N}							
\mathbb{Z}							
\mathbb{Q}							
$\mathbb{I}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$							
\mathbb{R}							

Operaciones con números reales

Dada la importancia que tiene operar correctamente con números reales y en vista de los inconvenientes que suelen presentarse en este sentido, se recuerdan algunas reglas básicas para realizar operaciones, especialmente aquellas que involucran números fraccionarios.

Suma

- Con igual denominador

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{con } b \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3}$$

- Con distinto denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \quad \text{con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

o bien

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(m:b)a + (m:d)c}{m} \quad \text{con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

donde m es el múltiplo común menor de b y d .

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$$

Producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{21}$$

Cociente

$$\frac{a}{b} \mid \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{con } b \neq 0, d \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} \mid \frac{2}{7} = \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

Potenciación

Se recuerda que

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El número a recibe el nombre de base, y n es el exponente.

Si el exponente es negativo:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Radicación

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a, \quad n \in \mathbb{N}$$

El número a recibe el nombre de radicando, n es el índice y el símbolo $\sqrt{\quad}$ se llama radical. En la radicación de números reales, si el índice n es par, el radicando a debe ser mayor o igual que cero, de lo contrario el resultado no es un número real.

Se recuerda que:

- Si n es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si n es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Propiedades de las operaciones definidas en \mathbb{R}

Se presenta a continuación un listado de las principales propiedades de las operaciones con números reales.

Propiedades de la suma

Conmutativa: $a + b = b + a$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Elemento neutro: 0 (cero) tal que $a + 0 = a$

Opuesto aditivo: cada número real a tiene su opuesto aditivo $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$

Propiedades del producto

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Elemento neutro: 1 (uno) tal que $a \cdot 1 = a$

Recíproco: cada número real $a \neq 0$ tiene su inverso multiplicativo o recíproco $\left(\frac{1}{a}\right)$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Propiedad distributiva que combina las operaciones de suma y producto

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$


$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

Esta última igualdad, considerando el recíproco de c , también puede expresarse como producto, del siguiente modo:

$$(a + b) \cdot \frac{1}{c} = a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$(a - b) : c = a : c - b : c \quad \text{o bien} \quad (a - b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Propiedades de la potenciación y de la radicación

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n, \quad b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$	Mismos exponentes n (arriba)	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$	Mismos índices n (arriba)
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$	Mismas bases a (abajo)		
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	Potencia de potencia	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	Raíz de raíz
Potencia de raíz o raíz de potencia $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}. \text{ En particular } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$			

Ejercicios

4. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones (busca las respuestas en las propiedades):

a. $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

b. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

c. $\sqrt{(-3)^2} = 3$

d. $a^n + a^n = a^{2n}$

e. $a^n \cdot a^n = a^{2n}$

f. $a^n \cdot a^n = a^{n^2}$



5. Unir con flechas según corresponda:

$$x + x$$

$$2x^2$$

$$x \cdot x$$

$$2x$$

$$2 \cdot x \cdot 3 \cdot x$$

$$4x^2$$

$$x^2 + x^2$$

$$6x^2$$

$$2 \cdot x + 4 \cdot x$$

$$(2x)^3$$

$$(2x)^2$$

$$6x$$

$$2 \cdot x \cdot 4 \cdot x^2$$

$$x^2$$



6. Aplica propiedades:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} =$

b) $z^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-3} \cdot z^5 =$

c) $3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 3 =$

d) $b^5 : b^2 =$

e) $\frac{y^6}{y^7} =$

f) $\frac{5^3}{(7-2)^3} =$

g) $(2^2)^3 =$

h) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{-1} =$

7. Aplicar las propiedades adecuadas y encontrar la forma más simple posible para expresar el resultado de:

a. $(p^2)^3 \cdot (p^3 p^5)^2 =$

b. $\left(\frac{0}{x^{11}}\right) + \left(\frac{x^9}{x^7}\right) + x^3 x - \frac{x^4}{3} =$

c. $\left[(u^{-8})^2 \mid (u^5)^{-3} \right] u^4 =$

d. $\sqrt[3]{(-81)y^9} \mid \sqrt[3]{(-3)y^6} =$

e. $\left(\frac{x^{-\frac{3}{2}} x^9}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} =$

f. $\frac{x^2 (x^3)^{-1} x^{\frac{2}{3}}}{x \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}} =$

g. $\frac{\sqrt[3]{25^{-1} \mid \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}}{\sqrt[3]{25 \cdot 5}} =$

h. $\frac{\sqrt{a b^2} \cdot \sqrt{a^3 b}}{\sqrt{a b}} =$

8. Un alumno del cursillo de ingreso resolvió los siguientes ejercicios y han sido corregidos como CORRECTOS. Justificar la calificación en cada caso.

a. $(x^2y)^3 \mid (xy)^2 = x^4y$

b. $\left(\frac{x^r}{y^{2s}} \left(\frac{x^{2r}}{y^{3s}} \right)^{-2} \right)^{-2} = \frac{x^{6r}}{y^{8s}}$

9. Para los siguientes ejercicios indicar con una cruz cuál es el resultado correcto. Mostrar los cálculos realizados para determinarlo.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3} - 1\right) + \frac{3}{5} \mid 3 - 2 =$

$-\frac{7}{15}$

$\frac{29}{15}$

b. $\left[4 \cdot \left(\frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{5} \right) \right] - \left(\frac{5}{3} - 2 \right) : \left(-\frac{1}{3} \right)^2 - 2^{-2} =$

$-\frac{1}{2}$

$\frac{11}{4}$

c. $\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right) \right] : \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot 3^{-3} \right] - \left(5 \cdot \frac{7}{8} \right)^0 =$

$\frac{2}{3}$

2

d. $\sqrt{2 + \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) : \left(2 - \frac{1}{6} \right) \right]^2} =$

2

$\frac{3}{2}$

e. $\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{5} \right)^{-2} + 3^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-1}} + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{3} \right) =$

$-\frac{5}{6}$

$-\frac{11}{6}$

10. Resuelve las siguientes operaciones e indica el conjunto al que pertenece el resultado:

a) $[4^3 - 5(8+2)] : 7 =$

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} =$

c) $4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{3} =$

d) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{5}} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}} =$

f) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{4}} =$

g) $\frac{11 \cdot (-3)^2 + 5^0}{7^2 + 1} + 1^3 - 3 =$

h) $\frac{-\frac{1}{5} + \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{-3}$

i) $-\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{2}}\right)$

j) $\sqrt{\frac{5}{4} + 1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^0 : 2 =$

k)

$\sqrt{2^2 \cdot 3^2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} + \left(3 - \frac{1}{2} \div \frac{1}{6}\right)$

l) $\left[-\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \frac{1}{3}\right] : \left[\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right] + 1 =$

m)

$\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \sqrt[3]{-1 + \frac{7}{8}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

n) $\sqrt{(-1) \left(\frac{3}{4} - 1\right)} + (-2) \cdot (2)^{-2} + \left(1 - \frac{1}{2} : 2\right) =$

11. Aplica las propiedades de potenciación y radicación para simplificar:

a) $x^6 \cdot x^{-5} \cdot x^{-7} =$

b) $y^2 \cdot y^{2/4} \cdot y^{3/8} =$

c) $(6^4)^7 =$

d) $(9^{-5})^{-2} =$

e) $\left(x^{2/3}\right)^2 =$

f) $(6tre)^4 =$

g) $(zw)^{5/6} =$

h) $\left(\frac{8}{3}\right)^6 =$

i) $\left(\frac{t}{2}\right)^{-2} =$

j) $\left(\frac{8^9}{8^3}\right) =$

k) $\left(\frac{7^{-5}}{7^{-3}}\right) =$

l) $\left(\frac{z^{7/3}}{z^{7/3}}\right) =$

12. Utiliza las propiedades de la potenciación para simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

$$a) \frac{(3x^3y^4)(4xy^5)}{(-2xy^2)^3} =$$

$$b) \frac{(2a^2b^3c)^4}{4b^2c} =$$

$$c) \left(\frac{2r^3}{s}\right)^4 \left(\frac{s^2}{r^3}\right)^3 =$$

$$d) (u^{-2}v^{-3})^{-3} =$$

$$e) (-2x^{1/2}y^{1/3})^6 (3x^{1/2}y)^4 =$$

13. Usa propiedades para simplificar:

$$a) (5z^2y^3)(6zy^4) =$$

$$b) (7x^2y^{-4})(-3x^2y^3)^2 =$$

$$c) (-3a^4b^2c)^5 =$$

$$d) \left(\frac{3x^4}{y}\right)^4 \left(\frac{y}{x^2}\right)^3 =$$

$$e) (z^{-4}w^2)^{-5} =$$

$$f) \frac{(-6x^2y^{-4})^2 (-2xy)^3}{4(xy^2)^2} =$$

$$g) \frac{(2x^{1/4}y^{1/3})(3x^2y^3)^2}{(-2x^{1/2}y)^4} =$$

Racionalización de denominadores

A veces, cuando se resuelven cálculos o problemas se obtienen fracciones con números irracionales en los denominadores como, por ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt[3]{4}}; \frac{1}{3+\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}; \text{ etc.}$$

Para transformar estas fracciones en otras equivalentes, pero con denominadores racionales, se usa un procedimiento llamado **racionalización**.

A continuación, se recordarán algunas reglas para racionalizar denominadores, aunque actualmente se utiliza cada vez menos este procedimiento debido a que se cuenta con calculadoras y computadoras que facilitan los cálculos.

Se considerarán los siguientes casos de racionalización de denominadores:

a. El denominador es un radical único irreducible de índice 2.

Ejemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



Se multiplica numerador y denominador de la fracción por el mismo radical del denominador.

b. El denominador es un radical único irreducible de índice distinto de 2.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

En general, para racionalizar una fracción de la forma:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}, \text{ con } b \neq 0$$

se procede como sigue:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

c. El denominador es un binomio de la forma

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \text{ ó } a \pm \sqrt{b} \text{ ó } \sqrt{a} \pm b.$$

Para comprender el procedimiento a usar en este caso, se debe tener en cuenta que

$$(p+q) \cdot (p-q) = p^2 - p \cdot q + q \cdot p - q^2 = p^2 - q^2, \text{ con } p, q \in \mathbb{R}.$$



Ejemplo:

$$\frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = \frac{4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -4 \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

Se puede observar que se ha multiplicado el numerador y el denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador.

Ejercicios

14. Racionaliza: (primer caso):

a) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^2}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt[5]{4^3}}$

c) $\frac{2}{\sqrt[5]{3}}$

d) $\frac{3}{\sqrt[6]{2^2}}$

e) $\frac{5}{3\sqrt[4]{2}}$

15. Racionaliza: (segundo caso):

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\text{c) } \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

16. Indicar si las siguientes igualdades son correctas o incorrectas y justifica tu respuesta.

$$\text{a. } \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{2}$$

$$\text{b. } (\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+3) = \sqrt{6}$$

$$\text{c. } \frac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{d. } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = 0$$

$$\text{e. } \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{6}$$

17. Obtener una expresión equivalente sin radicales en el denominador: (Racionalizar los denominadores).

$$\text{a. } \frac{2 \cdot \sqrt{3} - 2}{2 \cdot \sqrt{3} + 2} =$$

$$\text{b. } \frac{5}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} =$$

18. Resuelve:

$$\text{a) } y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{2}{3}} =$$

$$\text{c) } \frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^n}{2^n + 2 \cdot 2^{n-1}}$$

$$\text{e) } \sqrt[3]{3x^3 - 4x^3 + \frac{7}{8}x^3} =$$

$$\text{b) } \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x\right) \cdot 3x =$$

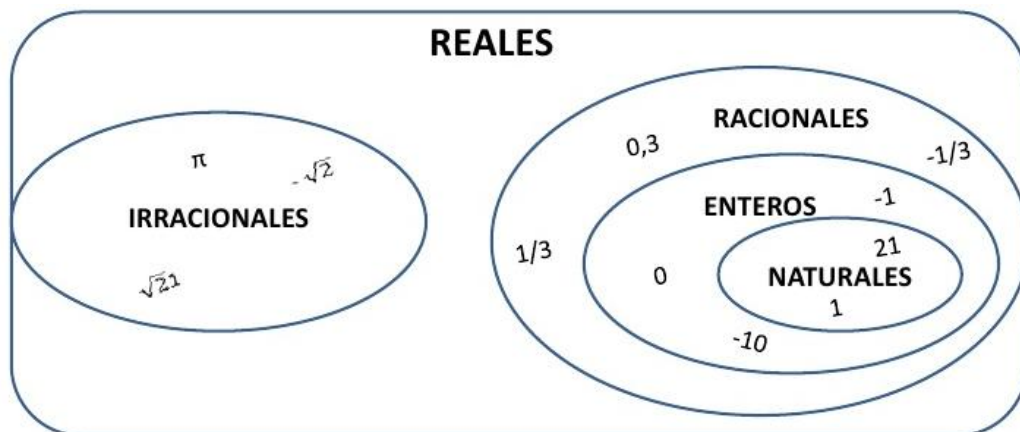
$$\text{d) } \frac{2^{n+1}}{(2^n)^n \cdot 2^{-1}} \div \frac{2 \cdot 2^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$$

$$\text{f) } \frac{(x^2)^3 \cdot y^2 \cdot y^3 \cdot z^0}{\sqrt[3]{x^3} \cdot y^4} =$$

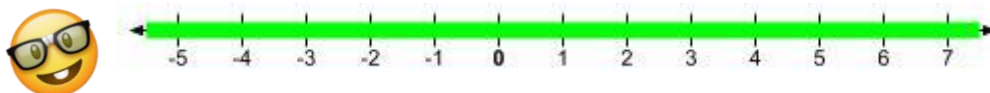
Intervalos

Conjunto de los números reales \mathbb{R} en la recta numérica

Recordemos que los números reales surgen de la necesidad de reunir los números racionales y los números irracionales en un solo conjunto.



Dicho conjunto de los números reales completa la recta numérica. A cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica.



Intervalo

Un **intervalo** es una “porción” de la recta numérica que se identifica por sus dos extremos.

Veamos algunos ejemplos:

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
[2;5] cerrado	$x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 5$	
“x pertenece (\in) a \mathbb{R} (conjunto de los números reales), tal que ($/$, o de manera que) x sea mayor o igual a 2 y sea menor o igual a 5” (o sea que x puede valer 2 o 5 o algún valor entre medio).” Observa que los corchetes indican x puede tomar el valor de ambos extremos.		

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
(-2;3) abierto	$x \in \mathbb{R} / -2 < x < 3$	
“x pertenece (\in) a \mathbb{R} (conjunto de los números reales), tal que ($/$, o de manera que) x sea mayor a -2 y sea menor a 3” (o sea que x puede valer algún valor entre -2 y 3, pero no 2 ni 3).” Observa que los paréntesis indican que x no puede tomar el valor de ambos extremos.		

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
$(-1;4]$ semiabierto a izquierda (o semicerrado a derecha)	$x \in \mathbf{R} / -1 < x \leq 4$	
<p>“x pertenece (\in) a \mathbf{R} (conjunto de los números reales), tal que ($/$, o de manera que) x sea mayor a -1 y sea menor o igual a 4” (o sea que x no puede valer -1, pero sí puede valer algún valor entre -1 y 4, o valer 4).” Observa que en este ejemplo, el paréntesis indica que x no podrá valer -1; luego, el corchete indica que x sí puede llegar a valer 4.</p>		

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
$(-2;\infty)$ infinito	$x \in \mathbf{R} / -2 \leq x$	
<p>“x pertenece (\in) a \mathbf{R} (conjunto de los números reales), tal que ($/$, o de manera que) x sea mayor o igual a -2.” Observa que el corchete indica que x puede tomar el valor -2. Por otra parte, al no tener este intervalo un extremo derecho, la x puede llegar a valer “infinito”. Del lado del “infinito”, siempre va un paréntesis.</p>		



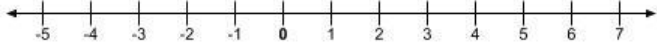
Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
$(-\infty;4]$ infinito	$x \in \mathbf{R} / x < 4$	
<p>“x pertenece (\in) a \mathbf{R} (conjunto de los números reales), tal que ($/$, o de manera que) x sea menor a 4.” Observa que el paréntesis indica que x no puede tomar el valor 4. Al no tener un extremo derecho, la x puede llegar a valer “infinito”. Del lado del “infinito”, siempre va un paréntesis.</p>		

Ejercicios

19. Completa el siguiente cuadro:

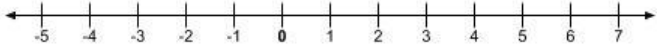


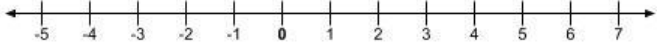


Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
$[-4;3]$	$x \in \mathbf{R} / -4 \leq x \leq 3$	
	$x \in \mathbf{R} / -1 \leq x \leq 2$	
$(1;5)$	$x \in \mathbf{R} / 1 < x < 5$	
$(-5;2)$		
$[-4;0)$	$x \in \mathbf{R} / -4 \leq x < 0$	
	$x \in \mathbf{R} / -2 < x \leq 4$	

Continúa:

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
	$x \in \mathbf{R} / 0 \leq x$	
		
$(-\infty; -1)$		

Recuerda que el **corchete** indica que x puede tomar el valor de ese extremo; el paréntesis indica que x no puede tomar el valor de ese extremo. En el caso que falte un extremo, se interpreta que x puede tomar valores infinitos (negativos o positivos) y se coloca un paréntesis junto al ∞ (infinito).

20. Completa también este otro cuadro:

Intervalo	Expresión simbólica	Representación gráfica
$[-1; 4]$	$x \in \mathbf{R} / -1 \leq x \leq 4$	
	$x \in \mathbf{R} / 1 \leq x < 5$	
$[-2; \infty)$		
	$x \in \mathbf{R} / -5 < x \leq 3$	
$(-3; 2)$		
		



UNIDAD 2: Conjuntos

Definiciones

Conjunto

Un **conjunto** es un grupo de elementos u objetos especificados en tal forma que se puede afirmar con certeza si cualquier objeto dado pertenece o no a la agrupación.

Para denotar a los conjuntos, se usan letras mayúsculas: A, B, C.

Cuando un elemento x_1 **pertenece** a un conjunto A, se expresa de forma simbólica como:

$$x_1 \in A$$

En caso de que un elemento y_1 **no** pertenezca a este mismo conjunto se utiliza la notación:

$$y_1 \notin A$$

Formas de enunciar conjuntos

Existen cuatro formas de enunciar a los conjuntos:

1) **Por extensión o enumeración:** los elementos son encerrados entre llaves y separados por comas. Es decir, el conjunto se describe listando todos sus elementos entre llaves sin repetirlos. Por ejemplo:

$$A = \{1; 2; 3\}$$

2) **Por comprensión:** los elementos se determinan a través de una condición que se establece entre llaves. En este caso, se emplea el símbolo / que significa "tal que". En forma simbólica es:

$$C = \{x/P(x)\}$$

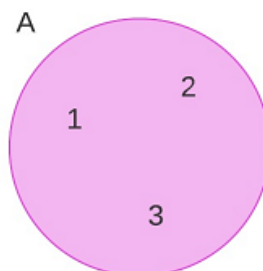
que significa que el conjunto C es el conjunto de todos los elementos x tales que la condición P(x) es verdadera.

Por ejemplo:

Por extensión	Por comprensión
$A = \{1; 2; 3\}$	$A = \{x/x \text{ es un número natural menor que } 4\}$ O usando notación puramente matemática: $A = \{x/x \in N \wedge x < 4\}$ que se lee "el conjunto A formado por los elementos x tal que x pertenezca al conjunto de los números naturales y que x sea menor que 4". El símbolo \wedge significa "y".

3) **Diagramas de Venn:** son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto o las relaciones entre conjuntos.

Por ejemplo:



4) **Por descripción verbal:** Es un enunciado que describe la característica que es común para los elementos.

Por ejemplo:

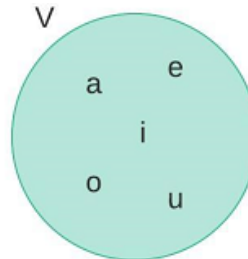
Dado *el conjunto de las letras vocales*, expresarlo por extensión, comprensión y por diagrama de Venn.

Solución:

Por extensión: $V = a; e; i; o; u$

Por comprensión: $V = x/x \text{ es una vocal}$

Por diagrama de Venn:



Ejercicios

1. Expresar por comprensión y por diagrama de Venn:

$$A = 1; 3; 5; 7; 9$$

$$B = p; r; o; e$$

2. Expresar por extensión y por diagrama de Venn:

$$C = x/x \text{ es número primo menor que } 10$$

$$D = x/x \text{ es color primario}$$

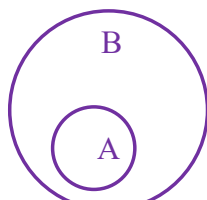
3. Dado *el conjunto formado por todos los planetas del Sistema Solar*, expresarlo por extensión, comprensión y por diagrama de Venn.

Subconjunto

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento del conjunto B , se dice que A es un **subconjunto** de B . Su notación $A \subset B$ significa que A está **incluido** en B y se lee: “ A es subconjunto de B ” o se lee “ A está contenido en B ”.

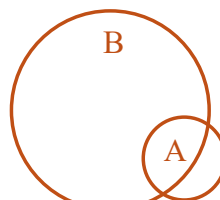
Si no todos los elementos de un conjunto A son elementos del conjunto B , se dice que A **no es subconjunto** de B . En este caso la notación $A \not\subset B$ significa que A no es un subconjunto de B .

Gráficamente, esto es:



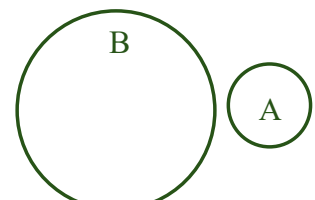
$$A \subset B$$

$$B \not\subset A$$



$$A \not\subset B$$

$$B \not\subset A$$

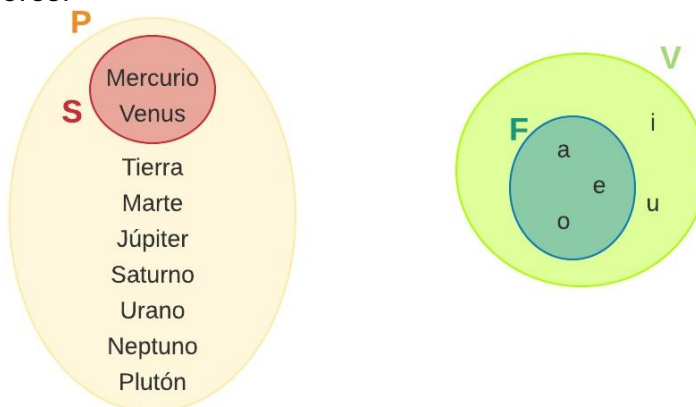


$$A \not\subset B$$

$$B \not\subset A$$

Para simplificar los ejemplos con diagramas de Venn, no se anotan los elementos dentro de los conjuntos.

En los ejemplos anteriores:



Si $S = \text{Mercurio; Venus}$ es el conjunto de planetas que no poseen satélites, entonces se cumple que:

$$S \subset P$$

Si $F = \{a; e; o\}$ es el conjunto de las vocales fuertes o abiertas, entonces se cumple que:

$$F \subset V$$

De la misma forma, nótese como:

$$F \not\subset P$$

$$S \not\subset V$$

$$F \not\subset S$$

$$S \not\subset F$$

(El conjunto de vocales V y el conjunto de planetas P no tienen elementos comunes entre sí así que no pueden estar incluidos o ser subconjuntos).

Cardinalidad

La **cardinalidad** de un conjunto se define como el número de elementos que posee. Se denota por medio de los símbolos η o $\#$.

De los conjuntos anteriores:

$$\eta(P) = 9$$

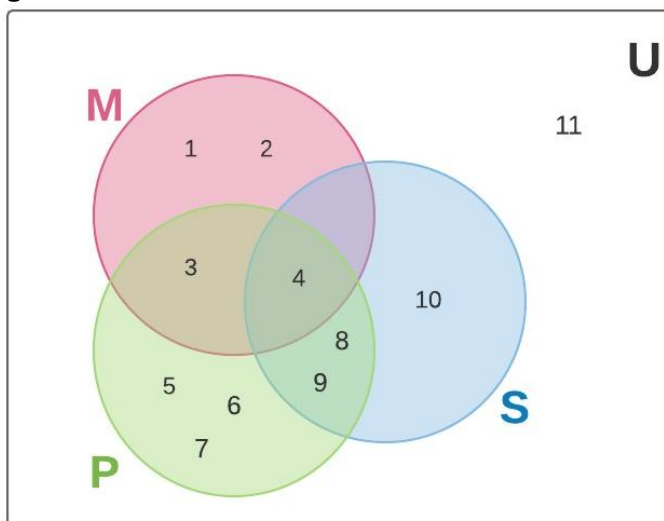
$$\eta(S) = 2$$

$$\eta(V) = 5$$

$$\eta(F) = 3$$

Ejercicio

4. Dado el siguiente diagrama de Venn:



Se pide:

- a) $\eta(M) =$
- b) $\eta(P) =$
- c) $\eta(S) =$
- d) $\eta(U) =$

5. Luego, expresar los conjuntos por extensión.

Conjuntos con nombres específicos

Un **conjunto vacío o nulo** es aquel que no posee elementos. Se denota por: \emptyset o bien por $\{\}$. El conjunto vacío siempre forma parte de otro, así que es subconjunto de cualquier conjunto.

Ejemplos:

- $\emptyset = x/x$ son los dinosaurios que viven en la actualidad
- $= x/x$ son los hombres mayores de 300 años
- $\emptyset = x/x$ son números positivos menores que cero

Un **conjunto universal** es aquel que contiene a todos los elementos bajo consideración. Se denota por **U**. Gráficamente se le representará mediante un rectángulo:



Ejemplo:

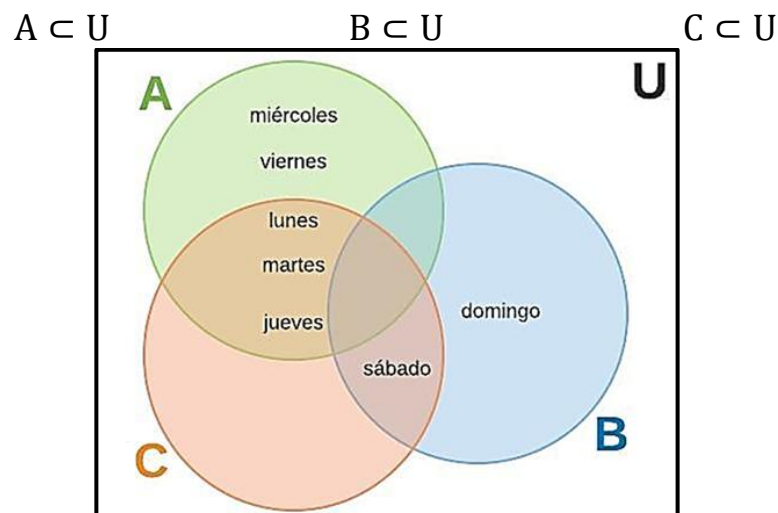
Por comprensión:

- $U = x/x$ son los días de la semana =
- $A = x/x$ son los días de la semana inglesa
- $B = x/x$ son los días del fin de semana
- $C = x/x$ son los días de la semana con menos de siete letras

Por extensión:

- $U =$ lunes; martes; miércoles; jueves; viernes; sábado; domingo
- $A =$ lunes; martes; miércoles; jueves; viernes
- $B = \{\text{sábado; domingo}\}$
- $C =$ lunes; martes; jueves; sábado

Observa en el diagrama de Venn:



Un **conjunto finito** es aquel cuyos elementos pueden ser contados.

Ejemplo:

$$D = x/x \text{ es el número de días del mes de junio}$$

$$E = x/x^2 = 4$$

$$F = x/x \text{ es la cantidad de autos en la ciudad de San Juan}$$

Un **conjunto infinito** es aquel cuyos elementos no pueden ser contados, es decir, su cardinalidad no está definida.

Ejemplo:

$$G = 1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots$$

$$H = 2; 4; 6; 8; 10; 12; \dots$$

$$J = x/x \text{ es la cantidad de puntos en una línea}$$

Ejercicio

6. Da ejemplos de

- Un conjunto finito
- Un conjunto infinito

Pares de conjuntos

Dos conjuntos son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos.

Se denota por el símbolo $=$.

Ejemplo:

$$R = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0$$

$$S = x/x \text{ es un dígito}$$

Entonces:

$$R = S$$

Dos conjuntos son **desiguales** si por lo menos difieren en un elemento, es decir, si no tienen exactamente los mismos elementos. Se denota por el símbolo \neq .

Ejemplo:

$$D = x/x^2 = 9$$

$$E = -2; 2$$

Entonces:

$$D \neq E$$

Dos conjuntos son **equivalentes** si tienen la misma cantidad de elementos, es decir, si poseen la misma cardinalidad. Se denota por el símbolo \approx .

Ejemplos:

$$W = x/x \text{ son las estaciones del año}$$

$$Z = x/x \text{ es un punto cardinal}$$

$$\eta(W) = 4$$

$$\eta(Z) = 4$$

Entonces:

$$W \approx Z$$

Ejercicio

7. Da un ejemplo, expresando cada uno por diagrama de Venn y por extensión, de:
- Un par de conjuntos iguales
 - Un par de conjuntos desiguales
 - Un par de conjuntos equivalentes (que no sean un par de conjuntos iguales)

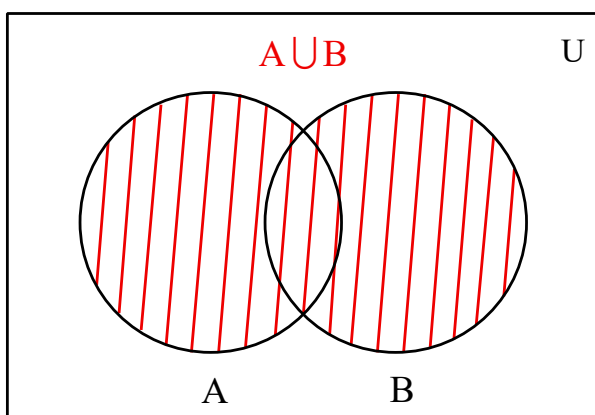
Operaciones con conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de A con todos los elementos de B sin repetir ninguno y se denota como $A \cup B$. Esto es:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

El símbolo \vee significa "o"

Gráficamente:



Ejemplo:

A = mango; ciruela; uva; naranja; manzana; sandía

B = durazno; melón; uva; naranja; sandía; plátano

$A \cup B$ = mango; ciruela; uva; naranja; manzana; sandía; durazno; melón; plátano

Ejercicio

8. Dados los conjuntos:

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$A = \{1; 2; 5; 7; 9\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9\}$

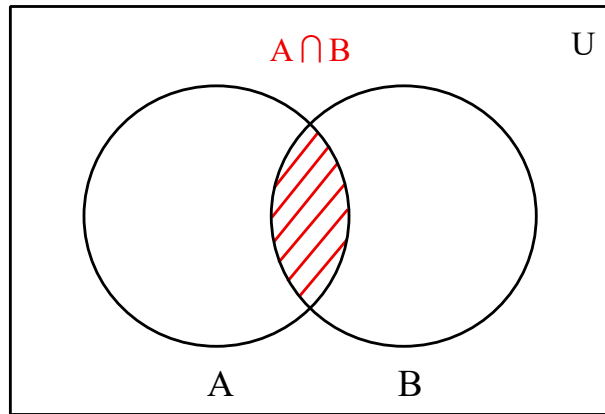
- Realiza un diagrama de Venn y expresa $A \cup B$.
- Escribe por extensión $A \cup B$.

La **intersección** de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos de A que también pertenecen a B y se denota como $A \cap B$. Esto es:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

El símbolo \wedge significa "y"

Gráficamente:



Ejemplo:

A = mango; ciruela; uva; naranja; manzana; sandía

B = durazno; melón; uva; naranja; sandía; plátano

$A \cap B$ = uva; naranja; sandía

Nos faltaba una definición para **pares de conjuntos**

Dos conjuntos son **ajenos o disjuntos** cuando su intersección es el conjunto vacío, es decir, que no tienen nada en común.

Por ejemplo:

A = mango; ciruela; uva; naranja; manzana; sandía

E = limón; fresa; pera; mandarina; cereza

Entonces:

$$A \cap E = \emptyset$$

Ejercicio

9. Dados los conjuntos:

$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$A = \{1; 2; 5; 7; 9\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9\}$

$C = \{3; 6; 8\}$

Se pide:

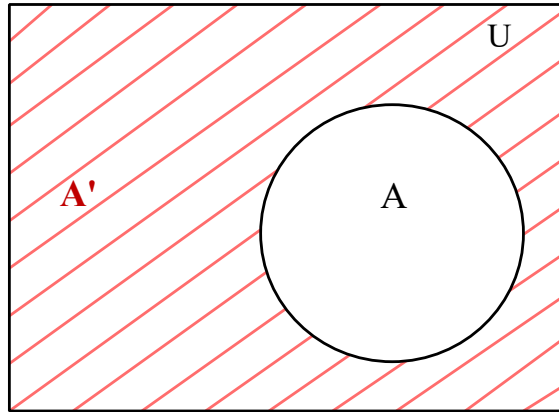
- Realiza un diagrama de Venn y expresa $A \cap B$.
- Escribe por extensión $A \cap C$.

El **complemento** del conjunto A con respecto al conjunto universal U es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A y se denota como A' . Esto es:

$$A' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$

El símbolo \wedge significa "y"

Gráficamente:



Ejemplo.

U = mango; kiwi; ciruela; uva; pera; naranja; cereza; sandía; limón; melón

A = mango; ciruela; uva; naranja; sandía

A' = kiwi; pera; cereza; limón; melón

Ejercicio

10. Dados los conjuntos:

U = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

A = 1; 2; 5; 7; 9

B = 1; 2; 3; 4; 6; 9

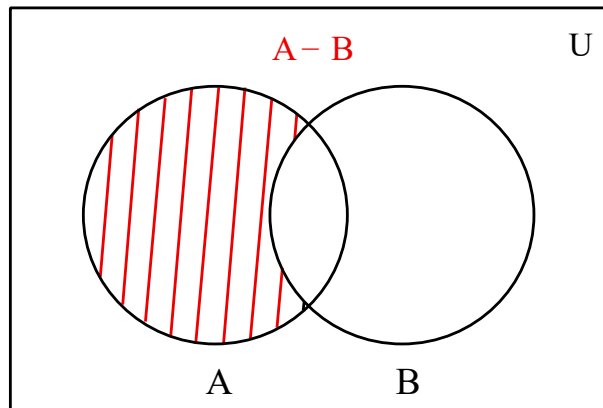
Realizar dos diagramas de Venn y expresar en uno A' y en el otro B'.

La **diferencia** de los conjuntos A y B (en ese orden) es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y se denota como $A - B$. Esto es:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

El símbolo \wedge significa "y"

Gráficamente:



Ejemplo.

A = mango; ciruela; uva; naranja; manzana; sandía

B = durazno; melón; uva; naranja; sandía; plátano

A - B = mango; ciruela; manzana

B - A = durazno; melón; plátano

Se puede advertir cómo

$$A - B \neq B - A$$

Ejercicio

11. Dados los conjuntos:

U = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

A = 1; 2; 5; 7; 9

$$B = 1; 2; 3; 4; 6; 9$$

- Realiza un diagrama de Venn $A - B$.
- Realiza un diagrama de Venn $B - A$.
- Escribe por extensión $A - B$ y $B - A$.

Ejemplos de operaciones con conjuntos

Sean los conjuntos:

$$U = a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m; n$$

$$A = a; d; e; g; h; k; l; n$$

$$B = a; c; f; g; k; l; m$$

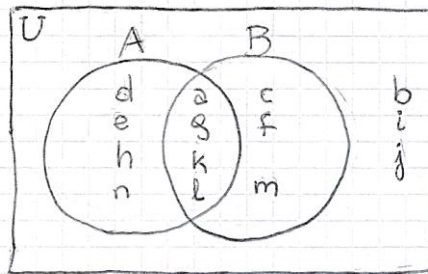
Obtener:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- A'
- B'
- $A - B$
- $B - A$

Solución:

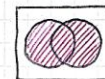
Una forma práctica de visualizar las soluciones es mediante alguna disposición de los elementos escritos por extensión de manera de ver qué elementos tienen, o no, en común los conjuntos (encolumné los elementos comunes). También es práctico hacer diagramas de Venn.

$$\begin{array}{l}
 U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\} \\
 A = \{a, \quad d, e, \quad g, h, \quad k, l, \quad n\} \\
 B = \{a, \quad c, \quad f, g, \quad k, l, \quad m\}
 \end{array}$$



Hecho esto, ya podemos trabajar para obtener las soluciones, primero por extensión y a la derecha con diagrama de Venn:

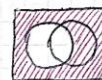
$$\textcircled{a} A \cup B = \{a; c; d; e; f; g; h; k; l; m; n\}$$



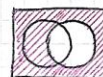
$$\textcircled{b} A \cap B = \{a; g; k; l\}$$



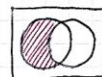
$$\textcircled{c} A' = \{b; c; f; i; j; m\}$$



$$\textcircled{d} B' = \{b; d; e; h; i; j; n\}$$



$$\textcircled{e} A - B = \{d; e; h; n\}$$



$$\textcircled{f} B - A = \{c; f; m\}$$



Ejercicios

12. Dados los conjuntos:

$$U = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$A = 1; 2; 3; 4; 8; 9$$

$$B = 1; 3; 4; 5; 6; 9$$

Realizar, por extensión, las siguientes operaciones con conjuntos:

a) $A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$

b) $A \cap B = \{ \quad \quad \quad \}$

c) $B - A = \{ \quad \quad \quad \}$

d) $A - B = \{ \quad \quad \quad \}$

13. Realizar, en diagramas de Venn, las siguientes operaciones con conjuntos:

a) $A - B$

b) $A \cup B$

c) $A - B$

d) A'

14. Dados los conjuntos:

$$U = a; e; i; o; u; m; z$$

$$S = x/x \text{ es una vocal abierta}$$

$$T = m; u$$

$$P = a; i; u; z$$

Realizar, por extensión y por diagrama de Venn, las siguientes operaciones:

a) $S \cup T =$

b) $T \cup P =$

c) $S \cap T =$

d) $T \cap P =$

e) $P - T =$

f) $T - S =$

g) $S' =$

h) $T' =$

i) $P' =$



UNIDAD 3: Límite y continuidad

Límites

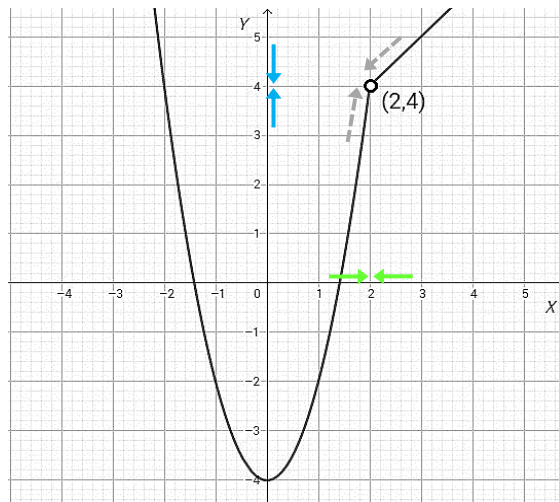
Noción intuitiva de límite

En Matemática, la noción de límite está vinculada con la variación de los valores que toman las funciones y con la idea de aproximación entre números.

Esta herramienta es de gran ayuda para estudiar el comportamiento de una función a medida que los valores de x se acercan a un determinado valor, y al igual que otros conceptos matemáticos, los límites cumplen con diversas propiedades generales que nos permiten simplificar los cálculos. Sin embargo, puede resultar difícil comprender esta idea ya que se trata de un concepto abstracto, por lo que esta guía tiene muchos ejemplos que pueden servir de gran ayuda.

- **Ejemplo 1:** analicemos el comportamiento de la siguiente función a través de la observación de su gráfica y de una tabla de valores de x cercanos a 2 por ambos lados: por izquierda con valores de x un poco menores que 2 y por derecha con valores de x un poco mayores que 2.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$		
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,22	3,92	3,992	No definida	4,001	4,01	4,1
	$f(x) \rightarrow 4$				$f(x) \rightarrow 4$		

En conclusión: a pesar de que la función no está definida para 2 (indicado en su gráfica con un punto sin relleno), la función $y = f(x)$ tiende a 4 cuando x tiende a 2 por ambos lados: por izquierda con valores de x un poco menores que 2 y por derecha con valores de x un poco mayores que 2. Esto significa que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4. En símbolos matemáticos, escribimos: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Por lo tanto, para saber si una función tiene límite para un valor $x = c$ hay que estudiar su comportamiento tanto por la izquierda como por la derecha de c .

Límite: definición informal

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo a un número L , cuando x se aproxima a c por izquierda y por derecha, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L , y escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Significa que dicho límite existe y es L .

Límites laterales

Límite lateral derecho: analizamos el comportamiento de la función f , cuando se aproxima a c tomando valores mayores pero muy próximos a c . Lo simbolizamos:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Límite lateral izquierdo: analizamos el comportamiento de la función f , cuando se aproxima a c tomando valores menores pero muy próximos a c . Lo simbolizamos:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

A estos dos límites los llamamos **límites laterales de la función f cuando $x \rightarrow c$** .

Si observamos la tabla del **ejemplo 1** vemos que:

- cuando x se aproxima a 2 por derecha los valores de la función tienden a 4, entonces decimos que el *Límite lateral derecho* es 4 y lo simbolizamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

- cuando x se aproxima a 2 por izquierda, los valores de la función tienden a 4, entonces decimos que el *Límite lateral izquierdo* es 4 y lo simbolizamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$



Es imposible determinar L si los límites laterales no coinciden.

Existencia de límites

Lo que acabamos de ver, se puede escribir así:

Definición:

Si $f(x)$ es una función y c y L son números reales:

El límite L existe si y sólo si los límites laterales existen y son iguales.

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$$

El límite L , si existe, es único.



Límites que no existen

Observemos los siguientes ejemplos.

- **Ejemplo 2:** Calcular el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, siendo $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

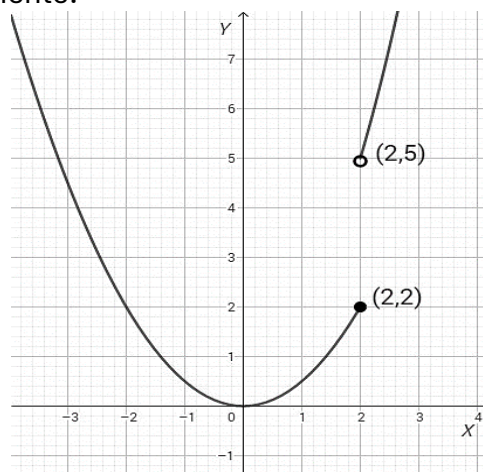
En valores de x cercanos a 2 por izquierda, los resultados de $f(x)$ tienden a 2 pero con valores de x cercanos a 2 por derecha, sus correspondientes imágenes $f(x)$ tienden a 5 como se aprecia en la siguiente tabla:

	$x \rightarrow 2^-$				$x \rightarrow 2^+$			
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	
$f(x)$	1,085	1,98	1,998	¿?	5,004	5,040	5,41	

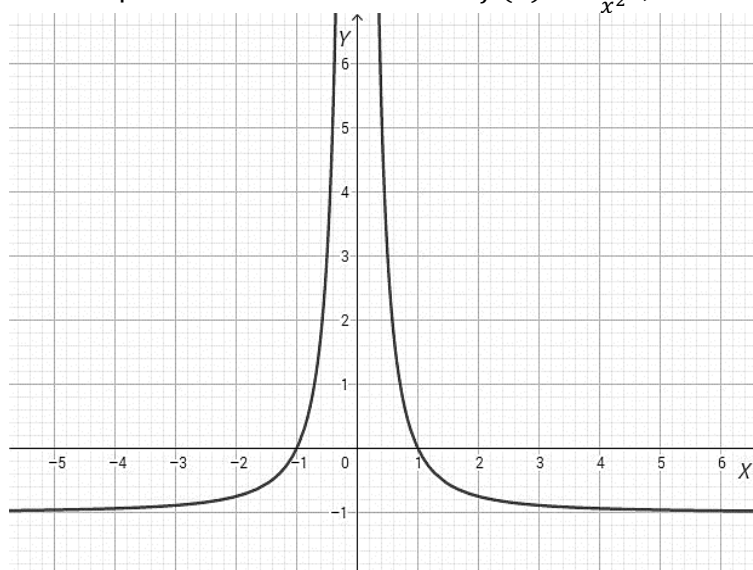
$f(x) \rightarrow 2$ $f(x) \rightarrow 5$

En términos de límites, decimos que: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$ y que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$.

Los límites laterales son distintos: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ por lo tanto no existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y lo podemos comprobar gráficamente:



- **Ejemplo 3:** estudiar el comportamiento de la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, cuando x se acerca a 0.



Debemos analizar el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2}$.

Observando la gráfica vemos que cuando x se acerca a 0 por derecha o por izquierda la función $f(x)$ **crece sin tope**, es decir **sin límite**.

Conclusión:

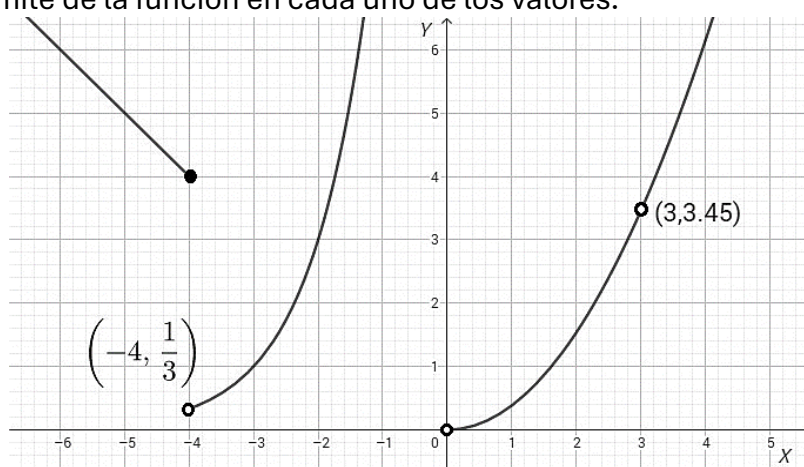
Como $f(x)$ no se aproxima a un número real L cuando x tiende a 0, decimos que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2}$ **no existe**.

Los ejemplos 2 y 3 muestran que:

Las **razones más frecuentes de que no exista el límite** de una función cuando x tiende a un número real c , son:

- $f(x)$ tiende a números diferentes según nos acerquemos a c por derecha o por izquierda.
- $f(x)$ crece o decrece sin tope cuando x tiende a c .

• **Ejemplo 4:** determinar el valor de los límites laterales para $x = -4$, $x = 0$ y $x = 3$. Concluir sobre la existencia del límite de la función en cada uno de los valores.



Desde la gráfica se observa:

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \frac{1}{3} \end{array} \right\}$	Los límites laterales existen pero son distintos \Rightarrow no existe $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$
$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\}$	Uno de los límites laterales no existe \Rightarrow no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3,45 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3,45 \end{array} \right\}$	Los límites laterales existen y coinciden \Rightarrow existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3,45$

Ejercicios

1. En el enlace que hay a continuación, encontrarás teoría y práctica de la web de *Khan Academy*. Debes ver los videos sobre teoría y luego realizar todas las actividades.

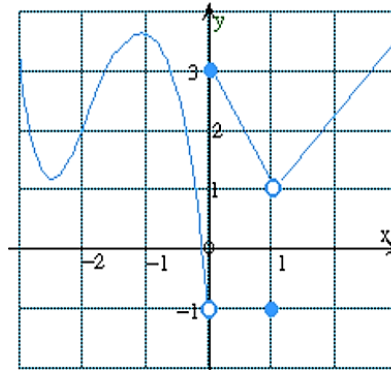


<https://es.khanacademy.org/join/JUR8G5CN>

O entrar a <https://es.khanacademy.org/> e ingresar el código de clase **JUR8G5CN**.

2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcular los límites:

(En caso de que el límite no exista, escribe \nexists que simboliza “no existe”).



a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

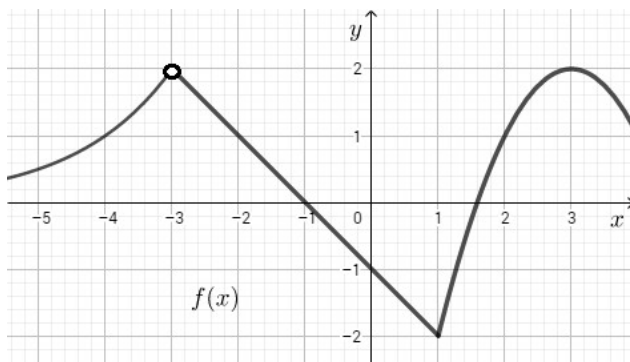
f) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

g) $f(0) =$

h) $f(1) =$

3. Determina, a partir de las gráficas, el valor de los límites laterales que se piden en cada caso. Luego concluye sobre la existencia del límite en los valores estudiados

a)



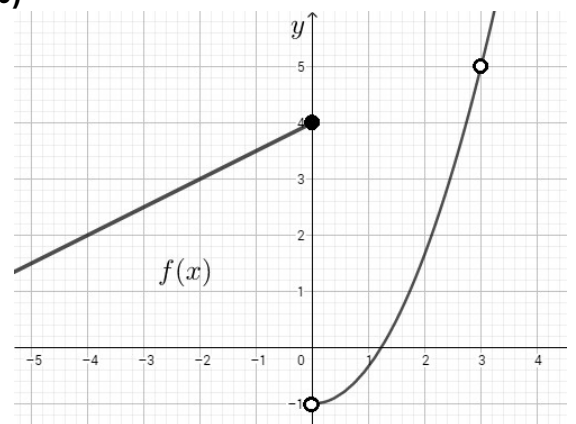
$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$

b)



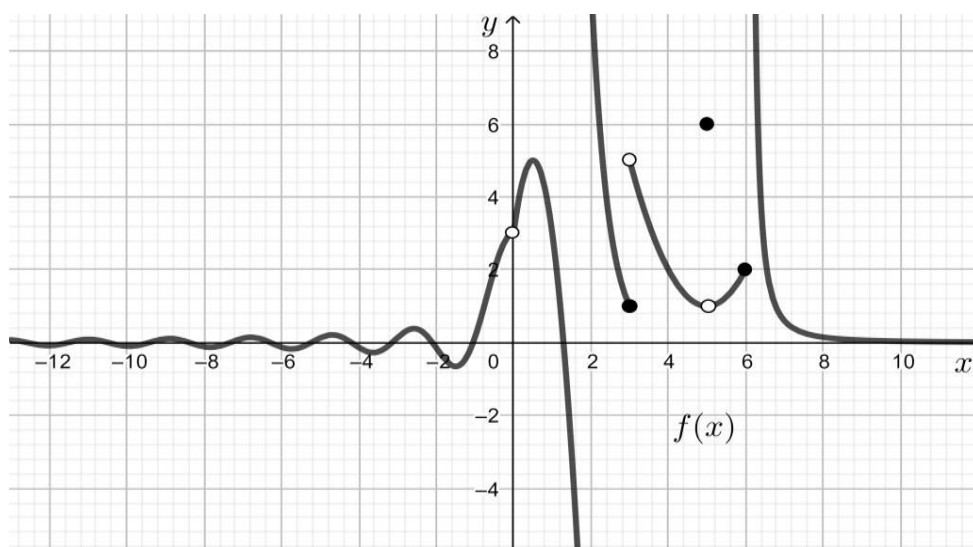
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$

c)



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) =$$

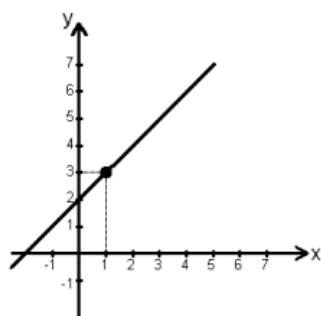
$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

4. Analiza los siguientes gráficos y determina, si es posible, los valores y los límites que se piden:

a)

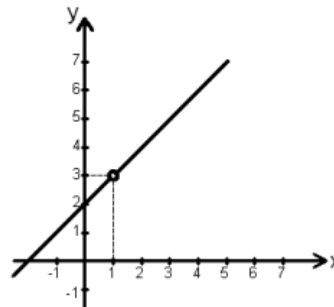


$$f(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

b)

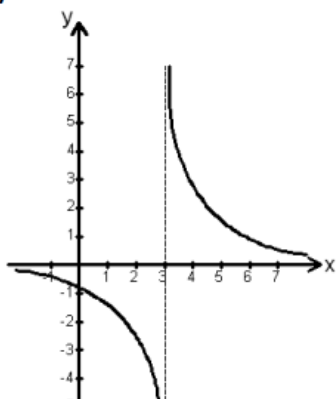


$$f(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

c)

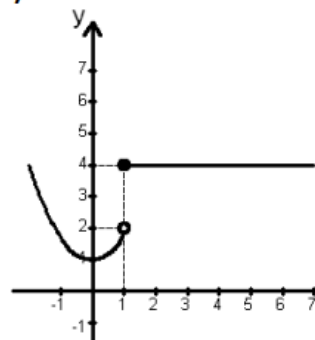


$$f(3) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

d)

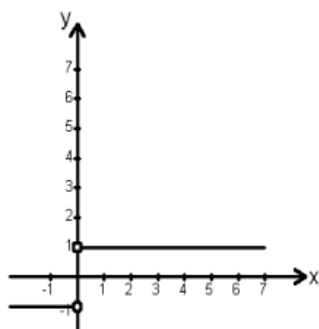


$$f(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

e)

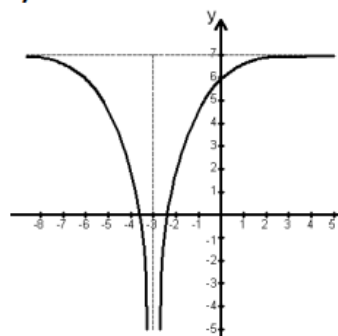


$$f(0)=$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=$$

f)

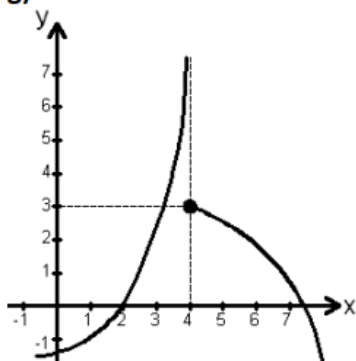


$$f(-3)=$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)=$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)=$$

g)

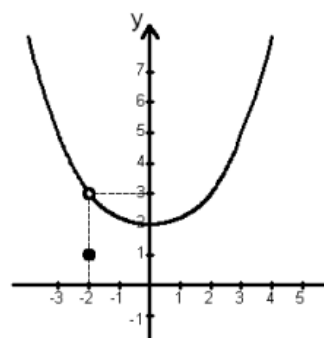


$$f(4)=$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)=$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)=$$

h)



$$f(-2)=$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)=$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)=$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=$$

Cálculo de límites

Existen propiedades de límites de funciones que nos permiten calcularlos sin la necesidad de graficar o construir una tabla de valores de la función. Las mismas están expresadas en el siguiente teorema:

Propiedades de los límites

Teorema 1: Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con límites en c , entonces:

P1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$

P2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$

P3. $\lim_{x \rightarrow c} [k f(x)] = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$

P4. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

P5. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

P6. $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

P7. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$ con $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$

$$P7. \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$$

$$P8. \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)]^n$$

$$P9. \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \quad \text{con } n \text{ entero positivo, } n \geq 2 \text{ y con } \lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$$

cuando n es par

Aplicaciones del teorema 1 en el cálculo de límites

En los siguientes ejemplos, cada igualdad se justifica mediante la propiedad que se indica (P1, P2, ...).

• **Ejemplo 5:** calcular $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^4) =$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^4) \stackrel{P3}{=} 2 \lim_{x \rightarrow 3} x^4 \stackrel{P8}{=} 2 \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x)^4 \stackrel{P2}{=} 2 \cdot [3]^4 = 162$$

• **Ejemplo 6:** calcular $\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) =$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) \stackrel{P5}{=} \lim_{x \rightarrow 4} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow 4} (2x) \stackrel{P3}{=} 3 \lim_{x \rightarrow 4} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x \stackrel{P8}{=} 3 (\lim_{x \rightarrow 4} x)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 4} x \stackrel{P2}{=} 3 \cdot (4)^2 - 2 \cdot 4 = 40$$

Sustitución directa

En el **ejemplo 1** de esta unidad, vimos que la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es independiente de la existencia de $f(c)$.

Sin embargo, si el límite es precisamente $f(c)$, el límite se puede calcular por **sustitución directa**. Es decir: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Límite de una función polinómica

Teorema 2:

Si $P(x)$ es un polinomio y c es un número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) \stackrel{sd}{=} P(c)$$

Aplicamos sustitución directa (s.d.) para la función polinómica del ejemplo 6:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x^2 - 2x) \stackrel{sd}{=} 3(4)^2 - 2 \cdot 4 = 40$$

Límite de una función racional

Teorema 3:

Si $R(x)$ es una función racional, dada por $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y c es un número real tal que el valor del denominador $Q(c) \neq 0$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

• **Ejemplo 7:** Encontrar el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Solución: Puesto que el denominador no es cero para $x=2$, se puede aplicar el teorema 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2}$$

Ejercicio

5. Aplica, en los siguientes límites, al menos tres propiedades, luego determina el valor de ellos por sustitución directa.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\sqrt{x+3} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \cdot x \right) \right]$

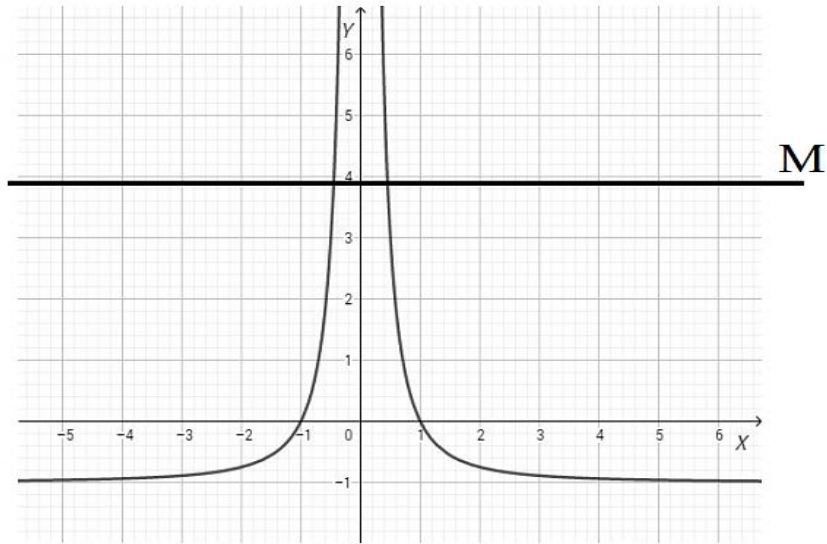
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{12-3x}{x+4} - \cos x \cdot 2^x \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\sqrt[3]{2x-6} \cdot (x^2 + 4x - 1) \right]$

d) $\lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{x-2 \log x}{\frac{1}{5}x+2} \right]^4$

Límites infinitos

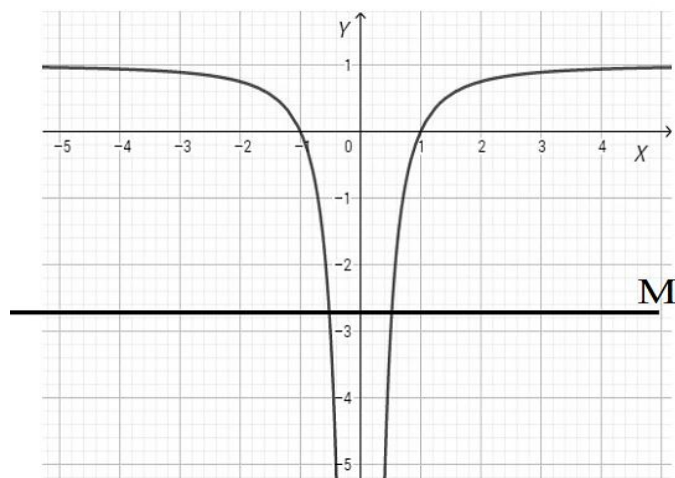
• **Ejemplo 8:** En la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$ del ejemplo 3, cuando x se acerca a 0 por derecha o por izquierda, los valores de $f(x)$ son números positivos muy grandes, y superan cualquier valor prefijado M .



Concluimos que el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2}$ **es indeterminado** y lo simbolizamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2} = +\infty$

• **Ejemplo 9:** Para el caso de la función $f(x) = -\frac{1-x^2}{x^2}$ en valores cercanos a 0, los valores de $f(x)$ son números negativos muy grandes (en valor absoluto), y superan cualquier cota M que prefijemos por lo que el límite también es indeterminado.

En la gráfica siguiente se observa claramente que $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1-x^2}{x^2} = -\infty$



Cuando al tomar valores de x muy cercanos a c , pero distintos de c , los valores de $f(x)$ son positivos y muy grandes, de manera que superan a cualquier número prefijado M , es decir a cualquier cota, entonces el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c es **indeterminado**, lo que se simboliza con la notación $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$

Si los valores de $f(x)$ son números negativos muy grandes (en valor absoluto), y superan cualquier cota M que prefijemos, el límite también es **indeterminado** y se simboliza:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

• **Ejemplo 10:** En la función $f(x) = \frac{1}{x}$, si x tiende a 0 , el signo de $f(x)$ cambia a ambos lados de 0 .

Para describir correctamente esta situación, tenemos que considerar el concepto de límites laterales:

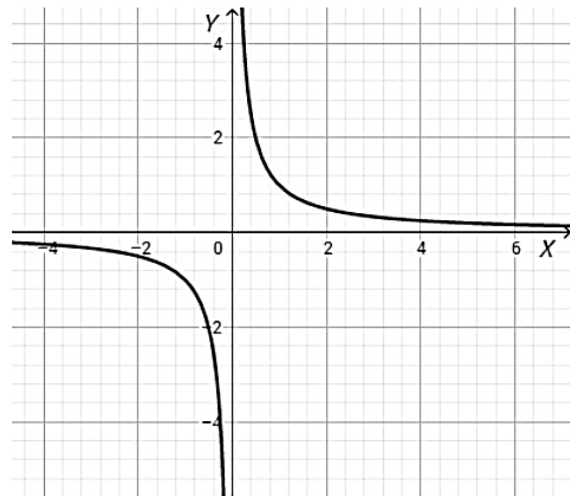
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

En este caso decimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

y por lo tanto no existe este límite, también es indeterminado.



Límites en el infinito

• **Ejemplo 11:** Volvemos a la función de nuestro ejemplo $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, pero para estudiar su tendencia cuando es la variable x la que toma valores positivos muy grandes negativos muy grandes (en valor absoluto).

Límite finito cuando $x \rightarrow +\infty$

Confeccionemos una tabla para valores numéricos de x positivos muy grandes:

x	1	2	3	...	100	...	1000	...
$f(x)$	0	-0,75	-0,88...	...	-0,9999...	-0,999999....	

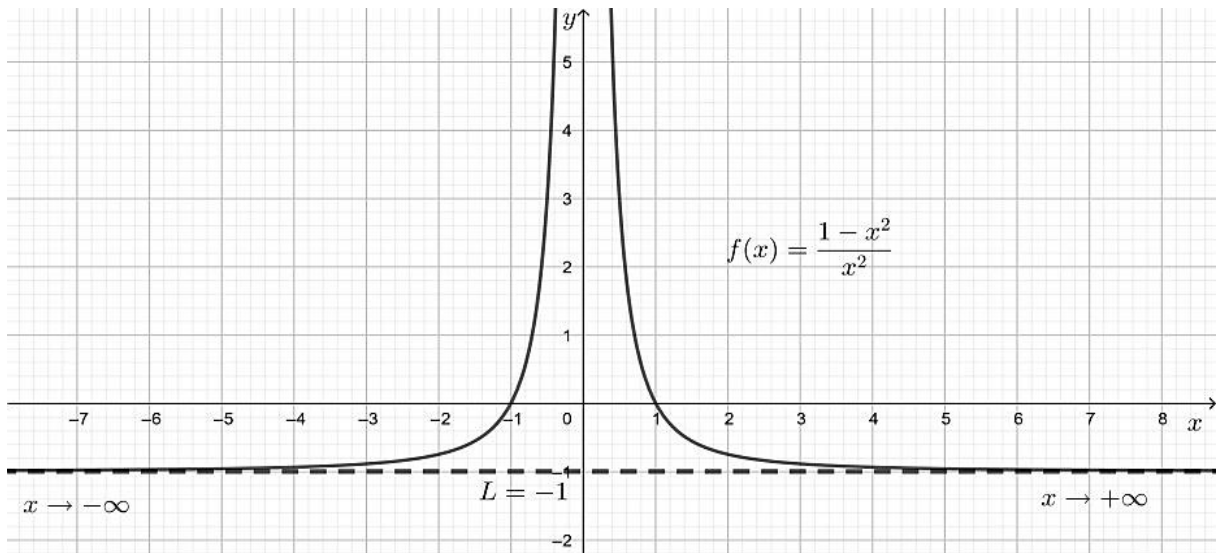
A medida que x crece, $f(x)$ se aproxima más a -1 y se expresa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

Límite finito cuando $x \rightarrow -\infty$

Confeccionemos una tabla para valores de x negativos muy grandes (en valor absoluto):

x	-1	-2	-3	...	-100	...	-1000	...
$f(x)$	0	-0,75	-0,88...	...	-0,9999...	-0,999999....	

A medida que x crece (en valor absoluto), $f(x)$ se aproxima más a -1 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$



Definición

Se dice que una función f tiene **límite finito en el infinito** si cuando la variable x toma valores muy grandes positivos $x \rightarrow +\infty$, el valor de $f(x)$ se aproxima a L tanto como se desee. Se expresa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

De igual modo cuando la variable x toma valores negativos muy grandes (en valor absoluto) $x \rightarrow -\infty$, el valor de $f(x)$ se aproxima a L tanto como se desee. Se expresa:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

El límite de una función f cuando x tiende a “más infinito” es el número L y se expresa simbólicamente:

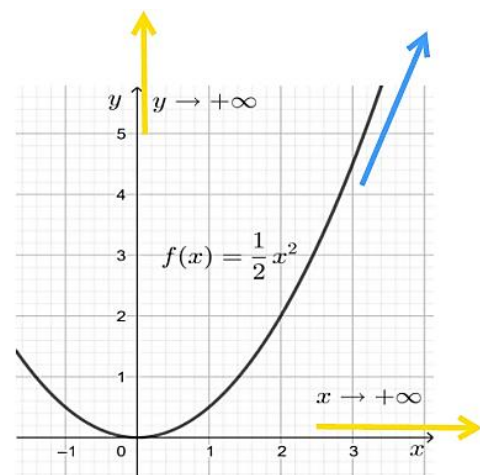
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Límite infinito cuando $x \rightarrow +\infty$

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

A medida que x crece, es decir si x tiende a “más infinito”, la función crece sin tope, también tiende a “más infinito”.

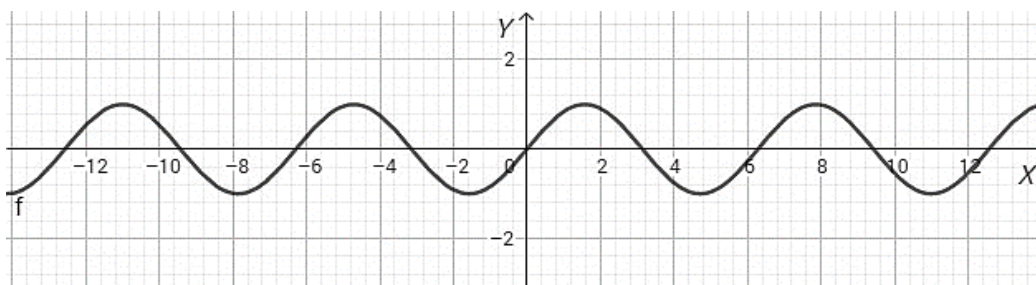
En símbolos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



Definición:

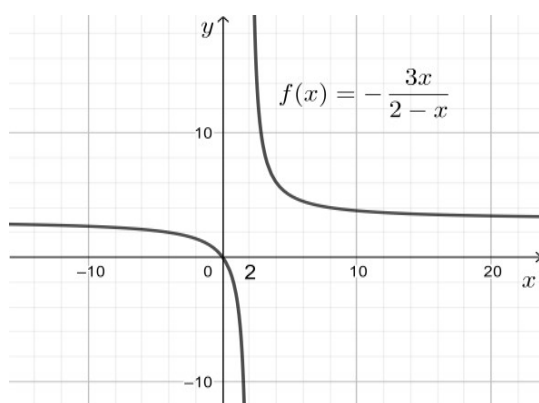
Se dice que la función $f(x)$ tiene **límite infinito en el infinito** cuando la variable x toma valores suficientemente grandes, la imagen se hace tan grande como se quiera y se expresa mediante la notación: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Límites que no existen, ni finito, ni infinito, cuando $x \rightarrow +\infty$ como muestra la gráfica de la siguiente función.

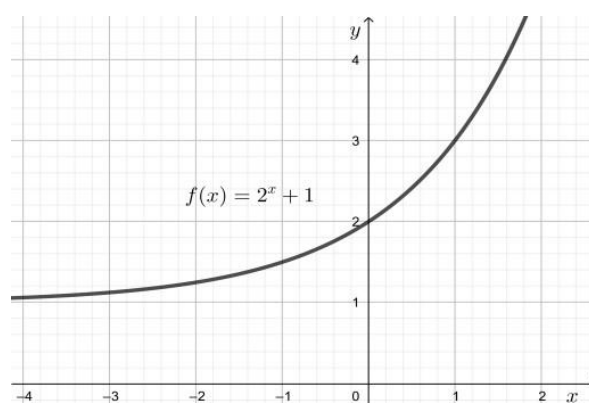


Ejercicios

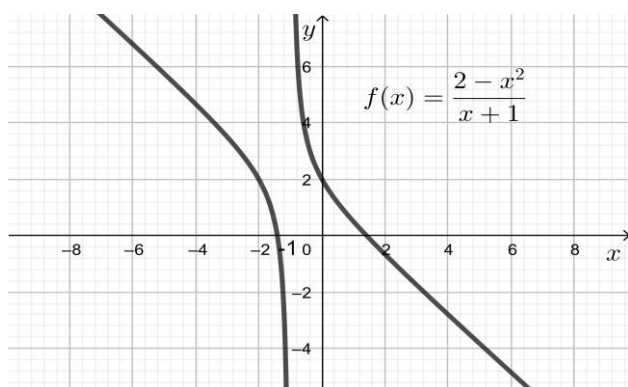
Determina, a partir de la gráfica de las funciones, los siguientes límites infinitos o en el infinito.



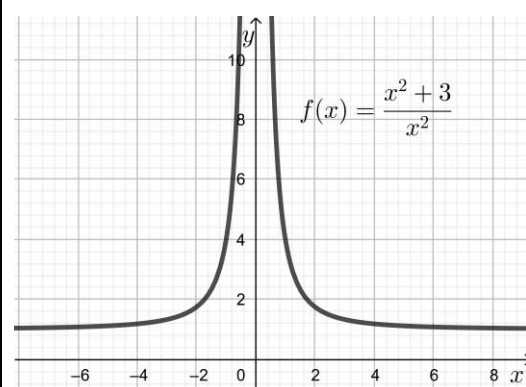
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -\frac{3x}{2-x} = \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{3x}{2-x} =$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 1) = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 1) =$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2-x^2}{x+1} = \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2-x^2}{x+1} = \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x^2}{x+1} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3}{x^2} =$$

Límite de funciones que coinciden salvo en un punto

Una importante aplicación de la sustitución directa se recoge en el siguiente teorema:

Teorema 4:

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todos los $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c . Si el límite de $g(x)$ cuando x tiende a c existe, entonces también existe el límite de $f(x)$ y son iguales: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

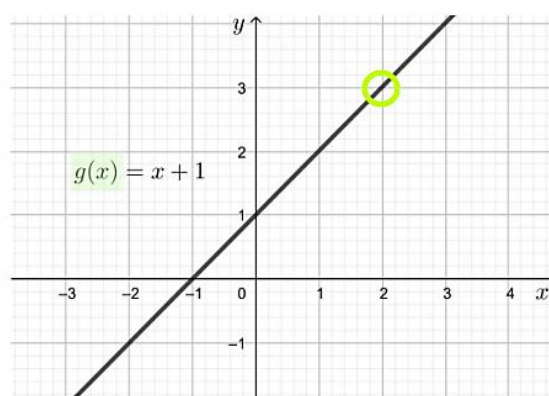
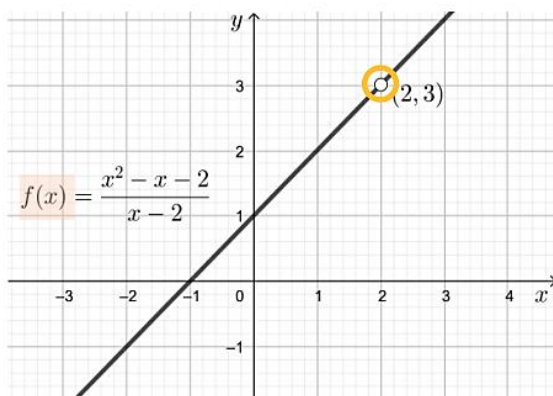
• **Ejemplo 12:** Sean las funciones $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ y $g(x) = x + 1$

Probemos que f y g coinciden salvo en $x=2$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \underset{\text{si } x \neq 2}{=} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+1)}{\cancel{x-2}} = x + 1 = g(x)$$

Luego f y g son iguales para todos los valores de $x \neq 2$.

Observemos lo dicho en las gráficas siguientes



Las gráficas de f y g son idénticas salvo en el “hueco” que presenta f .

Aplicando el Teorema 4: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) \underset{sd}{=} 3$

Estrategias para calcular límites

Al momento de calcular el límite de una función podemos encontrarnos con las siguientes situaciones:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{1) } L \rightarrow \text{resultado final es número finito} \\ \text{2) } \infty, +\infty \text{ ó } -\infty \rightarrow \text{resultado final es infinito} \\ \text{3) } \frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty} \text{ resultado indeterminado} \rightarrow \text{falla s.d.} \Rightarrow \text{buscar } g(x) \text{ tal que} \\ \text{Teor.4} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \neq c} g(x) = g(c) \rightarrow \text{resultado final 1) ó 2)} \end{array} \right.$$

Cálculo de límites indeterminados

El punto 3) del esquema anterior, es el tema al que nos referimos a continuación. Se dan reglas para calcular en cada caso el límite. Veamos los casos más usados.

Caso $\frac{0}{0}$

- **Ejemplo 13:** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{sd}{=} \frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$, la sustitución directa falla.

Cuando se trata del límite de una función racional $f(x)$, se factoriza al numerador y denominador, se simplifican los factores comunes y se calcula el límite de la función resultante $g(x)$. Esta técnica es llamada **Técnica de Cancelación**.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{x^2 - 4}{x - 2}}_{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{(x+2)}_{g(x)} \stackrel{sd}{=} 4$$

- **Ejemplo 14:** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} \stackrel{sd}{=} \frac{0}{0}$, la sustitución directa falla.

Aplicamos fórmula de Bhaskara para factorizar el numerador

$$\lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{\frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}}_{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (2x-3)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{(2x-3)}_{g(x)} \stackrel{sd}{=} -5$$

- **Ejemplo 15:** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}} = \frac{0}{0}$, la sustitución directa falla

Cuando se trata de límite de un cociente en el cual el numerador y/o el denominador es una expresión irracional, se racionaliza a quien corresponda. Es la llamada **Técnica de Racionalización**.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}}_{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\sqrt{x-2}}_{g(x)} \stackrel{sd}{=} 0$$

- **Ejemplo 16:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} = \frac{0}{0}$, la sustitución directa falla.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}}_{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3+x} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}{x \cdot (\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+x-3}{x \cdot (\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{3+x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\underbrace{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3})}_{g(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Caso $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando se trata de hallar el límite de una función racional en el cual **la variable tiende a infinito** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, se divide al numerador y al denominador por la variable elevada al mayor grado entre el numerador y el denominador.

De los 3 ejemplos siguientes se obtienen reglas prácticas que simplifican los cálculos en este tipo de casos:

- **Ejemplo 17:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 + 2}{x^5 + 2x^4} = \frac{\infty}{\infty}$ La sustitución directa falla

Dividimos el numerador y denominador por la mayor potencia x^5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 + 2}{x^5 + 2x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8x^3 + x^2 + 2}{x^5}}{\frac{x^5 + 2x^4}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^5}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Regla práctica 1: Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

- **Ejemplo 18:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 4x^5 - 1}{3x^2 + 6x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$ La sustitución directa falla.

Dividimos el numerador y denominador por la mayor potencia x^6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^6 + 4x^5 - 1}{3x^2 + 6x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^6 + 4x^5 - 1}{x^6}}{\frac{3x^2 + 6x - 2}{x^6}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^6}}{\frac{3}{x^4} + \frac{6}{x^5} - \frac{2}{x^6}} = \frac{2}{0} = \infty$$

Regla práctica 2: cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

- **Ejemplo 19:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t + 1}{5t^2 + 3t + 2} = \frac{\infty}{\infty}$ La sustitución directa falla.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t + 1}{5t^2 + 3t + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}{5 + \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}} = \frac{1}{5}$$

Regla práctica 3: cuando el grado del numerador es igual al grado del denominador, el límite es igual al cociente entre los coeficientes de los términos de más alto grado del numerador y del denominador.

Ejercicios

6. Calcula los siguientes límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5}}{x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} =$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - x + 1}{3x - 2x^2} =$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + x} =$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2} =$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 9x} =$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4) \cdot (x+4)}{(x^2+1) \cdot x} =$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{3} - \sqrt{x+1}} =$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + x + 11}{(2x-4) \cdot (x-1)} =$

Continuidad

Ya vimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, con frecuencia se obtiene simplemente calculando $f(a)$. Las funciones con esta propiedad son llamadas **continuas en $x = a$** . Veremos que la definición matemática de continuidad coincide notoriamente con el sentido de continuidad que la palabra tiene en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco.)

Definición:

Una función f es continua en un número $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Observa que la definición requiere implícitamente tres cosas. Si f es continua en a , entonces:

1. $\exists f(a)$ Existe el valor de la función para $x = a$.
2. $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ Existe el límite para $x \rightarrow a$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ El límite para $x \rightarrow a$ y el valor de $f(a)$ son iguales.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, la función $f(x)$ no es continua en $x = a$; se dice que la función es **discontinua** en dicho punto.

Geoméricamente, una función **continua** en un intervalo puede pensarse como una función cuya gráfica no tiene interrupciones. La gráfica puede dibujarse "sin levantar el lápiz del papel".

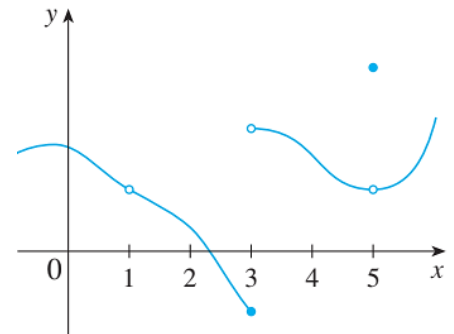
Cómo detectar discontinuidades

Discontinuidades en una gráfica:

Ejemplo:

La figura de la derecha muestra la gráfica de una función f .

¿Para qué valores de $x = a$, f es discontinua? ¿Por qué?



Solución:

- Pareciera que hay una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. El motivo formal de que f es discontinua en 1 es que **$f(1)$ no está definida**.
- La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón para la discontinuidad es diferente. Aquí, $f(3)$ está definida, pero **$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe** (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes), así que f es discontinua en $x = 3$.
- Aquí, $f(5)$ está definida y el **$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existe** (porque los límites por la izquierda y por la derecha son iguales). Pero **$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$** , así que f es discontinua en 5.

Discontinuidades en una fórmula:

Ejemplos:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Observa que $f(2) = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ (no se puede dividir en **0**), así que $\nexists f(2)$ y por eso es discontinua en $x = 2$.

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Aquí $f(0) = 1$ sí está definida, pero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^2} = +\infty$$

El $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, en sentido estricto no da un valor finito, así $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y por eso f es discontinua en $x = 0$.

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Aquí $f(2) = 1$ está definida y

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

Existe pero:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

Así que f es discontinua en $x = 2$.

Ejercicios

7. Analizar en qué punto la función $f(x) = \frac{x}{x-1}$ es discontinua y graficarla.

8. Investigar si las siguientes funciones son discontinuas en el punto indicado y graficarlas.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3+x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ x & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ x - 2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

Tipos de discontinuidades en funciones

Ya hemos visto que una función tiene una **discontinuidad** en un punto $x = a$ cuando no cumple alguna de las condiciones de continuidad: que exista $f(a)$, que exista el límite, y que ambos sean iguales. Encontraremos dos tipos de discontinuidades: evitables y no evitables.

1. Discontinuidad evitable (o removible)

El límite **existe**, pero:

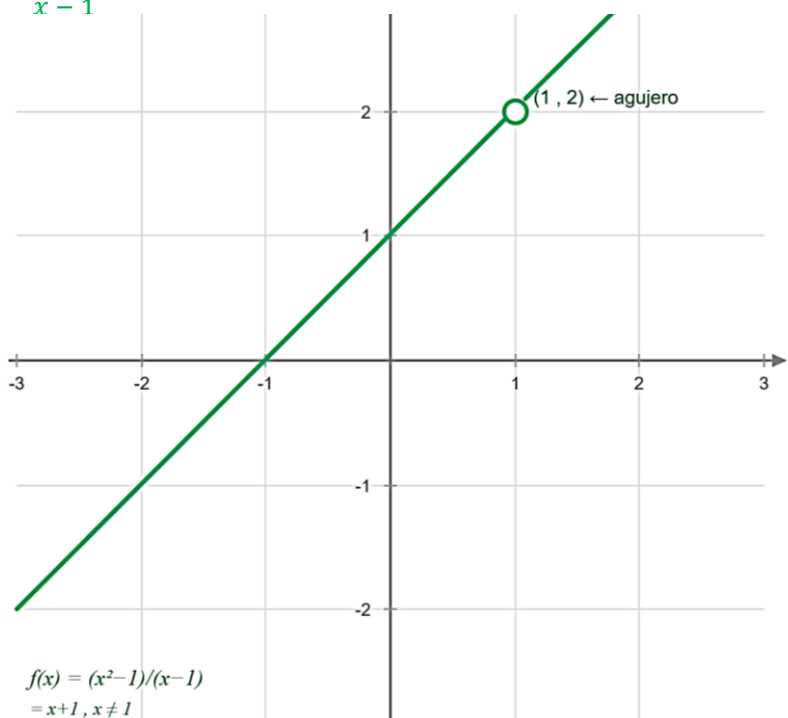
$$\nexists f(a) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

o que

$$\exists f(a) \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Es "evitable" porque puede **corregirse** redefiniendo $f(a) = L$. Gráficamente aparece como un **hueco** (punto vacío) en la curva.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no definida en $x = 1$.



2. Discontinuidad no evitable

Aquí pueden haber de dos casos:

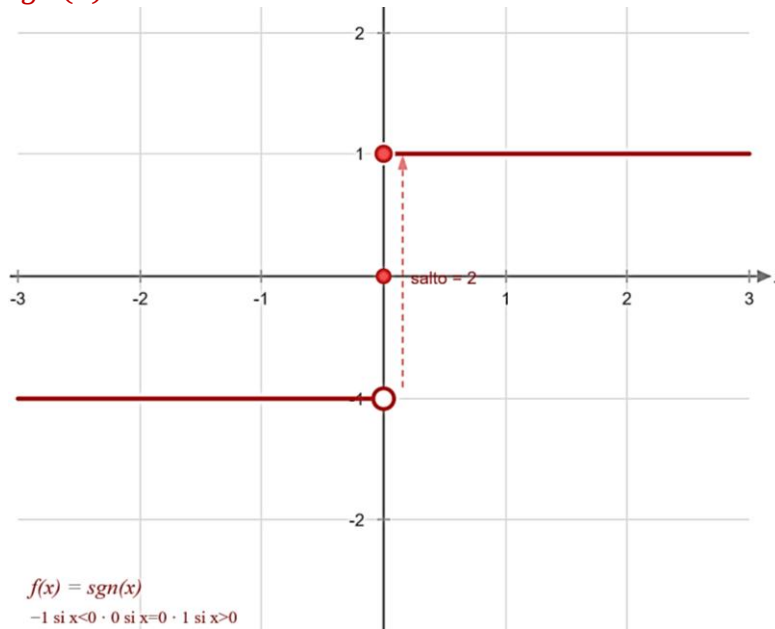
a. Discontinuidad no evitable de salto finito

El límite **no existe** porque los límites laterales son distintos entre sí:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Ambos límites laterales existen y son finitos, pero no coinciden. Gráficamente la función "salta" de un valor a otro. y la diferencia entre ambos límites es un número finito.

Ejemplo: $f(x) = \text{sgn}(x)$ en $x = 0$.



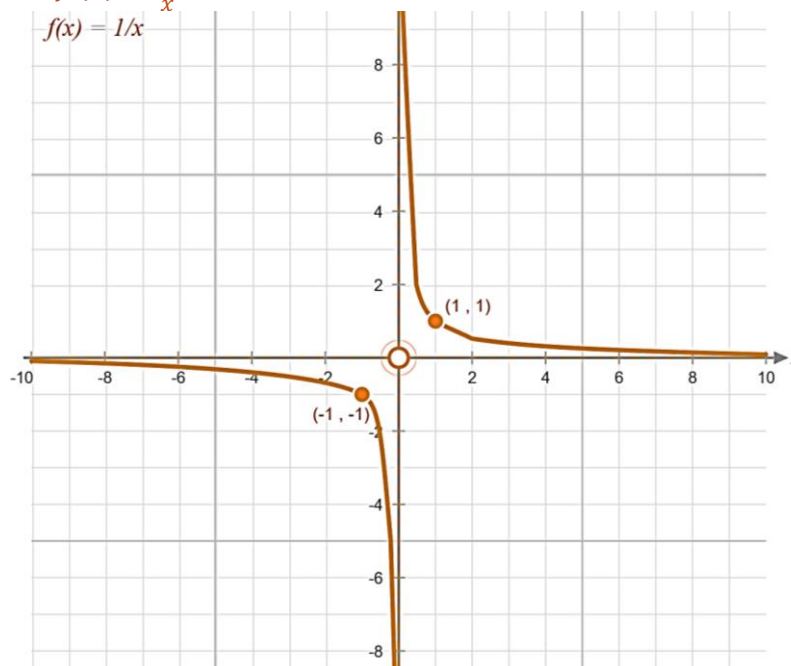
b. Discontinuidad no evitable de salto infinito o esencial

Al menos uno de los límites laterales es **infinito**:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Gráficamente, la función "salta" a un valor infinito.

Ejemplo clásico: $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 0$.



Ejercicios

9. Investigar si la discontinuidad es evitable o no evitable para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

10. Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasificarlos en evitables o no evitables. Puedes usar GeoGebra para verificar.

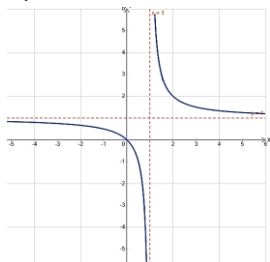
a. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

b. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

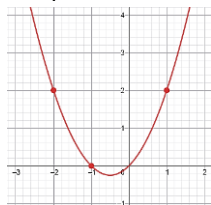
c. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

Soluciones de los ejercicios 7, 8, 9 y 10 de continuidad:

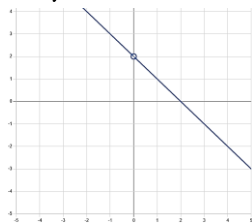
7) Discontinua en $x = 1$:



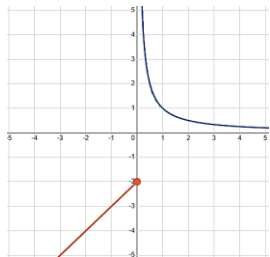
8.a) Continua en $x = 0$:



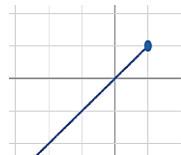
8.b) Discontinua en $x = 1$:



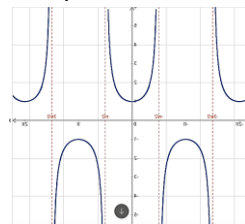
8.c) Discontinua en $x = 0$:



9) Discontinuidad no evitable:

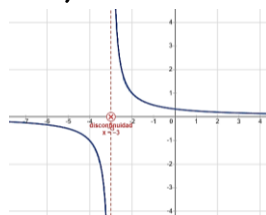


10.a)



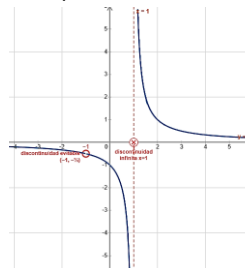
Discontinua no evitable en $\pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

10.b)



Discontinua no evitable en $x = -3$.

10.c)



Discontinua evitable en $x = -1$ y discontinua no evitable en $x = 1$.